STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1961- 14/12

Eine Mordell'sche Methode in der Geometrie der Zahlen

C.G. Lekkerkerker

Sonderabdruck aus
Journal für die reine und angewandte Mathematik
206(1961), p 20-25

1961

Journal für die reine und angewandte Mathematik
Herausgegeben von **Helmut Hasse** und **Hans Rohrbach**
Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin W 30

Sonderabdruck aus Band 206, Heft 1/2. 1961. Seite 20 bis 25

Eine Mordell'sche Methode in der Geometrie der Zahlen.

Von C. G. Lekkerkerker in Amsterdam.

Eine Mordell'sche Methode in der Geometrie der Zahlen.

Von *C. G. Lekkerkerker* in Amsterdam.

1. Wie Mordell [5] gezeigt hat, führt eine von Hermite [1] bei der Abschätzung des arithmetischen Minimums einer positiven quadratischen Form benutzte Methode zu der folgenden Ungleichung für die Hermite'sche Konstante γ_n:

$$\gamma_n \leqq \gamma_{n-1}^{(n-1)/(n-2)}. \tag{1}$$

In der Geometrie der Zahlen ist diese Methode auf eine Menge anderer Distanzfunktionen angewandt worden, besonders von Mordell [2, 3, 4, 5, 6], aber auch von Oppenheim [7, 8, 9], Mullender [10] und Armitage [11]. Dabei wird stets eine Beziehung vom Typ (1) zwischen den Minima einer Funktion in n Veränderlichen und einer damit zusammenhängenden Funktion in $n-1$ Veränderlichen hergeleitet. Meistens besitzen die zugehörigen Sternkörper eine große Gruppe von Automorphismen.

Bis jetzt liegt noch kein allgemeiner Satz vor, woraus man durch einfache Anwendung die Resultate der oben genannten Autoren erhält. Zwar hat Armitage [11] versucht, einen solchen Satz aufzustellen, aber seine diesbezügliche Aussage ist zu spezieller Art und außerdem nicht ohne weiteres richtig[1]). Ziel dieser Arbeit ist nun, einen Satz oder eigentlich zwei Sätze, von denen der zweite sich auf Sternkörper ohne Automorphismen bezieht, zu beweisen, die von der gewünschten Beschaffenheit sind. Diese Sätze sind dann als Verallgemeinerungen der Beziehung (1) anzusehen.

2. Im folgenden werden die folgenden Bezeichnungen benutzt: x, y, z, a, b, x^1, x^2, usw.: Punkte des Raumes R_n, auch betrachtet als Vektoren, insbesondere o der Nullpunkt;

- $|x|$: Länge des Vektors x;
- $x \cdot y$: inneres Produkt zweier Vektoren x, y;
- H: $(n-1)$-dimensionaler, linearer Unterraum von R_n;
- $H_z (z \neq o)$: der Unterraum H, der senkrecht auf z steht;
- $u, u^1, u^2, \ldots$: Punkte mit ganzen Koordinaten;
- Υ: das Gitter der Punkte mit ganzen Koordinaten;
- Λ: Gitter $A\Upsilon$ (A eine beliebige nicht-singuläre Transformation des Raumes);
- $F(x)$: Distanzfunktion, d. h. eine nichtnegative, stetige Funktion mit $F(\tau x) = |\tau| F(x)$ (τ reell, $x \in R_n$); die Punktmenge $S = \{x \mid F(x) \leqq 1\}$ ist ein *Sternkörper*.

Die Determinante eines Gitters $\Lambda = A\Upsilon$ wird gegeben durch $d(\Lambda) = |\det A|$, während die Spalten von A, sagen wir $a^1, a^2, \ldots, a^n$, eine Basis von Λ bilden; wir sprechen einfach von der Basis $A = \{a^1, a^2, \ldots, a^n\}$. Wir brauchen weiter die folgenden Begriffe:

[1]) Es fehlt eine Bedingung der Form 2^a (s. Bemerkung 2).

