STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-015

Over afgeleiden en differenties

"Actualiteiten"

H.D. Kloosterman

1948

Over afgeleiden en differenties.

(Voordracht van H.D. Kloosterman in de serie Actualiteiten, 25 Sept. 1948).

Opmerking. Alle getallen en functiewaarden in het volgende zijn reëel (alhoewel sommige der stellingen ook wel voor complexe waarden doorgaan).

§ 1. De eenvoudigste stelling, waarin afgeleiden en differenties voorkomen is wel de middelwaardestelling.

(1) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(\xi) \qquad (\xi \text{ in } (x,x+h)).$$

Verder het volgende bijzondere geval van de formule van Taylor:

(2) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\tfrac{1}{2}hf''(\xi) \qquad (\xi \text{ in } (x,x+h)).$$

Ter illustratie van de wijze, waarop we in het volgende formules van dit type zullen gebruiken zij b.v. de volgende eenvoudige stelling vermeld.

Stelling 1. Zij $f(x)$ minstens twee maal differentieerbaar voor $x \geq A > 0$ en zij

(3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=l \qquad , \ |f''(x)|<\frac{K}{x} \quad ,$$

waar K een van x onafhankelijke constante is. Dan is

(4) $$\lim_{x\to\infty} f'(x)=l$$

Bewijs (Kloosterman 1,2). Na vervanging van $f(x)$ door $f(x)-lx$ blijkt, dat we ons tot het geval $l=0$ kunnen beperken. Indien $x \geq x_0(\varepsilon)$ is, volgt dan uit het gegevene en (2), dat voor iedere $h>0$ geldt:

$$|f'(x)| \leq \frac{\varepsilon(x+h)+\varepsilon x}{h}+\tfrac{1}{2}h\cdot\frac{K}{x}$$

Kiest men $h=x\sqrt{\varepsilon}$, dan wordt dit:

$$|f'(x)|<2\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon+\tfrac{1}{2}K\sqrt{\varepsilon}$$

waaruit (4) volgt.

Algemener kan ook de formule (2) worden gebruikt, om een schatting voor $f'(x)$ te vinden, als schattingen voor $f(x)$ en $f''(x)$ bekend zijn.

§ 2. Het is instructief, om stelling 1 te vergelijken met een analogon waarbij de "continue" variabele x vervangen is door een "discrete" variabele n, die alleen maar gehele of gehele positieve waarden aanneemt.

Stelling 2 (Hardy). Als de reeks $a_1+a_2+\dots\dots$ Cesaro-sommeerbaar (C,1) is en als

$$|a_n|<\frac{K}{n}$$

(waar K een van n onafhankelijke constante is), dan is de reeks convergent.

Bewijs (Kloosterman 1,2). We vormen een discreet analogon van de formule (2). Als S_n (n = 1,2,...) de partiële sommen van de reeks zijn en

$$S_n^{(1)}=S_1+S_2+\dots\dots+S_n\,,$$

dan is (h geheel >0)

$$\frac{S^{(1)}_{n+h}-S^{(1)}_n}{h}=\frac{S_{n+1}+\dots\dots+S_{n+h}}{h}=S_n+\frac{1}{h}\sum_{\nu=1}^{h}(S_{n+\nu}-S_n)$$

$$=S_n+\frac{1}{h}\left(h\,a_{n+1}+(h-1)a_{n+2}+\dots+1.\,a_{n+h}\right)$$

en dus

$$\frac{S^{(1)}_{n+h}-S^{(1)}_n}{h}=S_n+\tfrac{1}{2}(h+1)\,a(\xi) \tag{5}$$

waar

$$\underset{1\leq\nu\leq h}{\mathrm{Min.}}\,a_{n+\nu}\leqq a(\xi)\leqq\underset{1\leq\nu\leq h}{\mathrm{Max.}}\,a_{n+\nu}$$

(de notatie $a(\xi)$ is gebruikt om de analogie met de formule (2) te doen uitkomen).

