STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1956-014

Über Strömungen (courants), ihre Ableitungen und Konkomitanten

J.A. Schouten

Ueber Strömungen (courants), ihre Ableitungen und Konkomitanten

von J.A. Schouten

(Geometrie-Tagung Oberwohlfach. Oktober, 1956).

X_n ist ein lokal kompakter topologischer Raum der dem Axiome von Hausdorff genügt und eine abzählbare Basis besitzt und der ausserdem von der Klasse C^∞ ist. Eine gerade Strömung (courant pair) $T\left[\tilde{\varphi}_{n-p}\right]$ mit der kovarianten Valenz (degré) p ist nach der Definition von De Rham [1] ein lineares Funktional definiert im Raum aller Kovarianten W-(n-p)-Vektorfelder[2] (formes différentielles impaires de degré n-p) mit kompaktem Träger in X_n, das den üblichen Kontinuitätsbedingungen genügt.

Eine solche Strömung kann äquivalent sein mit einem lokal integrabelen kovarianten Vektorfeld α_p:

(1) $$T\left[\tilde{\varphi}_{n-p}\right] = \alpha\left[\tilde{\varphi}_{n-p}\right] \overset{\text{def}}{=} \int \alpha_{[p}\,\tilde{\varphi}_{n-p]}\, d\tilde{f}^{n}$$

wo $d\tilde{f}^n$ das stets existierende nicht orientierte Volumelement darstellt. Wir haben hier eine abkürzende Bezeichnung verwendet bei der Gruppen von Indizes, sowohl ko- als kontravariant angegeben werden durch eine einzige Zahl, ihre Anzahl. Die Zeichen der Alternierung [ ] und der Ausschaltung | | werden dann weiter wie üblich verwendet. Es steht also z.B. $\beta^{p}_{[q}\ \partial_{|1}\ \gamma_{p-1|\,r]}$ für $\beta^{\mu_1\ldots\mu_p}_{[\lambda_1\ldots\lambda_q}\ \partial_{|\mu_1}\ \gamma_{\mu_2\ldots\mu_p|\,x_1\ldots x_r]}$

Gegenüber der Cartan'schen Symbolik hat diese Schreibweise den Vorteil dass sie bei gleicher Kürze (etwa 2/5 der sonst nötigen Zeichen) auch auf Grössen mit alternierten kontravarianten Indizes anwendbar ist.

Eine Strömung kann auch äquivalent sein [3] mit einem kovarianten (p-q)-Vektorfeld, $0<q\leq p$, definiert auf einer X_{n-q} in X_n mit äusserer Orientierung (q-Schraube) in X_n:

(2) $$T\left[\tilde{\varphi}_{n-p}\right] = \left(\tilde{c}^{\,n-q}, \alpha_{p-q}\right)\left[\tilde{\varphi}_{n-p}\right] \overset{\text{def}}{=} \int_{\tilde{c}^{\,n-q}} \alpha_{[p-q}\,\tilde{\varphi}_{n-p]}\, d\tilde{f}^{\,n-q}$$

wo $\tilde{c}^{\,n-q}$ die X_{n-q} symbolisiert und $d\tilde{f}^{\,n-q}$ ihr Volumelement mit äusserer Orientierung.

Zweck dieses Vortrages ist auf andere spezielle Strömungen und einige ihrer Eigenschaften aufmerksam zu machen. Eine Strömung kann nämlich

---

1) De Rham, Variétés différentiables, Hermann, Paris 1955 (Act.Sc. No 1222), S.39.

2) Ein W-Feld unterscheidet sich von einem gewöhnlichen Feld nur durch einen zusätzlichen Faktor Δ^{-1} in der Transformationsformel, vgl. Schouten, Ricci Calculus 1954, S. 22 ff.

3) De Rham, a.a.O. S.40 und Über mehrfache Integrale, Abh.Math.Sem. Hamburg XII 1938, 313-338, S.326.

