STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1957-014

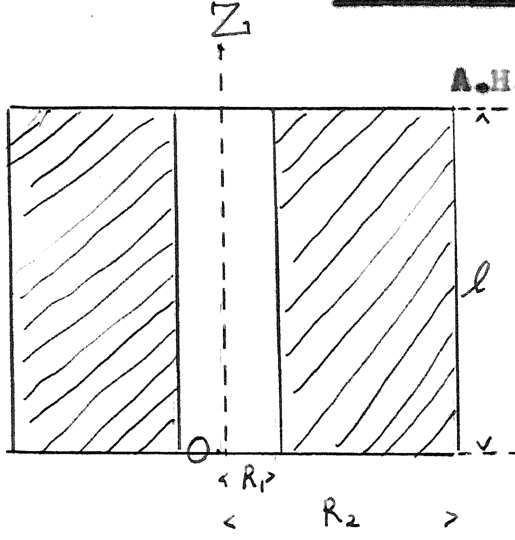
Een afschuivingsprobleem

A.H.M. Levelt

1957

Een afschuivingsprobleem

A.H.M. Levelt



afbeelding 1

Afbeelding 1 stelt voor een doorsnede door de as van een doorboord cirkelcilindrisch lichaam. Terwijl de buitenwand wordt vastgehouden laat men op de binnenwand een schuifspanning werk evenwijdig met de asrichting, waarvan de resultante P is. Gevraagd wordt nu de grootte van de verplaatsing h van de binnenwand ten opzichte van de buitenwand.

Oplossing. We maken gebruik van cilindercoördinaten z, ,r. De z-as valt samen met de as van de cilinder. Het grondvlak ligt in het vlak z=0. u_z, u_θ, u_r zijn de verplaatsingen in de richtingen z=constant, θ=constant, resp. r=constant. Uit de rotatiesymmetrie om de z-as besluiten we dat verplaatsingen slechts plaats hebben in vlakken door de z-as, waaruit volgt $u_\theta=0$, en dat de verplaatsingen onafhankelijk van θ zijn, zodat dus $\frac{\partial u_r}{\partial \theta}=\frac{\partial u_z}{\partial \theta}=0$.

Voor de differentiaalvergelijkingen en notaties verwijzen we naar I.S. Sokolnikoff, Mathematical theory of elasticity, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-London, 1946. I.h.b. verwijzen we naar § 48.

We maken nu de aanname dat de verplaatsingen onafhankelijk van z zijn. In welk opzicht deze situatie afwijkt van de feitelijk gegevene zal aan het eind worden vermeld. Bovendien nemen we aan dat het effect van de zwaartekracht verwaarloosbaar klein is.

Onder deze omstandigheden worden de vergelijkingen (48.15) uit het bovengenoemde boek gereduceerd tot

$$(1)\qquad e_{rr}=u_r', \quad e_{\theta\theta}=\frac{u_r}{r}, \quad e_{zz}=0,$$
$$e_{r\theta}=0, \quad e_{rz}=\tfrac{1}{2}u_z', \quad e_{\theta z}=0.$$

Accenten duiden differentiëren naar r aan.

De betrekkingen (48.10) nemen de volgende gedaante aan:

$$(2)\qquad \tau_{rr}=\lambda\vartheta+2\mu e_{rr}, \quad \tau_{\theta\theta}=\lambda\vartheta+2\mu e_{\theta\theta}, \quad \tau_{zz}=\lambda\vartheta,$$
$$\tau_{r\theta}=0, \quad \tau_{rz}=2\mu e_{rz}, \quad \tau_{\theta z}=0.$$

Hierin is $\vartheta=e_{rr}+e_{\theta\theta}+e_{zz}=\frac{1}{r}(r\,u_r)'$. De uitdrukkingen (2) substitueren we in (48.16). We vinden

$$(\lambda\vartheta+2\mu e_{rr})' + \frac{2\mu}{r}(e_{rr}-e_{\theta\theta}) = 0$$

$$(2\mu e_{rz})' + \frac{1}{r}(2\mu e_{rz}) = 0.$$

Met behulp van (1) kunnen we hiervoor ook schrijven

(3) $$(\frac{\lambda}{r}(ru_r)' + 2\mu\, u_r')' + 2\mu(\frac{u_r}{r})' = 0.$$

(4) $$(\mu\, u_z')' + \frac{1}{r}(\mu u_z') = 0.$$

Men ziet gemakkelijk in, dat de algemene oplossing van (3) is

$$u_r = \frac{ar+b/r}{\lambda+2\mu},$$

en de algemene oplossing van (4)

$$u_z = c \log r + d.$$

We moeten a,b,c en d zo kiezen dat aan de randvoorwaarden $u_r(R_1) = u_r(R_2) = 0$, $u_z(R_2) = 0$ en $u_z(R_1) = -h$. We vinden

$$a=0,\ b=0,\ c=h/\log(R_2/R_1),\ d=-h \log R_2/\log (R_2/R_1),$$

waaruit volgt

$$u_r = 0\ ,\quad u_z = \frac{h}{\log(R_2/R_1)}(\log r - \log R_2),$$

en met (1) en (2)

(5) $$\tau_{zr} = \frac{\mu h}{R_1 \log(R_2/R_1)}\ ,\quad \tau_{zz} = 0,\quad \tau_z = 0.$$

Gemakkelijk berekenen we nu de resultante der schuifspanning op de binnenwand, evenwijdig met de z-as. Deze is

$$P = 2\pi R_1 \int_0^l \tau_{rz}(R_1)dz =$$

$$= 2\pi l\, R_1 \cdot \frac{\mu h}{\log(R_2/R_1)}\,\frac{1}{R_1} = \frac{2\, l \pi h \mu}{\log R_2/R_1}.$$

De formule, die ons in staat stelt uit de gemeten doorzakking h van de binnenwand, de toegepaste belasting P en de afmetingen R_2 en l van het lichaam de glijdingsmodulus μ te berekenen, luidt dus

(6) $$\mu = \frac{P \log R_2/R_1}{2\pi l\, h}.$$

(Het is van belang op te merken dat in deze formule met log x bedoeld is ${}^e\log x$, de natuurlijke logarithme. Het verband met "gewone" logarithme wordt gegeven door ${}^e\log x = ({}^{10}\log x)/({}^{10}\log$ $({}^{10}\log x)/0,43429...)$.

We kunnen ons nu afvragen in hoeverre de gevonden oplossing in overeenstemming is met de feitelijke situatie. We merken op, dat nog aan een andere randvoorwaarde moet zijn voldaan, n.l. voor z=0 en z=l moet gelden $\tau_{zr} = \tau_{z\theta} = \tau_{zz} = 0$. De door ons gevonden oplossing voldoet wel aan $\tau_{z\theta} = \tau_{zz} = 0$, maar $\tau_{zr} = \frac{h}{R_1 \log(R_2/R_1)}$ (zie (5)). In feite speelt ons de aangenomen onafhankelijkheid van z hier parten. Ofschoon het niet gemakkelijk is om de afwijking van de feitelijke toestand aan te geven, is het te verwachten dat (6) in eerste benadering het juiste resultaat geeft.