Is nu de reeks Cesaro-sommeerbaar (C,1) met som 0 (het algemene geval kan hiertoe worden teruggebracht, evenals in het bewijs van stelling 1), dan is voor $n\geqq n_0(\varepsilon)$ voldaan aan

$$|S_n^{(1)}|<\varepsilon n$$

en dus volgens (5):

$$|S_n|\leqq\frac{\varepsilon(n+h)+\varepsilon n}{h}+\tfrac{1}{2}(h+1).\frac{K}{n}$$

Kiest men b.v. $h=[n\sqrt{\varepsilon}]$, dan volgt hieruit, dat de reeks convergent met som 0 is.

§ 3. "Eénzijdige" stellingen. Zoals bekend (Landau) blijven de stellingen 1 en 2 juist, als men de condities

$$|f''(x)|<\frac{K}{x}\qquad\text{en}\qquad|a_n|<\frac{K}{n}$$

vervangt door

$$f''(x)<\frac{K}{x}\quad\text{en}\quad a_n<\frac{K}{n}\qquad\text{of door}\quad f''(x)>-\frac{K}{x}\quad\text{en}\quad a_n>-\frac{K}{n}$$

Het bewijs verloopt op dezelfde wijze door in de formules (2) en (5) ook gebruik te maken van negatieve waarden van h.

§ 4. Van alle in het volgende aangegeven stellingen voor "continue" veranderlijken bestaan analoga voor "discrete" veranderlijken, evenzo als stelling 2 een "discrete vertaling" van stelling 1 is. Eenvoudigheidshalve beperken we ons echter in hoofdzaak tot "continue" veranderlijken.

§ 5. We zullen de bovenstaande beschouwingen uitbreiden, door in plaats van de formule (2) meer algemene formules tot uitgangspunt te nemen.

Men heeft een uitbreiding van (2), als men de algemene formule van Taylor neemt, waarin ook hogere afgeleiden optreden. We zullen echter een algemenere formule beschouwen, waarbij in plaats van de "eerste differentie" in het linkerlid hogere differenties optreden. Deze zijn gedefinieerd door

$$\Delta_h^1 f(x) = \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \quad , \Delta_h^2 f(x) = \Delta_h \Delta_h f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \text{ enz.,}$$

algemeen

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{\mu=0}^{r} (-1)^{r-\mu} \binom{r}{\mu} f(x+\mu h)$$

In plaats van (2) krijgt men nu de formule:

$$(6) \qquad \frac{\Delta_h^r f(x)}{h^r} = f^{(r)}(x) + P_1(r) h f^{(r+1)}(x) + \cdots\cdots + P_{k-1}(r) h^{k-1} f^{(r+k-1)}(x) + P_k(r) h^k f^{(r+k)}(\xi)$$

(met r en k geheel ≥ 1 en ξ in $(x, x+rh)$), waarin de P de coëfficiënten zijn in de ontwikkeling

$$(7) \qquad \left(\frac{e^t-1}{t}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(r) t^n$$

Dit zijn veeltermen in r met positieve coefficienten, die samenhangen met de z.g. polynomen van Stirling. Zie b.v. Nielsen 1 en 2.

Bewijs (voor de geldigheid van (6) is de existentie der $(r+k)$-de afgeleide in $(x, x+rh)$ voldoende, maar in het volgende bewijs is iets meer ondersteld). Volgens Taylor is

$$\Delta_h^r f(x) = \int_0^h \cdots \int_0^h f^{(r)}(x+\tau_1+\cdots\cdots+\tau_r)\, d\tau_1 \cdots\cdots d\tau_r =$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(r+n)}(x)}{n!} \int_0^h \cdots\cdots \int_0^h (\tau_1+\cdots\cdots+\tau_r)^n\, d\tau_1 \cdots\cdots d\tau_r +$$

$$+ \frac{1}{(k-1)!} \int_0^h \cdots\cdots \int_0^h d\tau_1 \cdots\cdots d\tau_r \int_0^{\tau_1+\cdots+\tau_r} (\tau_1+\cdots\cdots+\tau_r-\tau)^{k-1} f^{(k+r)}(x+\tau)\, d\tau$$

Daar

$$\frac{1}{n!} \int_0^h \cdots \int_0^h (\tau_1+\cdots\cdots+\tau_r)^n\, d\tau_1 \cdots d\tau_r = h^{n+r} P_n(r)$$

is, volgt hieruit de bewering gemakkelijk met behulp van de eerste middelwaardestelling der integraalrekening.

