STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 015

Berekening van een integraal

H.J.A. Duparc en C.G. Lekkerkerker

1951

Berekening van een integraal.

H.J.A. Duparc en C.G. Lekkerkerker.

Zij gevraagd te berekenen de integraal:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it\zeta}\, dt}{(1-2ait)^{\frac{k}{2}}(1-2bit)^{\frac{\ell}{2}}} \qquad (0<\zeta<\infty;\ a,b\neq 0;\ a<b;$$
k, ℓ natuurlyke getallen).

We onderstellen voorlopig: $k, \ell = 3$. De subtitutie $t \longrightarrow it$ levert :

$$I = -i\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{t\zeta}\, dt}{(1+2at)^{\frac{k}{2}}(1+2bt)^{\frac{\ell}{2}}}.$$

Allereerst is:

$$\int_0^{\infty} e^{-s\zeta}\zeta^{\alpha-1}\, d\zeta = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}} \qquad (\mathrm{Re}\ s>0)$$

dus $\dfrac{1}{(1+2at)^{\frac{k}{2}}} = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(1+2at)\zeta}\zeta^{\frac{k}{2}-1}\, d\zeta$ (t zuiver imaginair)

$$= \frac{(2a)^{-\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})}\int_0^{\infty} e^{-t\zeta} e^{-\frac{\zeta}{2a}}\zeta^{\frac{k}{2}-1}\, d\zeta.$$

We stellen $\varphi(t) = \dfrac{1}{(1+2at)^{\frac{k}{2}}}$; $\psi(t) = \dfrac{1}{(1+2bt)^{\frac{\ell}{2}}}$;

$$f(\zeta) = \frac{(2a)^{-\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} e^{-\frac{\zeta}{2a}}\zeta^{\frac{k}{2}-1}\ ;\ g(\zeta) = \frac{(2b)^{-\frac{\ell}{2}}}{\Gamma(\frac{\ell}{2})} e^{-\frac{\zeta}{2b}}\zeta^{\frac{\ell}{2}-1}$$

dan is $\varphi(t)$ de Laplace-getransformeerde van $f(\zeta)$.
Evenzo is $\psi(t)$ de Laplace-getransformeerde van $g(\zeta)$.
Inversie-die hier zeker geoorloofd is-levert:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\zeta t}\varphi(t)\, dt\ ;\ g(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\zeta t}\varphi(t)\, dt.$$

We berekenen nu de gevraagde integraal m.b.v. de convolutie van de functies $f(\zeta)$ en $g(\zeta)$; zie D.V. Widder, Laplace Transform, p. 91-92. Er geldt

$$\varphi(t)\psi(t) = \int_0^{\infty} e^{-t\zeta} h(\zeta)\, d\zeta \quad \text{met} \quad h(\zeta) = \int_0^{\zeta} f(x) g(\zeta - x)\, dx.$$

Uit deze formule volgt:

$$h(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\zeta t}\varphi(t)\psi(t)\,dt,$$

dus

$$\mathcal{J}=\frac{1}{i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\zeta t}\varphi(t)\psi(t)\,dt = 2\pi h(\zeta)$$

$$=2\pi\frac{(2a)^{-\frac{k}{2}}(2b)^{-\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})\,\Gamma(\frac{l}{2})}\int_0^{\zeta} e^{-\frac{x}{2a}-\frac{\zeta-x}{2b}}\, x^{\frac{k}{2}-1}(\zeta-x)^{\frac{l}{2}-1}\,dx.$$

Substitutie van $z=\zeta u$ levert:

$$\mathcal{J}=A\int_0^1 e^{cu}\,u^{\frac{k}{2}-1}(1-u)^{\frac{l}{2}-1}\,du$$

met

$$A=2\pi\frac{(2a)^{-\frac{k}{2}}(2b)^{-\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})\,\Gamma(\frac{l}{2})}\,e^{-\frac{\zeta}{2b}}\,\zeta^{\frac{k}{2}+\frac{l}{2}-1}, \quad c=\zeta\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2a}\right).$$

Het gaat dus om de berekening van $\int_0^1 e^{cu}u^{\frac{k}{2}-1}(1-u)^{\frac{l}{2}-1}\,du$

