STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 014

Opmerkingen over Kowalsky's artikel: "Kategoriën topologischer Räume"

P.C. Baayen

1962

Opmerkingen over Kowalsky's artikel: "Kategorieën topologischer Räume".

P.C. Baayen

1. Inleiding

In dit rapport worden enkele aanvullingen gegeven op een artikel van H.J. Kowalsky: Kategorieën topologischer Räume (Math.Zeitschrift 77 (1961) 249-272). Bij de behandeling van dit artikel op een colloquium over de theorie der categorieën bleken enkele bewijzen lacunes te vertonen; met name de bewijzen dat onder zekere voorwaarde het netwerk J_X^* distributief is (4.10 en 4.11)[1], het bewijs van stelling 5.3, en dat van 5.5.

De gebruikte terminologie en notatie is die van Kowalsky.

In wat volgt wordt voortdurend aangenomen dat de beschouwde categorie voldoet aan (T), (M^*), (B), (U) en aan (S) voor eindige objectverzamelingen.

2. Distributiviteit van J_X^*

Behalve 4.11 moet de distributieve wet bewezen worden als niet $g \wedge f_1 \neq 0$ en $g \wedge f_2 \neq 0$.

a) $g \wedge f_1 = 0 = g \wedge f_2$. Dan $g | f_1$ en $g | f_2$, dus $g | (f_1 \vee f_2)$ (4.4), i.e. $g \wedge (f_1 \vee f_2) = 0$.

b) $g \wedge f_1 \neq 0$, $g \wedge f_2 = 0$.

Zij $d = g \wedge (f_1 \vee f_2)$. Daar $g \geqslant d \geqslant g \wedge f_1$ behoeft slechts bewezen te worden: $f_1 \geqslant d$, i.e. $f_1 \downarrow d$. Stel niet $f_1 \downarrow d$. Dan $\exists \varphi, \varphi'$: $f_1 \varphi = f_1 \varphi'$ en $d\varphi \neq d\varphi'$. Volgens (T) dan $\exists \psi : \psi d \varphi | \psi d \varphi'$. Zij s een som van f_1 en f_2, gevormd m.b.v. β_1 en β_2 (zie diagram). Dan is $f_1 \vee f_2 = \mathrm{Im}\, s$. Daar $d \leqslant g$ en $d \leqslant f_1 \vee f_2$, g en $f_1 \vee f_2$ injecties, zijn er d', d'': $d'g = d = d''(f_1 \vee f_2)$. Uit def.$3^b$ volgt:

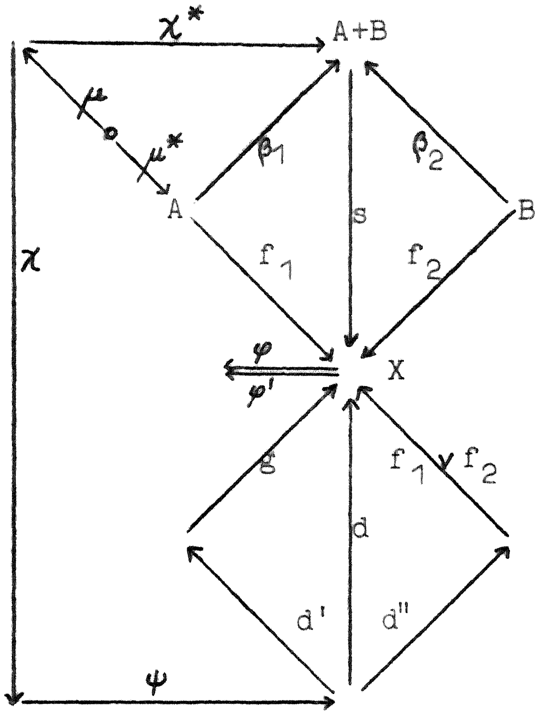
----

1) Verwijzingen naar gedeelten uit Kowalsky's artikel worden gegeven door vermelding van het nummer van het bewuste gedeelte tussen haakjes.

$\exists\, \chi, \chi^* : \chi\psi d''(f_1 \vee f_2) = \chi^* s.$

Uit $\chi^* \nmid \varepsilon_{A+B} = \beta_1 \vee \beta_2$ volgt $\chi^* \nmid \beta_1$ of $\chi^* \nmid \beta_2$.