Gaat men nu, in plaats van ~~van~~ formule (2) uit van de formule (6) met $k=1$ (Kloosterman 2,), dan krijgt men in plaats van stelling 1 (we vermelden nu ineens een "éénzijdige" stelling):

Stelling 3. Zij $f(x)$ minstens $r+1$ maal differentieerbaar voor $x \geqq A > 0$ en zij

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^r} = l, \qquad f^{(r+1)}(x) > -\frac{K}{x}$$

Dan is

$$\lim_{x\to\infty} f^{(r)}(x) = r!\,l$$

Het analogon hiervan voor discrete variabelen (zie Kloosterman 1), Ward) is de bekende stelling, dat uit Cesaro-sommeerbaarheid (C,r) en $a_n > -\frac{K}{n}$ de convergentie van de reeks $\sum a_n$ volgt (stelling 3 levert ook onmiddellijk het analogon hiervan voor Riesz-sommeerbaarheid). De bewijzen van deze stellingen, die men op deze wijze vindt, zijn aanmerkelijk eenvoudiger dan de vroeger bekende bewijzen, doordat ze meer aan de aard der stellingen zijn aangepast en berusten op eenvoudige algemene principes.

§6. In (6) komen behalve de functie f nog $k+1$ afgeleiden van f voor. Men kan een formule vinden, waarin behalve f zelf nog slechts twee afgeleiden van f voorkomen. Daartoe schrijve men de formule (6) ook nog op voor de $(r+1)$-ste, $(r+2)$-de,...... $(r+k-1)$-de differentie, daarbij al deze formules afbrekende bij de $(r+k)$-de afgeleide. Uit de k relaties, die men verkrijgt, kunnen $f^{(r+1)}(x)$, $f^{(r+2)}(x)$,......... $f^{(r+k-1)}(x)$ geelimineerd worden. Deze eliminatie gebeurt als volgt. Als $Q_\nu(r)$ de coefficient is in de ontwikkeling

$$\left(\frac{\log(1+t)}{t}\right)^r = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(r)\,t^\nu ,$$

dan zijn de $Q_\nu(r)$ polynomen van graad ν in r, terwijl $(-1)^\nu Q_\nu(r)$ niet-negatieve coefficienten heeft. Verder geldt

$$\sum_{\nu=0}^{k} Q_\nu(r) P_{k-\nu}(r+\nu) = 1 \quad \text{of } 0, \text{ naarmate } k=0 \text{ of } k = 1,2.....$$

Uit (6) volgt dan

$$(8) \quad \sum_{\nu=0}^{k-1} Q_\nu(r) h^\nu \frac{\Delta_h^{r+\nu} f(x)}{h^{r+\nu}} = f^{(r)}(x) + h^k \sum_{\nu=0}^{k-1} Q_\nu(r) P_{k-\nu}(r+\nu) f^{(r+k)}(\xi_\nu),$$

waar k en r geheel $\geqq 1$ ondersteld zijn, $h \neq 0$ is en de ξ_ν in $(x, x+(r+k-1)h)$ liggen.

Uit deze formule kan men b.v. afleiden (op dezelfde wijze als stelling 1 volgt uit (2)):

<u>Stelling 4</u>. Als $f(x)$ minstens $(r+k)$ maal differentieerbaar is voor $x \geq A > 0$ en

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^r} = l \qquad , \left| f^{(r+k)}(x) \right| < \frac{K}{x^k} \quad ,$$

dan is

$$\lim_{x\to\infty} f^{(r)}(x) = r!\, l$$

(r en k geheel ≥ 1).

