STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1952 - 015

Over de oplossing van een stelsel bilineaire vergelijkingen

W. Peremans

1952

Rapport Z.W. 1952-015

Over de oplossing van een stelsel bilineaire vergelijkingen

door

W. Peremans

Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{lll}(1) & \sum_{j=1}^{n} a_{jk}x_jy_k = u_k & k = 1,\dots,m \\ (2) & \sum_{k=1}^{m} a_{jk}x_jy_k = v_j & j = 1,\dots,n\end{array}\right\}$$

met $a_{jk} > 0$, $u_k > 0$, $v_j > 0$, $\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{j=1}^{n} v_j$.

Gevraagd wordt te bewijzen dat als $x_1=1$ gesteld wordt, er één en slechts één stelsel $x_2,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_m$ met $x_j > 0$, $y_k > 0$ bestaat, dat aan de vergelijkingen voldoet.

Een willekeurige vergelijking uit het stelsel is overbodig, omdat de som van de linkerleden (resp. rechterleden) van (1) gelijk is aan de som van de linkerleden (resp. rechterleden) van (2).

Stellen wij nu direct $x_1=1$ en laten wij de eerste vergelijking van het stelsel (2) weg dan komt er:

$$\left.\begin{array}{ll}y_k\,(a_{1k} + \sum_{j=2}^{n} a_{jk}x_j) = u_k & k = 1,\dots,m \\ x_j \sum_{k=1}^{m} a_{jk}y_k = v_j & j = 2,\dots,n\end{array}\right\}.$$

We vervangen nu n-1 door n, nummeren de veranderlijken x nu $x_1,\dots,x_n$ en noemen $a_{1k}=b_k$. We moeten dan bewijzen dat er bij het stelsel vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{lll}(3) & y_k(b_k + \sum_{j=1}^{n} a_{jk}x_j) = u_k & k = 1,\dots,m \\ (4) & x_j \sum_{k=1}^{m} a_{jk}y_k = v_j & j = 1,\dots,n\end{array}\right\}$$

met $a_{jk} > 0$, $b_k > 0$, $u_k > 0$, $v_j > 0$, $\sum_{k=1}^{m} u_k > \sum_{j=1}^{n} v_j$ één en slechts één stelsel $x_1,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_m$ met $x_j > 0$, $y_k > 0$ bestaat, dat aan de vergelijkingen voldoet.

We passen volledige inductie naar n toe en bewijzen behalve de genoemde bewering bovendien, dat als een willekeurige der b_k

gevarieerd wordt, de x_j en y_k der oplossing continu van zo'n b_k afhangen en dat bovendien als een b_k toeneemt alle x_j toenemen en alle y_k afnemen.

Voor n=0 is de oplossing $y_k = \frac{u_k}{b_k}$ en alle beweringen zijn evident. Voor $n \geqslant 1$ nemen wij aan dat alle beweringen voor n-1 in plaats van n gelden. We nemen nu het stelsel

$$\left.\begin{array}{llr} (5) & y_k(b_k + a_{1k}x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{jk}x_j) = u_k & k = 1,\dots,m \\ (6) & x_j \sum_{k=1}^{m} a_{jk}y_k = v_j & j = 2,\dots,n \end{array}\right\}$$

dat uit het stelsel (3), (4) ontstaat door één vergelijking weg te laten. Kiest men nu $x_1 \geqslant 0$ willekeurig, dan ontstaat een stelsel vergelijkingen van de soort als (3), (4) met n-1 in plaats van n. Hier in vervult $b_k+a_{1k}x_1$ de rol van b_k. De bijvoorwaarden zijn ook vervuld. Volgens inductieveronderstelling is bij dit stelsel één en slechts één stelsel $x_2,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_m$ met $x_j > 0$, $y_k > 0$ te vinden dat eraan voldoet. Verder volgt door optelling der vergelijkingen (5) en (6) direct:

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{m} b_k y_k + x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{1k}y_k = \sum_{k=1}^{m} u_k - \sum_{j=2}^{n} v_j .$$

Laten we nu x_1 variëren en kiezen we $x_2,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_m$ als bijbehorende oplossing van (5), (6), dan zijn deze volgens inductieveronderstelling continue functies van $b_k+a_{1k}x_1$, dus van x_1 en dus is ook $x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{1k}y_k$ een continue functie van x_1. Verder nemen, als x_1, en dus $b_k+a_{1k}x_1$, toeneemt, volgens inductieveronderstelling alle y_k af en dus neemt, volgens (7), $x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{1k}y_k$ toe. Voor $x_1=0$ is $x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{1k}y_k=0$; voor $x \to +\infty$ geldt, wegens (5), $y_k \to 0$ en dus, wegens (7), $x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{1k}y_k \to \sum_{k=1}^{m} u_k - \sum_{j=2}^{n} v_j$. Omdat $0 < v_1 < \sum_{k=1}^{m} u_k - \sum_{j=2}^{n} v_j$, is er dus één en slechts één $x_1 > 0$ en een bijbehorende oplossing $x_2,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_m$ van (5) en (6) te vinden, zodat geldt:

$$(8) \qquad x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{1k}y_k = v_1 .$$