Polares Gitter Λ^* zu einem Gitter $\Lambda = AY$: das Gitter $\Lambda^* = A^*Y$, wo A^* die zu A transponiert inverse Matrix bedeutet; es besteht aus den Punkten y, für die $x \cdot y =$ ganze Zahl gilt für alle $x \in \Lambda$.

Minimum eines Sternkörpers S (oder der zugehörigen Distanzfunktion F) in bezug auf ein Gitter Λ:

(2) $$\lambda(S, \Lambda) = \lambda(F, \Lambda) = \inf_{x \in \Lambda,\, x \neq o} F(x).$$

Absolutes Minimum von S (oder F):

(3) $$\lambda(S) = \lambda(F) = \sup_{d(\Lambda)=1} \lambda(F, \Lambda) = \sup_{\Lambda} \lambda(F, \Lambda)\, d(\Lambda)^{-1/n}.$$

S wird ein Sternkörper endlichen Typs oder unendlichen Typs genannt, je nachdem $\lambda(S) > 0$ oder $\lambda(S) = 0$ ist. Für begrenzte Sternkörper ist immer $\lambda(S) > 0$.

Automorphismus Ω eines Sternkörpers S: lineare Transformation Ω des Raumes, für welche $\Omega S = S$ ist; ist S von endlichem Typ, dann ist notwendigerweise $\det \Omega = \pm 1$. Weiter ist F invariant bei der Transformation Ω.

Wir geben noch einige einfache Folgerungen der obigen Definitionen an. Es sei Λ ein Gitter und b ein primitiver Punkt des polaren Gitters Λ^*. Dann enthält der Unterraum H senkrecht auf b ein $(n-1)$-dimensionales Teilgitter L von Λ. Es sei $A = \{a^1, a^2, \ldots, a^n\}$ eine Basis von Λ mit $a^i \in L$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ und $B = A^* = \{b^1, b^2, \ldots, b^{n-1}, b = b^n\}$ die zugehörige Basis von Λ^* (so daß $a^i \cdot b^j = 0$ oder 1 ist, je nachdem $i \neq j$ oder $i = j$ ist). Insbesondere steht b^n senkrecht auf H. Weiter ist der Abstand von a^n zu H gleich $\dfrac{d(\Lambda)}{d(L)}$. Deshalb gilt

(I) $|\,b\,| = \dfrac{d(L)}{d(\Lambda)}$.

Aus den Definitionen (2) und (3) folgt unmittelbar

(II) *In* Λ *gibt es einen Punkt* $x \neq o$ *mit* $F(x) \leqq \lambda(F, \Lambda)$.

(III) *Für jedes Gitter* Λ *ist* $\lambda(F, \Lambda) \leqq \lambda(F)\, d(\Lambda)^{1/n}$.

Wir bemerken noch, daß $\lambda(S)$ mit der kritischen Determinante $\Delta(S)$ zusammenhängt mittels $\lambda(S) = \Delta(S)^{-1/n}$ und daß aus $\lambda(S) > 0$ nicht folgt, daß $\lambda(S \cap H) > 0$ ist für jeden $(n-1)$-dimensionalen Sternkörper der Form $S \cap H$.

3. Wir beweisen jetzt den folgenden

Satz 1. *Es sei* S *ein Sternkörper endlichen Typs und* Γ *eine Gruppe von Automorphismen* Ω *von* S *mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Normalen durch* o *auf die Hyperebenen* H *mit* $\lambda(S \cap H) = 0$ *liegen nicht überall dicht im Raum.*

2. *Zu allen* H *mit* $\lambda(S \cap H) > 0$ *gibt es einen Automorphismus* $\Omega_H \in \Gamma$ *der* H *in eine fest gegebene Hyperebene* $H_0 = \Omega_H H$ *überführt.*

3. *Aus* $\Omega \in \Gamma$ *folgt* $\Omega^* \in \Gamma$.