Ook kan men uit (8) natuurlijk schattingen vinden voor $f^{(r)}(x)$ als er schattingen voor $f(x)$ en $f^{(r+k)}(x)$ gegeven zijn (zie hierachter § 8). Uit (8) kan men echter geen "éénzijdige" stellingen afleiden, doordat de $\varphi_\nu(r)$ niet alle positief zijn. Waren de $\varphi_\nu(r)$ alle positief, dan zou men in (8) met behulp van een bekende stelling van Darboux (dat een afgeleide iedere waarde tussen zijn maximum en minimum aanneemt) kunnen concluderen tot

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} \varphi_\nu(r) P_{k-\nu}(r+\nu) f^{(r+k)}(\xi_\nu) = f^{(r+k)}(\xi) \sum_{\nu=0}^{k-1} \varphi_\nu(r) P_{k-\nu}(r+\nu) = -\varphi_k(r) f^{(r+k)}(\xi)$$

met een ξ in $(x, x+(r+k-1)h)$. Daardoor zou (8) worden:

$$f^{(r)}(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \varphi_\nu(r) h^\nu \frac{\Delta_h^{r+\nu} f(x)}{h^{r+\nu}} + \varphi_k(r) h^k f^{(r+k)}(\xi) \tag{9}$$

Deze formule blijkt echter toch juist te zijn. Voor het bewijs moet men dan echter niet van (6) uitgaan. Men kan gebruik maken van volledige inductie t.o.v. r . Het uitgangspunt $r=1$ dezer volledige inductie is daarbij het moeilijkste. Men kan uitgaan van de gemakkelijk te bewijzen formule

$$\sum_{\mu=1}^{k} \frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu} \Delta_h^\mu f(x) = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu} \binom{k}{\mu} \left(f(x+\mu h) - f(x) \right),$$

die ook geschreven kan worden in de gedaante

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} \varphi_\nu(1) h^\nu \frac{\Delta_h^{\nu+1} f(x)}{h^{\nu+1}} = \sum_{\mu=1}^{k} (-1)^{\mu-1} \binom{k}{\mu} \frac{f(x+\mu h) - f(x)}{\mu h} \tag{10}$$

Hierin schrijve men

$$f(x+h\mu) - f(x) = \int_0^{\mu h} f'(x+\tau)\, d\tau$$

en volgens Taylor:

$$f'(x+\tau) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\tau^m}{m!} f^{(m+1)}(x) + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\tau f^{(k+1)}(x+y)(\tau-y)^{k-1}\, dy$$

Door gebruik te maken van de formule

$$\sum_{\mu=1}^{k}(-1)^{\mu-1}\binom{k}{\mu}\mu^{n}=0 \qquad (n=1,2,\ldots,k-1)$$

volgt dan uit (10) na het verwisselen van sommatie- en integratie-volgorde

$$(11)\quad \sum_{\nu=1}^{k-1} Q_\nu(1)\, h^\nu \frac{\Delta_h^{\nu+1} f(x)}{h^{\nu+1}} = f'(x) + \frac{(-1)^k}{h.k!}\int_0^{kh} f^{(k+1)}(x+y)\sum_{\frac{y}{h}<\mu\le k}\frac{(-1)^{k-\mu}}{\mu}\binom{k}{\mu}(\mu h-y)^k\,dy$$

Men kan hier nu de eerste middelwaardestelling der integraalrekening toepassen, als men kan aantonen, dat

$$(12)\qquad \alpha_k=\sum_{\frac{y}{h}<\mu\le k}\frac{(-1)^{k-\mu}}{\mu}\binom{k}{\mu}(\mu h-y)^k \geqq 0 \qquad (h>0;\ k \text{ geheel} \geqq 1;\ y\geqq 0)$$

is. Hiertoe kan men weer volledige inductie, nu t.o.v. k toepassen. Voor $k=1$ is het triviaal. Verder geeft een eenvoudige berekening,

$$\alpha_{k+1}-y\alpha_k=\frac{(k+1)h-y}{k+1}\,h^k\sum_{\frac{y}{h}<\mu\le k+1}(-1)^{k+1-\mu}\binom{k+1}{\mu}\left(\mu-\frac{y}{h}\right)^k$$