Als $\chi^* \nmid \beta_1$, dan $\exists\, \mu, \mu^* : \mu\chi^* = \mu^* \beta_1$. Er volgt



$$\begin{aligned} \mu\chi\psi\, d\varphi &= \mu\chi\psi\, d''(f_1 \vee f_2)\varphi = \\ &= \mu\chi^* s\varphi = \mu^* \beta_1\, s\varphi = \\ &= \mu^* f_1 \varphi = \mu^* f_1 \varphi' = \\ &= \ldots = \mu\chi\psi d\, \varphi', \end{aligned}$$

zodat

$\psi d\varphi \nmid \psi d\, \varphi'$:tegenspraak.

Als $\chi^* \nmid \beta_2$, dan

$f_2 = \beta_2\, s \nmid \chi^* s = \chi\psi d''(f_1 \vee f_2) =$

$= \chi\psi d' g$, zodat $f_2 \nmid g$:

tegenspraak.

3. <u>Bewijs van 5.3</u>

a) $f', g' \in \alpha_h \Longrightarrow f' \wedge g' \in \alpha_h$.

Want $f' \nmid h$ en $g' \nmid h$; zij $f = h^-(f') \in \alpha$ en $g = h^-(g') \in \alpha$, en laat $k = f \wedge g \in \alpha$. Er zijn morphismen k', k'' zodat $k'f = k = k'g$, en α, β zodat $fh = \alpha f'$, $gh = \beta g'$.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "f'"] & {} & {} \arrow[l, "g'"'] \\
{} \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "f"] & {} \arrow[u, "h"] & {} \arrow[u, "\beta"'] \arrow[l, "g"'] \\
& {} \arrow[ul, "k'"] \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "k''"'] &
\end{tikzcd}$$

Dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l} f' \downarrow k' \quad \alpha f'=kh \\ g' \downarrow k'' \quad \beta g'=kh \end{array}\right\} \Longrightarrow f'\wedge g' \downarrow kh,$$

maar ook: $h \downarrow kh$. Dus $h \not\downarrow f'\wedge g'$.
Nu volgt uit (4.9):

$$h^{-}(f'\wedge g')=k\in\alpha .$$

b) $f',g'\in J_Y$ en $f'\vee g'\in\alpha_h \Longrightarrow f'\in\alpha_h$ of $g'\in\alpha_h$.

Uit $f'\vee g' \nmid h$ volgt: $f'\nmid h$ of $g'\nmid h$ (4.4).

<u>Geval 1</u>: $f'\nmid h$ en $g'\nmid h$. Dan verder als in het artikel.

<u>Geval 2</u>: $f'\nmid h$, $g' \mid h$.

We zullen bewijzen: $h^{-}(f'\vee g')=h^{-}(f')$. Dan volgt:
$h^{-}(f')=h^{-}(f'\vee g')\in\alpha \Longrightarrow f'\in\alpha_h$.

Zij $f=h^{-}(f')$ en $k=h^{-}(f'\vee g')$, en laat α,β morphismen zijn met $\alpha f'=fh$, $\beta(f'\vee g')=kh$. Daar $f'\vee g'\downarrow f'$ is $k\downarrow f$. We moeten dus nog bewijzen: $f\downarrow k$. Stel dit niet waar. Dan $\exists\varphi,\varphi'$: $f\varphi=f\varphi'$ en $k\varphi\neq k\varphi'$. Volgens (T) $\exists\psi$: $\psi k\varphi \mid \psi k\varphi'$.

Zij s een som van f' en g', geconstrueerd m.b.v. morphismen τ_1, τ_2 (zie diagram). Daar het eindobject van $\psi\beta$ samenvalt met het uitgangsobject van $f'\vee g'=\mathrm{Im}\, s$, volgt uit def.$3^b$:
$\exists\chi,\chi^*$: $\chi^* s=\chi\psi\beta(f'\vee g')$.

Uit $\chi^*\nmid\varepsilon=\tau_1\vee\tau_2$ volgt $\chi^*\nmid\tau_1$ of $\chi^*\nmid\tau_2$.