Dann gibt es einen Punkt b^0 *auf dem Rande von* S, *so daß der Vektor* b^0 *senkrecht auf* H_0 *steht, und es gilt*

(4) $$\lambda(S)^{n-2} \leqq \lambda(S \cap H_0)^{n-1}\,|\,b^0\,|.$$

Beweis. Es sei F die zu S gehörige Distanzfunktion und Λ ein beliebiges Gitter. Wir wollen $\lambda(S, \Lambda)$ abschätzen.

Es sei b irgendein primitiver Punkt von Λ^* und es seien der Unterraum H und das Teilgitter $L < \Lambda$ bestimmt wie früher. Aus der Definition (2) folgt unmittelbar

$$\lambda(S, \Lambda) \leqq \lambda(S \cap H, L).$$

Wir dürfen also annehmen, daß $\lambda(S \frown H) > 0$ ist, weil sonst wegen (III) sicherlich $\lambda(S, \Lambda) = \lambda(S \frown H, L) = 0$ wäre. Dann gibt es einen Automorphismus Ω_H mit $\Omega_H H = H_0$. Dabei ist trivialerweise $\lambda(S \frown H, L) = \lambda(S \frown \Omega_H H, \Omega_H L) = \lambda(S \frown H_0, \Omega_H L)$. Wir setzen nun

$$b^* = \Omega_H^* b.$$

Dann steht b^* senkrecht auf H_0, und es ist $F(b^*) = F(b)$ wegen 3. Weiter ist $\Omega_H^* \Lambda^*$ polar zu $\Omega_H \Lambda$. Wenden wir (III) an auf das $(n-1)$-dimensionale Gitter $\Omega_H L$ und (I) auf den Punkt $b^* \in \Omega_H^* \Lambda^*$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}(5)\qquad \lambda(S, \Lambda) &\leqq \lambda(S \frown H_0, \Omega_H L) \leqq \lambda(S \frown H_0)\, d(\Omega_H L)^{1/(n-1)} \\ &= \lambda(S \frown H_0)\, \{|\, b^* \,|\, d(\Omega_H \Lambda)\}^{1/(n-1)} = \lambda(S \frown H_0)\, \{|\, b^* \,|\, d(\Lambda)\}^{1/(n-1)}.\end{aligned}$$

Wichtig ist jetzt, daß $F(b^*) > 0$ ist. Das sieht man so ein. Der Punkt b^* ist verschieden von o und liegt auf einer festen Geraden (senkrecht auf H_0). Wäre nun $F(b^*) = 0$, dann wäre wegen der Bedingung 2 auch $F(z) = 0$ für jeden Punkt $z \neq o$ mit $\lambda(S \frown H_z) > 0$. Wegen 1 enthielte dann $S = \{z \mid F(z) \leqq 1\}$ einen gewissen unbegrenzten Kegel, in Widerspruch zur Voraussetzung, daß S von endlichem Typ ist. Daher muß $F(b^*) > 0$ sein.

Hieraus folgt bereits die Existenz eines Punktes $b^0 = \alpha b^*$ (α reell) mit $F(b^0) = 1$. Offenbar ist $|\, b^* \,| = F(b^*)\, |\, b^0 \,| = F(b)\, |\, b^0 \,|$. Daraus folgt, daß die Abschätzung (5) möglichst gut ist, wenn wir am Anfang den Punkt $b \in \Lambda^*$ so wählen, daß $F(b)$ möglichst klein ist. Nun können wir wegen (II) dafür sorgen, daß $F(b) \leqq \lambda(F, \Lambda^*)$ wird. Wenden wir dann (III) auf $\lambda(F, \Lambda^*)$ an und beachten, daß $d(\Lambda^*) = d(\Lambda)^{-1}$ ist, dann erhalten wir aus (5)

$$\begin{aligned}\lambda(S, \Lambda) &\leqq \lambda(S \frown H_0)\, \{\lambda(F, \Lambda^*)\, |\, b^0 \,|\, d(\Lambda)\}^{1/(n-1)} \\ &\leqq \lambda(S \frown H_0)\, \{\lambda(S)\, |\, b^0 \,|\}^{1/(n-1)} d(\Lambda)^{1/n}.\end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für jedes Gitter Λ gilt, haben wir also

$$\lambda(S) \leqq \lambda(S \frown H_0)\, \{\lambda(S)\, |\, b^0 \,|\}^{1/(n-1)}.$$

Damit haben wir (4) bewiesen.