Echter vormen (5), (6) en (8) samen het stelsel (3), (4), zodat bewezen is dat dit stelsel één en slechts één oplossing $x_1,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_m$ met $x_j > 0$, $y_k > 0$ bezit.

Om te bewijzen dat bij toeneming van één der b_k alle x_j toenemen, en alle y_k afnemen, kunnen wij, zonder de algemeenheid te schaden, b_1 variëren. Laat $b_1 < b_1'$ zijn en laat bij b_1 de oplossing $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_m$ en bij b_1' de oplossing $x_1',\ldots,x_n'$, $y_1',\ldots,y_m'$ behoren. Bij b_1' en x_1 behoort verder de oplossing $x_2'',\ldots,x_n''$, $y_1'',\ldots,y_m''$ van (5) en (6) die echter niet aan (8) voldoet. Volgens inductieveronderstelling geldt, omdat

$b_1+a_{1k}x_1 < b_1'+a_{1k}x_1$, $x_j' < x_j''$ $(j = 2,\ldots,n)$ en $y_k' > y_k''$ en dus

$x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{1k}y_k'' < v_1$. Vergelijken wij nu de oplossingen $x_2',\ldots,x_n'$, $y_1',\ldots,y_m'$ en $x_2'',\ldots,x_n''$, $y_1'',\ldots,y_m''$ van (5) en (6) (resp. behorende bij b_1', x_1 en b_1', x_1') dan is omdat $x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{1k}y_k$ een monotoon

toenemende functie van x_1 is en omdat $x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{1k}y_k'' < v_1$ en

$x_1' \sum_{k=1}^{m} a_{1k}y_k' = v_1$ is, zeker $x_1 < x_1'$ en dus ook $x_j'' < x_j'$ $(j = 2,\ldots,n)$, $y_k'' > y_k'$. Hieruit volgt $x_j < x_j'$ $(j = 1,\ldots,n)$ en $y_k > y_k'$.

Ten slotte bewijzen wij dat van de oplossing $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_m$ alle x_j en y_k continue functies van een der b_k zijn. Zonder de algemeenheid te schaden mogen wij b_1 variëren. Laat bij de vast gekozen b_1 de oplossing $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_m$ behoren en bij de variabel gekozen b_1' de oplossing $x_1',\ldots,x_n'$, $y_1',\ldots,y_m'$. Voor iedere oplossing geldt, wegens (7), dat

$\sum_{k=1}^{m} b_k y_k = \sum_{k=1}^{m} u_k - \sum_{j=1}^{n} v_j$. Dus geldt:

$$\sum_{k=1}^{m} b_k y_k = b_1' y_1' + \sum_{k=2}^{m} b_k y_k',$$

dus

$$(9) \qquad (b_1-b_1')y_1 = b_1'(y_1'-y_1) + \sum_{k=2}^{m} b_k(y_k'-y_k).$$

Bij een $\varepsilon>0$ kiezen we nu $\delta = \min\left(\frac{b_1\varepsilon}{y_1+\varepsilon},\ldots,\frac{b_m\varepsilon}{y_1\varepsilon}, \tfrac{1}{2}b_1\right)$. Als dan b_1' zo gekozen is, dat $|b_1'-b_1| < \delta$, is het linkerlid van (9) in absolute waarde $< y_1\delta$. Wegens de reeds bewezen monotonie hebben alle termen van het rechterlid van (9) hetzelfde teken en zijn dus elk in absolute waarde ook $< y_1\delta$. Dit geeft:

$$|y_1'-y_1| < \frac{y_1\delta}{b_1'} < \frac{y_1\delta}{b_1-\delta} < \frac{\frac{b_1y_1\varepsilon}{y_1+\varepsilon}}{b_1 - \frac{b_1\varepsilon}{y_1+\varepsilon}} = \varepsilon$$

en voor $k = 2,\ldots,m$:

$$|y_k' - y_k| < \frac{y_1\delta}{b_k} < \frac{b_k y_1 \varepsilon}{b_k(y_1+\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Hiermee is de continuïteit der y_k bewezen. De continuïteit der x_j volgt dan direct uit (6).

Hiermede is het bewijs voltooid.