En daar men $y \leqq kh$ mag onderstellen, zal (12) bewezen zijn, als men kan aantonen, dat het rechterlid van (13) niet-negatief is. Dat dit inderdaad het geval is, volgt uit de formule

$$(14)\quad \underset{\tau_1+\tau_2+\cdots\tau_{k+1}\geqq\tau}{\int_0^1\cdots\cdots\int_0^1}(\tau_1+\tau_2+\cdots\cdots+\tau_{k+1}-\tau)^{x-1}\,d\tau_1\cdots d\tau_{k+1}=\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+k+1)}\sum_{\tau} \leftarrow \quad k+1-\mu/k+1$$

(k geheel $\geqq 0$; $x>0$; $\tau\geqq 0$) als men hierin τ door $\frac{y}{h}$ vervangt en x tot nul laat naderen. De formule (14) kan gemakkelijk door volledig inductie naar k worden bewezen. Overigens kan men het niet-negatief zijn van het rechterlid van (13) ook gemakkelijk direct door volledig inductie naar k (en zonder gebruik te maken van (14)) bewijzen.

Daarmee heeft men (9) voor $z=1$ bewezen. De stap van z op $z+1$ (en daarmee het algemene bewijs van (9)) levert nu geen moeilijkheid meer op, als men gebruik maakt van de formule

$$Q_\nu(z+1)=\sum_{\lambda=0}^{\nu}Q_\lambda(z)\,Q_{\nu-\lambda}(1)$$

§ 7. De stellingen van § 6 hebben alle een "discreet" analogon. Met (9) correspondeert de formule

$$(15)\qquad S_n^{(-n)}=\sum_{\nu=0}^{k-1}q_\nu(z)\,\Delta_h^{\nu+z}S_m^{(0)}+q_k(z)\,h^{k+z}S^{(-k-z)}(\xi)$$

Hierin zijn k, z, n, h geheel; $n>k+z$; $h>0$; de $q_\nu(z)$ zijn de coeffi-

cienten

in de ontwikkeling

$$\left(\frac{1-(1+t)^{-1/h}}{t}\right)^{r} = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu(r)\, t^\nu$$

$S_m^{(0)}$ is een rij reële getallen, terwijl $S_m^{(-1)} = S_m^{(0)} - S_{m-1}^{(0)}$, $S_m^{(-2)} = S_m^{(0)} - 2S_{m-1}^{(0)} + S_{m-2}^{(0)}$ enz. differenties zijn, die thans de plaats der afgeleiden innemen. Tenslotte is $S^{(-k-r)}(\xi)$ een getal, dat ligt tussen het maximum en minimum van $S_{m+\nu}^{(-k-r)}$ voor $1 \leq \nu \leq (k+r-1)h$. Deze notatie is gekozen om de analogie met (9) beter te doen uitkomen.

De formule (15) blijft (evenals (9)) met enkele kleine wijzigingen ook geldig voor negatieve h.

Het bewijs van (15) verloopt op dezelfde wijze als dat van (9). In de plaats van de formule van Taylor treedt een elementaire identiteit, die als een "discreet" analogon van de formule van Taylor moet worden beschouwd en waarbij in plaats van machten van h binomiaalcoefficienten treden. In plaats van (12) treedt de ongelijkheid,

$$(16) \qquad \sum_{\frac{\nu}{h} \leq \mu \leq k} \frac{(-1)^\mu}{\mu h + 1} \binom{k}{\mu} \binom{\mu h - \nu + k}{k} \geq 0 ,$$

die ook op soortgelijke wijze als (12) kan worden bewezen. Een fraaier bewijs van (16) is mij onlangs door de Bruijn meegedeeld.

§ 8. Toepassingen. De formules (9) en (10) hebben toepassingen van verschillende aard, waarvan enkele hier zullen worden vermeld.