Wir fügen obenstehendem Satz die folgenden Bemerkungen hinzu.

Bemerkung 1. Man kann Überlegungen derselben Art anstellen, wenn in der Bedingung 1 statt H_0 die Existenz endlich vieler Hyperebenen $H_1, H_2, \ldots, H_r$ gefordert wird, derart, daß jede Hyperebene H mit $\lambda(S \frown H) > 0$ durch einen geeigneten Automorphismus Ω in eine der Hyperebenen H_ϱ übergeführt werden kann. Sind $b^1, b^2, \ldots, b^r$ die zugehörigen Punkte auf dem Rande von S, dann bekommt man an Stelle von (4) die Abschätzung

$$(6)\qquad \lambda(S)^{n-2} \leqq \max_{\varrho = 1, 2, \ldots, r} \{\lambda(S \frown H_\varrho)^{n-1}\, |\, b^\varrho \,|\}.$$

Bemerkung 2. Für die Anwendungen ist es zweckmäßig, die Bedingung 2 durch die beiden folgenden zu ersetzen:

2^a. Für alle Punkte $z \neq o$ mit $F(z) = 0$ ist $\lambda(S \frown H_z) = 0$.

2^b. Jeder Punkt z mit $F(z) > 0$ wird durch einen geeigneten Automorphismus $\Omega \in \Gamma$ in einen Punkt αb^ϱ übergeführt, wobei α reell und b^ϱ einer von endlich vielen gegebenen Punkten auf dem Rande von S ist.

Man kann dann die Bedingung 1 fallen lassen.

Bemerkung 3. Weiter ist es bequem, die Durchschnitte $S \cap H_\varrho$ auf eine geeignete Koordinatenebene zu projizieren. Bekommt man dabei Körper $S_{n-1,\varrho}$ und ist β_ϱ die Koordinate von b^ϱ in bezug auf die betreffende Koordinatenebene $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$, dann hat man

$$(7) \qquad \lambda(S \cap H_\varrho)^{n-1} \mid b^\varrho \mid = \lambda(S_{n-1,\varrho}) \mid \beta_\varrho \mid \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

Nach diesen Bemerkungen können wir Satz 1 kurz so aussprechen.

Satz 1'. *S sei ein Sternkörper endlichen Typs, mit einer Distanzfunktion F und einer Gruppe Γ von Automorphismen. Es gelten die Bedingungen 2^a, 2^b und 3 und es seien die H_ϱ und β_ϱ definiert wie oben. Dann gilt*

$$(8) \qquad \lambda(S)^{n-2} \leqq \operatorname*{Max}_{\varrho = 1,2,\ldots,r} \{\lambda(S_{n-1,\varrho})^{n-1} \mid \beta_\varrho \mid\}.$$

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall, in dem wir keine Voraussetzungen bezüglich der Automorphismen von S machen. Es zeigt sich, daß man eine gewisse Verallgemeinerung von (4) angeben kann, obwohl das Ergebnis im allgemeinen weniger schön und brauchbar ist. Wir führen die folgende Funktion ein:

$$(9) \qquad G(z) = \{\lambda(S \cap H_z)\}^{n-1} \mid z \mid \qquad (z \neq o), \; G(o) = 0.$$

Ist diese Funktion stetig, dann ist sie eine Distanzfunktion (in n Veränderlichen). Wir beweisen nun