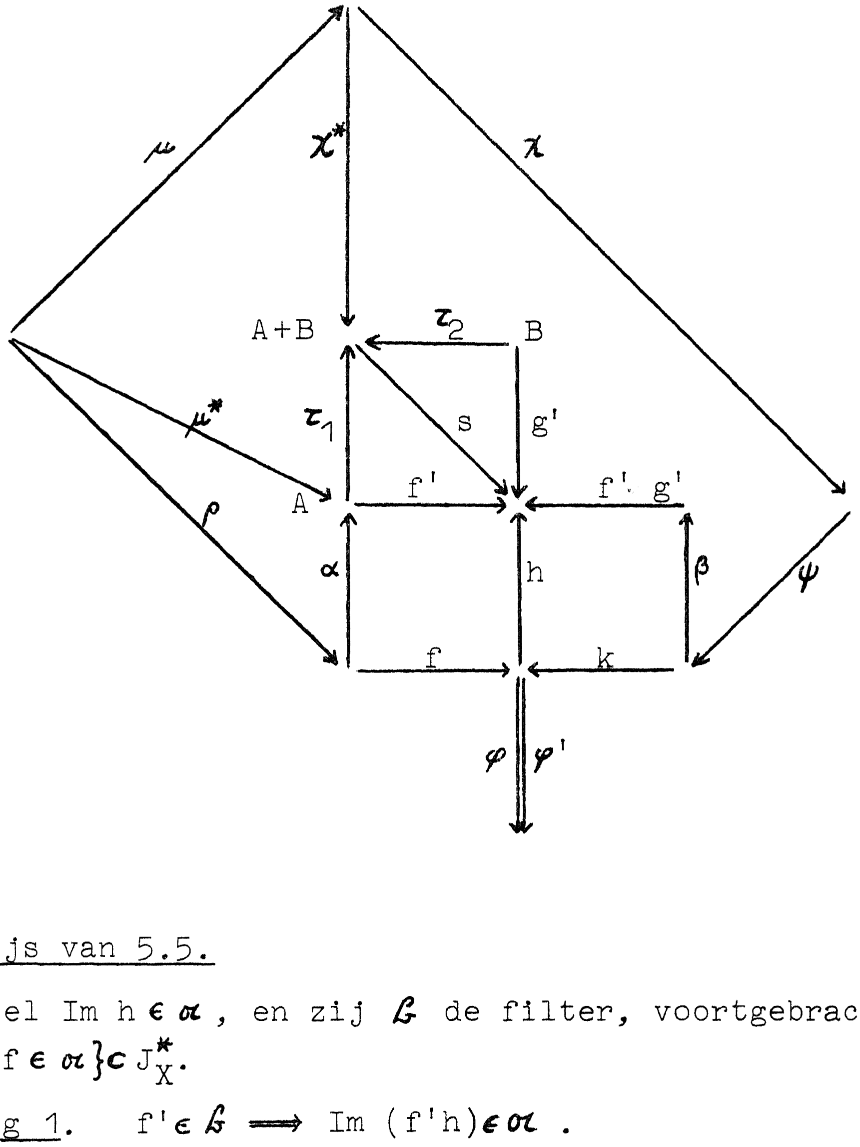
Als $\chi^*\nmid\tau_1$, dan $\exists\mu,\mu^*:\mu\chi^*=\mu^*\tau_1$. Dan volgt

$$\mu^* f'=\mu^*\tau_1 s=\mu\chi^* s=\mu\chi\psi\beta(f'\vee g')=(\mu\chi\psi k)h.$$

Volgens def.3^c bestaat er dan een morphisme ρ met $\rho f=\mu\chi\psi k$.
Er volgt: $\mu\chi\psi k\varphi = \rho f\varphi = \rho f\varphi' = \mu\chi\psi k\varphi'$, zodat $\psi k\varphi \neq \psi k\varphi'$: tegenspraak.
Als $\chi^* \neq \tau_2$, dan volgt

$$g' = \tau_2 s \neq \chi^* s = \chi\psi\beta(f' \vee g') = \chi\psi k h,$$

zodat $g' \neq h$: tegenspraak.