Zij b.v. $f(x)$ eeneen voldoend aantal malen differentieerbare functie op $[-1,+1]$ en zij

$$M_t = \operatorname{Max.} |f^{(t)}(x)| \qquad \text{voor } -1 \leq x \leq +1$$

Met een geschikte keuze van h (men kiest h zo groot mogelijk, daarbij zorg dragende, dat men binnen het interval $[-1,+1]$ blijft) volgt gemakkelijk uit (9), dat

$$(17) \qquad \begin{aligned} M_r &\leq 2^{k+1} e^{r+k} M_0^{1-\frac{r}{r+k}} M_{r+k}^{\frac{r}{r+k}} && \text{als } M_{r+k} \geq (2r+2k)^{r+k} M_0 ; \\ &\leq 2^{r+k+1} e^{r+k} M_0 \cdot (k+r)^r && \text{als } M_{r+k} < (2r+2k)^{r+k} M_0 \end{aligned}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de ongelijkheid

$$(18) \qquad |q_\nu(r)| \leq e^{\nu+r}$$

die gemakkelijk door volledige inductie kan worden bewezen. De ongelijkheden (17) drukken ongeveer uit, dat $\log M_t$ een convexe functie van t is.

Scherpere en ook algemenere ongelijkheden dan (17) zijn bekend:

Gorny bewees ongelijkheden van het type (17) met in plaats van $2^{k+1}e^{r+k}$ en $2^{r+k+1}e^{r+k}$ veel kleinere constanten.

M.Riesz bewees een ongelijkheid van het type (17) ook voor afgeleiden van niet-gehele orde.

L.S.Bosanquet bewees met behulp van deze stelling van Riesz Tauberschе stellingen (ook "eenzijdige") voor Cesaro- en Riesz-sommeerbaarheid van gehele en gebroken orde, door de stelling van Riesz te combineren met de hierboven uiteengezette methode, die geleid heeft tot het bewijs van stelling 3.

A.L.Dixon en W.L. Ferrar gaven een "discreet" analogon van de zo juist vermelde stelling van Riesz.

Voor verschillende toepassingen zijn echter de minder scherpe ongelijkheden (17) voldoende. Voor het bewijs van (17) behoeft men overigens ook niet van (9) gebruik te maken, doch kan men volstaan met de wel zeer elementaire formule (8).

Een andere toepassing van (9) is

Stelling 5. Laten p en q geheel ≥ 1 zijn; $g(x)$ reëel en minstens $p+2q$ maal differentieerbaar op $[-1,+1]$. Stel op dit interval is $|g(x)| \leq M$, $g^{(p+2q)}(x) \leq 0$. Dan is

$$g^{(p)}(x) \leq (2e)^{p+2q}(p+2q-1)^{p} M$$

Bewijs. Met p en $2q$ in plaats van r en k volgt uit (9) (daar $Q_k(p)$ voor $k=2q$ positief is), dat

(19) $$g^{(p)}(x) \leq \sum_{\nu=0}^{2q-1} Q_\nu(p)\, h^{-p} \Delta_h^{\nu+p}\, g(x)$$

waarbij h zo gekozen moet worden, dat het interval $[x, x+(p+2q-1)h]$ geheel binnen $[-1,+1]$ ligt. Hieraan is voldaan, als men $h = \pm\frac{1}{p+2q-1}$ kiest, naarmate $-1 \leq x \leq 0$ of $0 < x \leq 1$ is. Met behulp van (18) volgt dan uit (19), dat

$$g^{(p)}(x) \leq (p+2q-1)^{p} M \sum_{\nu=0}^{2q-1} 2^{\nu+p} e^{\nu+p},$$

waaruit stelling 5 onmiddellijk volgt.