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

auch äquivalent sein mit einem sowohl oben als unten gemischten Tensor β^{r-p}_{r-q}, definiert auf einer X_{n-q} in X_n. Solche Strömungen sind bisher wie es scheint nur für p=r und für q=r=n in der Literatur aufgetreten. Sie lassen sich einfach schreiben [1)]

$$(3)\quad T[\tilde{\varphi}_{n-p}] = (\tilde{c}^{n-q}, \beta^{r-p}_{r-q})[\tilde{\varphi}_{n-p}] = \int_{\tilde{c}^{n-q}} \beta^{r-p}_{[r-q}\, \tilde{\varphi}_{|r-p|n-r]}\, d\tilde{f}^{n-q}\,;\quad p\leq r\,;\, q\leq r$$

Ist T äquivalent mit α_p, so findet man leicht für die kovariante Ableitung dT (korrespondierend mit $\partial_{[1}\alpha_{p]}$) die Formel von De Rham [2)]

$$(4)\quad dT[\tilde{\psi}_{n-p-1}] = (-1)^{p+1}\, T[d\tilde{\psi}_{n-p-1}]$$

die nun weiter als Definitionsgleichung für allgemeines $T[\tilde{\psi}_{n-p-1}]$ verwendet werden kann. Für den Fall p=r ergibt sich dann die Formel von De Rham [2)]

$$(5)\quad d(\tilde{c}^{n-q}, \alpha_{p-q})[\tilde{\psi}_{n-p-1}] = (-1)^{q+1}\,(b\tilde{c}^{n-q}, \alpha_{p-q})[\tilde{\psi}_{n-p-1}] + (-1)^{q}(\tilde{c}^{n-q}, d\alpha_{p-q})[\tilde{\psi}_{n-p-1}]$$

wo $b\tilde{c}^{n-q}$ den Rand von $\tilde{c}^{n-q}$ symbolisiert. In dieser Formel treten nur Ableitungen mit d (Rotationen) auf. Dagegen führt der allgemeine Fall für q>p zu

$$(6)\quad (n-p)\,d(\tilde{c}^{n-q}, \beta^{r-p}_{r-q})[\tilde{\psi}_{n-p-1}] = (-1)^{r+1}(n-r)(b\tilde{c}^{n-q}, \beta^{r-p}_{r-q})[\tilde{\psi}_{n-p-1}] + (-1)^{p+1}(\tilde{c}^{n-q}, \pounds^{r-p-1}_{r-q})[\tilde{\psi}_{n-p-1}]$$

wo das Symbol $\pounds^{r-p-1}_{r-q}$ in der Klammer bedeutet dass __vor__ der Integration der Operator $\pounds^{r-p-1}_{r-q}$ definiert durch

$$(7)\quad \underset{\beta}{\pounds}{}^{r-p-1}_{r-q}\, \tilde{\psi}_{n-p-1} = (r-p)\,\beta^{r-p}_{[r-q}\, \partial_{|1}\tilde{\psi}_{r-p-1|n-r]} + (-1)^{r-p-1}(n-r)\,\tilde{\psi}_{r-p[n-r-1}\,\partial_{1}\beta^{r-p}_{r-q]}$$

auf $\tilde{\psi}_{n-p-1}$ angewandt werden muss, in derselben Weise wie α_{p-q} und β^{r-p}_{r-q} in (2) und (3) bedeuten dass __vor__ der Integration $\alpha_{[p-q}\tilde{\varphi}_{n-p]}$ bzw. $\beta^{r-p}_{[r-q}\tilde{\varphi}_{|r-p|n-r]}$ zu bilden ist [3)].

---

1) Für n=q=r ist die Integration zu deuten als eine Summierung des W-Skalars $\beta^{n-p}\,\tilde{\varphi}_{n-p}$ über eine endliche Anzahl von Punkten.

2) A.a.O. S.53 u.f. In dieser Formel ist dT als __ein__ Symbol aufzufassen. Die linke Seite bedeutet also nicht d angewandt auf $T[\tilde{\psi}_{n-p-1}]$ denn $T[\tilde{\psi}_{n-p-1}]$ ist für sich genommen bedeutungslos.

3) $\underset{\beta}{\pounds}{}^{r-p-1}_{r-q}$ lässt sich natürlich ohne Änderungen auf ψ_{n-p-1} anwenden.

Für p+1=q=r geht $\underset{\beta}{\pounds}{}^{r-p-1}_{r-q}$ über in den bekannten Lie Operator $\underset{\beta}{\pounds}$ gehörig zum Vektor β^1:

$$(8)\quad \pounds\tilde{\varphi}_{n-q} = \beta^1\partial_1\tilde{\varphi}_{n-q} + (\partial_{[1}\beta^1)\tilde{\varphi}_{|1|n-q-1]}$$

der eine Konkomitante von β^1 und $\tilde{\varphi}_{n-q}$ bildet. Für r=p+1 gibt (7) die Konkomitante von β^1_{r-q} und ψ_{n-p-1} die bei Frölicher und Nijenhuis [1] (bis auf einen unwesentlichen Zahlenfaktor) vorkommt als $[\beta,\psi]$. Die gewöhnliche kovariante Ableitung $d\tilde{\varphi}_{n-p-1}$ ergibt sich als Spezialfall für r-p=r-q=1, $\beta^\varkappa_\lambda = A^\varkappa_\lambda$:

$$(9)\quad \underset{A}{\pounds}_1\tilde{\varphi}_{n-q} = \partial_{[1}\tilde{\varphi}_{n-q]}$$