4. <u>Bewijs van 5.5.</u>

Stel Im $h \in \mathfrak{a}$, en zij $\mathfrak{b}$ de filter, voortgebracht door $\{h^{-}(f) : f \in \mathfrak{a}\} \subset J_X^*$.

<u>Bewering 1.</u> $f' \in \mathfrak{b} \Longrightarrow \mathrm{Im}\,(f'h) \in \mathfrak{a}$.

<u>Bewijs</u>:

Er is een $g \in \mathfrak{a}$ zodat $f' \geqslant g' := h^{-}(g)$ (definitie van $\mathcal{B}$). Zij λ het morphisme zodat $g'h = \lambda g$. Daar $g \dagger h$ is $g \wedge h = k \neq 0$; er zijn k', k'' zodat $k'g = k = k''h$. Dan volgt uit def. 3^c: er is een ρ met $\rho g' = k''$.

Het diagram blijft commutatief, i.e. $k' = \rho\lambda$, want

$k'g = k''h = \rho g'h = \rho\lambda g$, en g is een injectie.

Verder is

$g'h = \lambda g \downarrow \rho\lambda g = k'g = k$.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[rr, "g"] & & {} \\
& 0 \arrow[ul, "k'"'] \arrow[ur, "k"] \arrow[dl, "\rho"] \arrow[dr, "k''"'] & \\
{} \arrow[uu, "\lambda"] \arrow[rr, "g'"'] & & {} \arrow[uu, "h"']
\end{tikzcd}$$

Uit $f' \geqslant g'$, i.e. $f' \downarrow g'$, volgt nu

$$\mathrm{Im}(f'h) \downarrow f'h \downarrow g'h \downarrow k = h \wedge g \downarrow \mathrm{Im}(h \wedge g) = \mathrm{Im}h \wedge \mathrm{Im}g = \mathrm{Im}\, h \wedge g \in \mathfrak{a},$$

en dus

$$\mathrm{Im}(f'h) \in \mathfrak{a} .$$

<u>Bewering 2</u>: De verzameling van alle filters, die $\mathcal{B}$ bevatten en aan $(*)$ voldoen, is inductief geordend door de inclusie-relatie.

<u>Bewijs</u>:

Als $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ een lineair geordende verzameling filters $\supset \mathcal{B}$ is, en alle $\mathcal{L}_\alpha$ voldoen aan $(*)$, dan is $\mathcal{L} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{L}_\alpha$ weer een filter $\supset \mathcal{B}$. En $\mathcal{L}$ voldoet weer aan $(*)$, want $f' \in \mathcal{L} \Longrightarrow f' \in \mathcal{L}_\alpha$ voor zekere $\alpha \Longrightarrow \mathrm{Im}(f'h) \in \mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{L}$.

<u>Gevolg</u>: de in bewering 2 genoemde verzameling heeft een maximaal element $\mathcal{L}$ (lemma van Zorn).

Bewering 3: een dergelijk maximaal element $\mathcal{L}$ heeft de eigenschap

$$g' \in J_X \quad \& \quad \forall f' \in \mathcal{L} : \mathrm{Im}((f' \wedge g')h) \in \mathfrak{a} \implies g' \in \mathcal{L} .$$

Bewijs:

Stel $g' \in J_X$ en $\forall f' \in \mathcal{L} : \mathrm{Im}((f' \wedge g')h) \in \mathfrak{a}$. Zij $\mathcal{L}^*$ de filter, voortgebracht door $\mathcal{L} \vee \{g'\}$.

Dan voldoet $\mathcal{L}^*$ aan (*): als $k' \in \mathcal{L}^*$, dan $k' \geqslant g' \wedge f'$ voor zekere $f' \in \mathcal{L}$; dan is

$$\mathrm{Im}(k'h) \downarrow k'h \downarrow (g' \wedge f')h \downarrow \mathrm{Im}((g' \wedge f')h) \in \mathfrak{a} ,$$

dus

$$\mathrm{Im}(k'h) \in \mathfrak{a} .$$

Daar $\mathcal{L}$ maximaal was (t.o.v. de eigenschap (*)), volgt $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$, d.w.z. $g' \in \mathcal{L}$.

Verder als in het artikel.

-.-.-.-.-