Stelling 5 is (met de veel mindere goede constante $30e^{30e+1}$ in plaats van $2e$) bewezen door Boas en Polya, waarbij ze behalve de boven vermelde scherpe resultaten van Gorny nog vier andere hulpstellingen gebruiken. Hierbij kan bovendien nog worden opgemerkt, dat men voor het bewijs van stelling 5 de formule (9) niet eens in zijn volle omvang nodig heeft, doch dat men kan volstaan met een minder scherpe formule, die kan worden bewezen zonder gebruik te maken van de ongelijkheid (12) (daar het echter een "eenzijdige" stelling betreft, kan men niet met (8) volstaan). Stelling 5 vormt voor Boas en Polya het belangrijkste hulpmiddel voor het bewijs van een uitbreiding van de volgende stelling van Widder:

Als $f(x)$ op het interval $[-1,+1]$ afgeleiden van iedere orde bezit en op dit interval is $(-1)^n f^{(2n)}(x) \geq 0$ voor $n = 0,1,2,\ldots$, dan is $f(x)$ een gehele functie van het exponentiële type (d.w.z. er zijn constanten B en C zó dat $|f^{(n)}(x)| \leq BC^n$).

Om hun stelling af te leiden uit stelling 5 maken Boas en Polya nog eens opnieuw gebruik van de scherpe ongelijkheden van Gorny. In plaats hiervan kan men echter ook de veel eenvoudiger ongelijkheden (17) gebruiken en men verkrijgt daardoor wel een zeer sterk vereenvoudigd bewijs van de stelling van Boas en Polya.

Ook van de "discrete" formule (15) kan men verschillende toepassingen maken, o.a. voor het bewijs van Tauberscher stellingen van een bepaald type voor Cesaro-sommeerbaarheid, waarop hier echter niet verder wordt ingegaan.

Ik wil hier besluiten met de opmerking, dat de bovenstaande beschouwingen mij ook tot een (zij het ook nog vaag) vermoeden hebben gebracht, dat de vele z.g. Tauberscher stellingen, zoals zij tot op heden in de litteratuur zijn voorgekomen, niet meer dan zeer bijzondere gevallen zijn van veel algemenere en meer fundamentele waarheden. Het is niet uitgesloten, dat de recente onderzoekingen van o.a. Beurling en Godement hierop een nieuw licht zullen doen vallen.

Litteratuur.

A. Beurling. Un théorème sur les fonctions bornées et uniformément continues sur l'axe réel. Acta Math. 77, 127-136 (1945).

R.P. Boas en G. Polya. Influence of the signs of the derivatives of a function on its analytic character. Duke Math. Journal 9, 406-424 (1942).

L.S. Bosanquet. Note on convexity theorems. Journal London Math. Soc. 18, 239-248 (1943).

A.L. Dixon en W.L. Ferrar. Journal London Math. Soc. 7, 87-93 (1932).

R. Godement. Théorèmes taubériens et théorie spectrale. Annales Sc. de l'Ecole Norm. Sup. (3) 64, 119-138 (1948).

A. Gorny. Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle. Acta Math. 71, 317-358 (1939).

G.H. Hardy. Theorems relating to the convergence and summability of slowly oscillating series. Proc. London Math. Soc. (2) 8, 301-320 (1909).

H.D. Kloosterman 1. Over de omkering van enkele limietstellingen. Mathematica 8, 1-11 (1939).

2. On the convergence of series summable (C,r) and on the magnitude of the derivatives of a function of a real variable. Journal London Math. Soc. 15, 91-96 (1940).

E. Landau. Ueber die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer. Prace Matematyczno fizyczne 21, 97-177 (1910).

N. Nielsen. 1. Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig 1906.
2. Recherches sur les polynomes et les nombres de Stirling. Annali di Matematica 9, 287-318 (1904).

M. Riesz. Sur un théorème de la moyenne et ses applications. Acta Univ. Hungaricae Szeged 1, 114-126 (1923).

A.J. Ward. A remark on Kloosterman's paper "On the convergence of series summable (C,r)". Journal London Math.Soc. 16, 81-82 (1941).

D.V. Widder. Functions whose even derivatives have a prescribed sign. Proc. National Acad. of Sc. 26, 657-659 (1940).