Satz 2. *Es gilt*

$$(10) \qquad \lambda(S)^{n-1} \leqq \lambda(G).$$

Beweis. Es mögen Λ, b, H, L dieselbe Bedeutung haben wie im Beweis von Satz 1. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\lambda(S, \Lambda)^{n-1} &\leqq \{\lambda(S \cap H, L)\}^{n-1} \leqq \lambda(S \cap H)^{n-1} d(L) \\ &= \lambda(S \cap H)^{n-1} \mid b \mid d(\Lambda) = G(b)\, d(\Lambda).\end{aligned}$$

Bei geeigneter Wahl von b ist

$$G(b) \leqq \lambda(G, \Lambda^*) \leqq \lambda(G)\, d(\Lambda^*)^{1/n} = \lambda(G)\, d(\Lambda)^{-1/n}.$$

Wir haben also

$$\lambda(S, \Lambda) \leqq \lambda(G)^{1/(n-1)} d(\Lambda)^{1/n}.$$

Daraus folgt (10), weil Λ beliebig ist.

4. Wir wollen jetzt kurz andeuten, wie die in der Literatur bereits bekannten Ergebnisse aus den obigen Sätzen gewonnen werden können. Wir geben die Koordinaten eines Punktes $x \in R_n$ mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ an.

$$\text{I.} \qquad F_1(x) = \{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2\}^{1/2}.$$

Dann ist $\lambda(F)$ nichts anderes als $\gamma_n^{1/2}$. Satz 1 liefert gerade die Beziehung (1). Siehe Mordell [5] und Oppenheim [8].

$$\text{II.} \quad F_2(x) = \{(x_1)^2 + \cdots + (x_p)^2 - (x_{p+1})^2 - \cdots - (x_n)^2\}^{1/2} \qquad (1 \leqq p \leqq n-1).$$

Wir schreiben jetzt $\lambda(F) = \gamma_{p,q}^{1/2}$ $(q = n - p)$. Die Automorphismen von F sind bekannt und die Bedingungen 2^a, 2^b, 3 können leicht verifiziert werden mit $r = 2$, $b^1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $b^2 = (0, \ldots, 0, 1)$.

Wir erhalten dann (siehe Oppenheim [7, 9], Cassels [12]):

$$(11) \qquad \gamma_{p,q} \leqq \{\operatorname{Max}(\gamma_{p-1,q}, \gamma_{p,q-1})\}^{(n-1)/(n-2)} \qquad (p + q = n).$$

III. $$F_3(x) = |\, x_1 x_2 x_3 \,|^{1/3} \qquad (n = 3).$$

Die Automorphismen werden gegeben durch $x_i = \tau_i x_i'$ $(i = 1, 2, 3)$, $\Pi \tau_i = \pm 1$. Satz 1′, mit $r = 1$ und $b^1 = (1, 1, 1)$ liefert

$$\lambda(F) \leqq \lambda(S_2)^2,$$

wobei $S_2 = \{x \mid |\, x_1 x_2 (x_1 + x_2) \,| \leqq 1\}$ ist. Das führt zum bereits scharfen Ergebnis $\lambda(F) = 7^{-1/3}$ (Mordell [3]).

IV. $$F_4(x) = \{|\, x_1 \,| \, ((x_2)^2 + (x_3)^2)\}^{1/3}.$$

Hier findet man ebenso $\lambda(F) = \dfrac{2}{\sqrt{23}}$ (Mordell [3]).

V. $$F_3(x) = |\, x_1 x_2 \cdots x_n \,|^{1/n}.$$

Satz 1′ liefert $\lambda(F) \leqq \lambda(S_{n-1})^{(n-1)/(n-2)}$, wobei S_{n-1} gegeben wird durch

$$|\, x_1 x_2 \cdots x_{n-1} (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) \,| \leqq 1 \qquad \text{(Mordell [2, 4])}.$$

VI. Ist $F_2(x)$ gegeben wie unter II, dann ist $S = \{x \mid 0 < F_2(x) \leqq 1\}$ zwar kein Sternkörper, aber die Überlegungen der vorigen Nummer bleiben gültig, besonders wenn $p = q$ ist (Cassels [12]).

Soweit haben wir nur Anwendungen von Satz 1 bzw. 1′ angegeben. Es gibt auch Anwendungen von Satz 2.

VII. Ein Ergebnis von Mullender [10] bezüglich der simultanen Approximation zweier reeller Zahlen kann betrachtet werden als eine Anwendung von Satz 2 mit

$$F_5(x) = \{|\, x_1 \,| \cdot \operatorname{Max}\, ((x_2)^2,\ (x_3)^2)\}^{1/3}.$$

Wir schreiben $z = (z_1, z_2, z_3)$. Die Hauptschwierigkeit ist dann, eine möglichst gute Abschätzung für das absolute Minimum λ_z des zweidimensionalen Gebietes

$$|\, z_2 x_2 + z_3 x_3 \,| \cdot \operatorname{Max}\, ((x_2)^2,\ (x_3)^2) \leqq |\, z_1 \,|$$

zu bekommen. Die Größe λ_z hängt mit der Funktion $G(z)$ mittels der Beziehung $G(z) = \lambda_z^2 |\, z \,|$ zusammen. Wir gehen auf die Einzelheiten nicht näher ein.

VIII. $$F_6(x) = |\, (x_1)^3 + (x_2)^3 + (x_3)^3 \,|^{1/3} \quad \text{(Mordell [6])}.$$

Man findet hier $G(z) = \lambda(\Phi_z)^2$, wobei

$$\Phi_z = \Phi_z(x_1, x_2) = \{(x_1 z_3)^3 + (x_2 z_3)^3 - (x_1 z_1 + x_2 z_2)^3\}^{1/3}$$

ist. Dann wird $G(z)$ ein gewisses Polynom sechsten Grades in z_1, z_2, z_3; Abschätzung von $\lambda(G)$ führt zu einer Abschätzung von $\lambda(F_6)$.

Schließlich sei bemerkt, daß mit der obigen Liste die wichtigeren Beispiele zu den beiden Sätzen gegeben, aber daß damit die Anwendungsmöglichkeiten nicht erschöpft sind. Beispiele von Funktionen, auf die Satz 1 angewandt werden kann, sind u. a. $x_1 x_2 ((x_3)^2 + (x_4)^2)$, $((x_1)^2 + (x_2)^2)\, ((x_3)^2 + (x_4)^2)$. Vergleiche auch Armitage [11].

Literatur.

[1] *Ch. Hermite*, Première lettre à M. Jacobi, Oeuvres I, p. 100—121.
[2] *L. J. Mordell*, The product of homogeneous linear forms, J. London Math. Soc. **16** (1941), 4—12.
[3] *L. J. Mordell*, The product of three homogeneous linear ternary forms, J. London Math. Soc. **17** (1942), 107—115.
[4] *L. J. Mordell*, The product of n homogeneous forms, Mat. Sbornik **12** (1943), 273—276.
[5] *L. J. Mordell*, Observation on the minimum of a positive definite quadratic form in eight variables, J. London Math. Soc. **19** (1944), 3—6.
[6] *L. J. Mordell*, On the minimum of a ternary cubic form, J. London Math. Soc. **19** (1944), 6—12.
[7] *A. Oppenheim*, The minima of indefinite quaternary quadratic forms, Proc. National Acad. USA **15** (1929), 724—727.
[8] *A. Oppenheim*, Remark on the minimum of quadratic forms, J. London Math. Soc. **21** (1946), 251—252.
[9] *A. Oppenheim*, Values of quadratic forms. I., Quarterly J. Math. (2) **4** (1953), 54—59.
[10] *P. Mullender*, Simultaneous approximation, Ann. of Math. **52** (1950), 417—426.
[11] *J. V. Armitage*, On a method of Mordell in the geometry of numbers, Mathematika **2** (1955), 132—140.
[12] *J. W. S. Cassels*, An introduction to the geometry of numbers, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959, pp. 268—279.

Eingegangen 4. Oktober 1960.