Ontwikkeling van e^{cu} geeft

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(cu)^n}{n!}u^{\frac{k}{2}-1}(1-u)^{\frac{l}{2}-1}\,du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}\int_0^1 u^{n+\frac{k}{2}-1}(1-u)^{\frac{l}{2}-1}\,du$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}B\left(n+\frac{k}{2},\frac{l}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}\frac{\Gamma(n+\frac{k}{2})\Gamma(\frac{l}{2})}{\Gamma(n+\frac{k}{2}+\frac{l}{2})}.$$

Nu wordt in Whittaker-Watson, Modern Analysis de volgende confluente hypergeometrische functie ingevoerd (2^e ed. p. 332):

$$M_{\lambda,\mu}(x)=x^{\frac{1}{2}+\mu}e^{-\frac{1}{2}x}\left\{1+\frac{\frac{1}{2}+\mu-\lambda}{1.(2\mu+1)}x+\frac{(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)(\frac{3}{2}+\mu-\lambda)}{2!(2\mu+1)(2\mu+2)}x^2+\dots\right\}$$

$$=x^{\frac{1}{2}+\mu}e^{-\frac{1}{2}x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}+\mu-\lambda)\Gamma(2\mu+1)}{n!\,\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)\Gamma(2\mu+n+1)}x^n=\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)}x^{\frac{1}{2}+\mu}e^{-\frac{1}{2}x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}+\mu-\lambda)}{n!\,\Gamma(n+2\mu+1)}x^n.$$

In ons geval is:

$$\frac{k}{2}=\frac{1}{2}+\mu-\lambda;\quad \frac{k}{2}+\frac{l}{2}=1+2\mu;\quad c=x$$

Dus $\mu=\dfrac{k+l-2}{4};\quad \lambda=\dfrac{l-k}{4};$

$$\mathcal{J}=\frac{A\,\Gamma(\frac{l}{2})\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k+l}{2})}\,c^{-\frac{k+l}{4}}\,e^{\frac{c}{2}}\,M_{\frac{l-k}{4},\frac{k+l-2}{4}}(c)$$

$$=\frac{\pi\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\frac{k+l}{4}-1}e^{-\frac{\zeta}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}}{a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{l}{2}}\,\Gamma(\frac{k+l}{2})\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)^{\frac{k+l}{4}}}\,M_{\frac{l-k}{4},\frac{k+l-2}{4}}\left(\frac{\zeta}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right).$$

In het geval $k=\ell$ is de integraal uit te drukken als een Besselfunctie met zuiver imaginair argument, en wel m.b.v. de formule (vergelijk Whittaker–Watson) 2^e ed. p. 352

$$J_\mu(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2^{2\mu+\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{2}(\mu+\frac{1}{2})\pi i}\, \Gamma(\mu+1)} M_{0,\mu}(2ix).$$

We vinden dan:

$$x = \frac{\zeta}{4i}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right);\quad x^{-\frac{1}{2}} = \left\{\frac{\zeta}{4}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}};\quad \mu = \frac{k-1}{2};$$

$$e^{\frac{1}{2}(\mu+\frac{1}{2})\pi i} = e^{\frac{k}{4}\pi i},$$

dus dan is

$$J = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\pi\, 2^{k-1}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}} e^{-\frac{\zeta}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}}{(ab)^{\frac{k}{2}}\,(k-1)!\,\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)^{\frac{k-1}{2}}}\, e^{(k-1)\frac{\pi i}{4}}\, J_{\mu=\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\zeta}{4i}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right),$$

$$= \frac{\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}} e^{-\frac{\zeta}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}}{\sqrt{ab}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)(a-b)^{\frac{k-1}{2}}}\, e^{(k-1)\frac{\pi i}{4}}\, J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\zeta}{4i}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right),$$

waarbij gebruik gemaakt is van de verdubbelings formule der Γ – functie

Uiteindelijk vinden wij dan voor het geval $k=\ell$

$$J = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{ab}}\,\frac{e^{-\frac{\zeta}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(\frac{\zeta}{2(b-a)}\right)^{\frac{k-1}{2}} I_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\zeta}{4}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right).$$