Berechnet man die Lie Ableitung einer Strömung $T[\tilde{\varphi}_{n-p}]$, die mit einem kovarianten p-Vektorfeld äquivalent ist, so ergibt sich

$$(10)\quad \underset{\beta}{\pounds}T[\tilde{\varphi}_{n-p}] = -T[\underset{\beta}{\pounds}\tilde{\varphi}_{n-p}]$$

und diese Gleichung lässt sich nun weiter als Definitionsgleichung der Lie Ableitung einer allgemeinen Strömung der kovarianten Valenz p verwenden. Für den Operator $\underset{\beta}{\pounds}{}^{k-1}_{1}$ liegt die Sache nicht ganz so einfach. Für einen kovarianten (p-l+k-1)-Vektor $\alpha_{p-l+k-1}$ kann man berechnen dass

$$(11)\quad \underset{\beta}{\pounds}{}^{k-1}_{l}T[\tilde{\varphi}_{n-p}] = -T[\$^{k-1}_{l}\tilde{\varphi}_{n-p}] \qquad [2]$$

wo $\$^{k-1}_{1}$ ein Operator ist, der nie $\pounds^{k-1}_{1}$ nur von β^k_1 und $\partial_1\beta^k_1$ abhängt und nur für l=0 einfach bis auf einen Zahlenfaktor mit $\underset{\beta}{\pounds}{}^{k-1}$ identisch ist. Für k=2, l=4, n-p=2 ist z.B. $\$^1_4$ der Operator

$$(12)\quad \underset{\beta}{\$}{}^1_4 = (-\tfrac{1}{2}\underset{\beta}{\pounds}{}^1_4 + 2\underset{\gamma}{\pounds}_3 - 3\partial_{[1}\alpha_{2}) \dots\dots \ ; \ \gamma^1_3 = \beta^{|1|1}_{|1|3} \ ; \ \alpha_2 = \beta^{|2|}_{|2|2}$$

Die Gleichung (11) kann nun, ähnlich wie (10) als Definitionsgleichung der Wirkung von $\pounds^{k-1}_{1}$ auf eine allgemeine Strömung verwendet werden. Die neue Operatorenreihe $\underset{\beta}{\$}{}^{k-1}_{1}$ ist noch nicht weiter untersucht worden, namentlich nicht in Bezug auf die Wirkung auf allgemeine Strömungen.

Die Regel für die Anwendung von $\underset{\beta}{\pounds}_1$ auf alternierende Produkte ist recht einfach

$$(13)\quad \underset{\beta}{\pounds}_{[l}\varphi_p\psi_{q]} = (\underset{\beta}{\pounds}_{[l}\varphi_p)\psi_{q]} + (-1)^{pl}\varphi_{[p}\underset{\beta}{\pounds}_{l}\psi_{q]}$$

und steht in naher Beziehung zu den schon oben zitierten Untersuchungen von Frölicher und Nijenhuis über Operatorsysteme gebildet aus Operato-

---

1) A. Frölicher and A. Nijenhuis, Theory of vector-valued differential forms, Proc.Kon.Ned.Akad.59, 1956 (=Indag.Math.18,1956), p.338-359.

2) Links ist $\underset{\beta}{\pounds}{}^{k-1}_{1}$ T als <u>ein</u> Symbol aufzufassen, da $T[\tilde{\varphi}_{n-p}]$ für sich bedeutungslos ist.

ren $\underset{\beta}{\mathcal{L}}_1$ und gewissen alternierenden Überschiebungen. Für $\mathcal{L}_1^{k-1}$, $k>1$ fehlt eine solche Theorie noch, aber es ist wenigstens gelungen die mit (13) korrespondierende Produktregel aufzustellen, die viel komplizierter ist als (13) da sie ausser $\underset{\beta}{\mathcal{L}}_1^{k-1}$ noch andere Operationen dieses Typus enthält, die aber alle nicht nur von β_1^k, $\partial_1 \beta_1^k$ sondern auch noch von $\varphi_p, \partial_1 \varphi_p$ oder von $\psi_q, \partial_1 \psi_q$ abhängen.

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM