MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
AMSTERDAM (O.)



Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"
door
Prof.Dr H. Bremekamp
29 mei 1956

## REEKSONTWIKKELINGEN

Het onderwerp kan elementair worden genoemd, omdat het zonder dat de naam wordt genoemd al ter sprake komt op de lagere school, namelijk bij de repeterende breuken. Een oneindig voortlopende 10-delige breuk is immers een machtreeks naar machten van $\frac{1}{10}$. Wanneer men de verschillende herleidingen enz. die daar plegen te worden uitgevoerd nagaat en zich afvraagt, wat valt daar uit mathematisch oogpunt op aan te merken, dan kan het antwoord zijn: Er is niet gedefinieerd, wat onder een oneindig voortlopende 10-delige breuk te verstaan is. Terloops gaf ik daarvan al een definitie, daarna kan men de verschillende bewijzen gemakkelijk in orde maken. Nog iets meer voor de hand liggend is de definitie: de oneindig voortlopende tiendelige breuk is de limiet van de getallenrij, die men verkrijgt door achtereenvolgens 1,2,... decimalen op te schrijven. Dat die limiet bestaat, volgt daaruit dat we een monotoon stijgende getallenrij hebben, die niet onbepaald stijgt. Het is gemakkelijk in te zien, dat deze definitie en de vorige op het zelfde neerkomen. De repeterende breuken kan men ook als meetkundige reeksen opvatten.
Hebben we met meer algemene meetkundige reeksen te doen, dus $1+x+x^2+\ldots = \frac{1}{1-x}$, dan treedt de convergentievraag op de voorgrond. Deze dringt zich vanzelf op, als men, zoals men bij het onderwijs gewoonlijk begint, de reeks als gegeven beschouwt en de som vraagt. Bij reeks<u>ontwikkeling</u> heeft men met het omgekeerde vraagstuk te doen. Gegeven een functie, gevraagd een methode om de achtereenvolgende termen der ontwikkeling te vinden. Voor het geval $\frac{1}{1-x}$ kan men daartoe de deling uitvoeren. Gaat men van meer ingewikkelde algebraïsche breuken uit, dan komt men op deze wijze tot wederkerige reeksen.
Ook in andere gevallen zijn machtreeksen de meest voor de hand liggende ontwikkelingen. Stelt men zich op het standpunt, zoals in de achttiende eeuw gebruikelijk was, dat de mogelijkheid daarvan vanzelf spreekt, dan vindt men onder enige onderstellingen omtrent differentieerbaarheid enz. gemakkelijk de coefficienten. Dat voert tot de reeks van Taylor. Wij zullen die beschouwen in de vorm van Mac Laurin, ontwikkeling in de om-

geving van de oorsprong

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + - - - - - -$$

Het is duidelijk, dat deze formule geen zin heeft, als de reeks niet convergeert. Het kan echter voorkomen, dat de reeks convergeert en toch niet $f(x)$ voorstelt. Voorbeeld $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ voor $x \neq 0$, $f(x)=0$ voor $n=0$. De methode om de geldigheid der ontwikkeling te onderzoeken is welbekend. Wij nemen aan, dat $f(x)$ onbeperkt differentieerbaar is en trachten in de formule

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots . \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + R_n(x)$$

voor $R_n(x)$ een geschikte uitdrukking te vinden, namelijk zodanig dat we kunnen bewijzen $\lim_{n \to \infty} R_n(x)=0$. De meest bekende vorm is de zogenaamde restterm van Lagrange

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^n(\vartheta x), \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Deze is echter niet voldoende om b.v. de geldigheid der ontwikkeling van $(1-x)^k$ en $\ln(1-x)$ voor $0 < x < 1$ te bewijzen. Men kan dan de restterm van Cauchy gebruiken

$$R_n(x) = (1-\vartheta)^{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!} f^n(\vartheta x).$$

De gebruikelijke afleiding van deze formules is tamelijk gekunsteld. Ik bewijs als voorbeeld de laatste rij.

$$f(x) = f(y) + (x-y)\, f'(y) + \frac{(x-y)^2}{2!} f''(y) + \ldots + \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(y) + R_n(y)$$

dan is $R_n(x)=0$ en $R_n(0)=f(x)-f(0)-xf'(0)- \ldots . - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0)$ en
$R_n'(y) = -\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(y)$.

Passen wij nu de middelwaardestelling toe, die krachtens de ingevoerde onderstellingen geldt $\frac{R_n(x)-R_n(0)}{x} = R_n'(\vartheta x)$, dan vinden we

$$f(x)-f(0)-xf'(0)- \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) = \frac{x^n(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(\vartheta x).$$

Een andere afleiding, waarbij de opzet minder voor de hand ligt, maar die verder heel vlot verloopt, is de volgende

$$\int_0^x f'(x-y)dy = f(x)-f(0)=f'(0)x + \int_0^x f''(x-y)y\, dy = \ldots$$

$$+ xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) - \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f^n(x-y)y^{n-1}dy.$$

In de complexe functietheorie lopen de overeenkomstige bewijzen veel eenvoudiger. De daarbij in te voeren voorwaarde van complexe differentieerbaarheid in één punt (de oorsprong) is een zware eis, (ze heeft de onbeperkte complexe differentieerbaarheid in dat punt tot gevolg). Men kan natuurlijk ook daar de reeks bij de $n^{de}$ term afbreken en een restterm toevoegen, die men gemakkelijk door een contourintegraal kan voorstellen. Dat kan zijn nut hebben om de nauwkeurigheid der benadering te schatten, maar voor het bewijs van de mogelijkheid der ontwikkeling is het niet nodig. Ook bij het werken met reeksen met reële termen kan de restterm ook in de practische toepassingen goede diensten bewijzen om de fout te schatten, die men maakt als men bij een willekeurige term afbreekt. Soms kan men die eenvoudiger schatten. Een zeer bekende stelling is, dat bij alternerende reeksen met in absolute waarde monotoon dalende termen de fout steeds kleiner is dan de absolute waarde van de eerste verwaarloosde term (niet alleen bij machtreeksen). Dat geldt ook bij sommige ontwikkelingen, die tot divergente reeksen voeren. Wij komen hiermede op het gebied der asymptotische reeksen.

De oudst bekende asymptotische reeks is de reeks van Stirling voor $\ln \Gamma(x)$, grondig behandeld door Cauchy, maar lange tijd opgevat als een op zich zelf staand curiosum tot in 1886 Poincaré zijn theorie der asymptotische reeksen gaf naar aanleiding van zijn ontdekking, dat de reeksen die de astronomen sinds lang met succes in de storingstheorie gebruikten dat karakter hadden. In hetzelfde jaar publiceerde Stieltjes zijn verhandeling over deze reeksen, waarbij ze ontstaan als ontwikkeling van kettingbreuken. Het voorbeeld, dat ik wil behandelen komt ook bij Stieltjes voor. De integraallogarithme $\mathrm{li}(y)=\int_0^y \frac{du}{\ln u}$ .

Door de substitutie $y=e^{-x}$, $u=e^{-v}$ gaat dit over in

$$-\mathrm{li}(e^{-x})=\int_x^{\infty} \frac{e^{-v}}{v}\,dv. \qquad (x>0)$$

Door herhaald partieel integreren vinden we

$$-\mathrm{li}(e^{-x})=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\frac{3!}{x^4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right)+R_n(x),$$

waarbij

$$R_n(x)=(-1)^{n-1}\,n!\int_v^{\infty}\frac{e^{-v}}{v^{n+1}}\,dv, \text{ dus } |R_n|<\frac{n!e^{-x}}{x^{n+1}} .$$

De reeks tussen haakjes divergeert maar $|R_n|$ is kleiner dan de eerste weggelaten term en bij grote x kan die zeer klein worden.

In dit voorbeeld zochten we de waarde der beschouwde functie voor zeer grote waarden van x. Zo is het in de meeste toepassingen, waarbij we dan een ontwikkeling krijgen naar machten van $\frac{1}{x}$ . Een meer algemeen procédé om die ontwikkeling te vinden is als volgt.

Zij $\lim_{x\to\infty} f(x) = a_0$, $\lim_{x\to\infty} x(f(x)-a_0)=a_1$, $\lim_{x\to\infty} x^2(f(x)-a_0-\frac{a_1}{x})=a_2$ en zo voort. Zo komen we tot

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + R_n .$$

Als deze ontwikkeling slaagt, wat niet altijd het geval is - het kan wel zijn dat de ingevoerde limieten niet alle bestaan - kan men stellen $R_n = \frac{a_n+\varepsilon_n(x)}{x^n}$ met $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_n(x)=0$.
Daarbij blijkt ook, dat als de ontwikkeling mogelijk is, zij ook ondubbelzinnig bepaald is. Het omgekeerde geldt niet.
Twee verschillende functies $f(x)$ en $\varphi(x)$ kunnen wel dezelfde asymptotische ontwikkeling hebben. Dat is namelijk het geval, als in de ontwikkeling van $f(x)-\varphi(x)$ alle coefficienten 0 worden, zoals bv. als $f(x)-\varphi(x)=e^{-x}$, of $e^{-kx}$ voor $k>0$.
De kern van de theorie van Poincaré ligt in het bewijs, dat met asymptotische reeksen op voor de hand liggende wijze de hoofdbewerkingen kunnen worden uitgevoerd. Wat de optelling en aftrekking betreft ligt dat voor de hand. Ook voor de vermenigvuldiging is het bewijs vrij eenvoudig. Daaruit volgt ook de geldigheid der machtsverheffing en dan dat men in een polynoom in $f(x)$ de asymptotische ontwikkeling van $f(x)$ kan substitueren. Wij kunnen nog een stap verder gaan en de asymptotische ontwikkeling van $f(x)$ substitueren in een convergente machtreeks in $f(x)$. Zij

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} \cdots\cdots + \frac{a_n+\varepsilon_n(x)}{x^n}$$

en

$$\varphi(f) = c_0+c_1f+\cdots+c_pf^p+\cdots$$

een reeks, waarvan de convergentiestraal groter is dan $|a_0|$. $\varphi(f)$ bepaalt dan een zekere functie van x, $\Phi(x)$, waarvan de asymptotische ontwikkeling gevonden wordt door in $\varphi(f)$ de asympttotische ontwikkeling van f te substitueren. Het bewijs verkrijgt men door de zo bepaalde coefficienten achtereenvolgens te vergelijken met die welke door het bovengeschetste procédé gevonden worden. Men toont die overeenstemming ook aan zonder rekening door de opmerking, dat aan de gehele berekening niets verandert, als men de letters a zodanige waarden toekent, dat de reeks voor f convergeert. Dan vindt men ook voor $\Phi$ een (voor x groot genoeg) convergente reeks. Wij kunnen dit nu toepassen om ook de uitvoerbaarheid van de deling te bewijzen.
Wij willen nu het termsgewijs integreren beschouwen. Zij

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n+\varepsilon_n(x)}{x^n} \text{ met } \lim_{x\to\infty} \varepsilon_n(x)=0.$$

Wij zoeken een asymptotische ontwikkeling voor $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$. Beschouw daartoe vooreerst $\int_X^{\infty} \left\{ f(x)-a_0-\frac{a_1}{x}\right\} dx$.

$$\int_x^X \left\{ f(x)-a_0-\frac{a_1}{x}\right\} dx = \int_x^X \left(\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\,..\,\frac{a_n}{x^n}\right)dx + \int_x^X \frac{\varepsilon_n(x)}{x^n}\,dx\ .$$

Wij zoeken hiervan de limiet voor $X \longrightarrow \infty$. Zij $\mu_n^{\,x}$ de grootste waarde, die $|\varepsilon_n(x)|$ aanneemt voor waarden boven $x$, $\mu_n$ nadert dus tot 0, als x onbepaald toeneemt, en $\left|\int_x^X \frac{\varepsilon_n(x)}{x^n}\,dx\right| < \mu_n \int_x^X \frac{dx}{x^n}$. Wij vinden dus

$$\int_x^{\infty}\left\{ f(x)-a_0-\frac{a_1}{x}\right\} dx = \frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{2x^2}+\ldots+\frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{\eta_n}{x^{n-1}} \text{ met } \lim_{x\to\infty}\eta_n=0.$$

Om nu te komen tot $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ schrijven we

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x_0}^{x}\left\{ f(x)-a_0-\frac{a_1}{x}\right\} dx + a_0(x-x_0)+a_1\ln\frac{x}{x_0} =$$

$$\int_{x_0}^{\infty}\left\{ f(x)-a_0-\frac{a_1}{x}\right\} dx - \int_x^{\infty}\left\{ f(x)-a_0-\frac{a_1}{x}\right\} dx + a_0(x-x_0)+a_1\ln\frac{x}{x_0}\ .$$

De eerste integraal hangt niet van x af. Noemen we

$$\int_{x_0}^{\infty}\left\{ f(x)-a_0-\frac{a_1}{x}\right\} dx - a_0x_0-a_1\ln x_0=C,$$

dan vinden we

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = C + a_0x + a_1\ln x - \frac{a_2}{x} - \frac{a_3}{2x^2} - \ldots - \frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{\eta_n}{x^{n-1}}\ ,$$

waarmee de asymptotische ontwikkeling is verkregen. Het blijkt, dat ze door termsgewijs integreren wordt gevonden.

Met het differentieren is enige voorzichtigheid nodig. Wij weten namelijk niet, of de afgeleide een asymptotische ontwikkeling toelaat. Inderdaad is dat niet steeds het geval, voorbeeld $e^{-x}\sin(e^{x})$. Wel kunnen we beweren: Als de afgeleide $f'(x)$ een asymptotische ontwikkeling toelaat, dan kunnen wij die vinden door de asymptotische ontwikkeling van $f(x)$ termsgewijs te differentieren; immers de laatste moet gevonden kunnen worden door die van $f'(x)$ termsgewijs te integreren.

Wij beschikken nu over de hulpmiddelen voor een eerste onderzoek naar de oplossingen van differentiaalvergelijkingen, die een asymptotische ontwikkeling toelaten. Als we weten, dat die er zijn kunnen we ze met de methode der onbepaalde coefficienten vinden. Ik begin met een zeer eenvoudig voorbeeld

$$\frac{dy}{dx} + by - \frac{a}{x} = 0.$$

Substitueer $y=c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\ \ldots\ .$

Wij vinden $y = \frac{a}{bx} + \frac{a}{b^2x^2} + \frac{2!a}{b^3x^3} + \frac{3!a}{b^4x^4} + \dots$

De coefficienten zijn zo bepaald, dat in de asymptotische ontwikkeling van hetgeen het eerste lid wordt, als we daarin de gevonden y substitueren, alle coefficienten 0 zijn. Wij weten evenwel, dat daardoor nog niet verzekerd is, dat de functie dan identiek 0 is. Uit onze bewerking mogen we dus niet concluderen, dat de gevonden reeks de asymptotische ontwikkeling van een oplossing is. Het enige, dat wij kunnen beweren is, dat wanneer er een oplossing is, die een asymptotische ontwikkeling toelaat, de coefficienten geen andere kunnen zijn dan de hier gevondene. In dit eenvoudige geval kunnen we het ontbrekende gemakkelijk aanvullen. Wij kunnen de vergelijking namelijk met elementaire middelen oplossen en vinden $y = Ce^{-bx} + ae^{-bx}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{bx}}{x}\,dx$ en door asymptotische ontwikkeling van de integraal

$$y = Ce^{-bx} + \frac{a}{bx} + \frac{a}{b^n x^2} + \frac{2!a}{b^3x^3} + \dots$$

wat voor C=0 met de eerst gevondene overeenkomt.
Wat we in dit voorbeeld zien gaat in hoofdzaak algemeen door. In de theorie der asymptotische reeksen is over de som der reeks geen sprake. In een andere gedachtenkring bij het omgaan met divergente reeksen, stelt men zich juist voor aan de reeks door een geschikt gekozen definitie een som toe te kennen. Men zal er naar streven een zodanige definitie te geven, dat ze toegepast op een convergente reeks de gewone som oplevert.
De eenvoudigste definitie is die van Cesaro

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{s_0+s_1+\dots+s_n}{n} .$$

Een divergente reeks, voor welke deze limiet bestaat, noemt Cesaro enkelvoudig onbepaald en hij definieert de som van de reeks als S. Een eenvoudig voorbeeld is het beroemde twistpunt uit de achttiende eeuw

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \rightrightarrows \tfrac{1}{2} .$$

Andere voorbeelden $1 + \cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \dots \rightrightarrows \frac{1}{2}$

$\sin\vartheta + \sin 2\vartheta + \sin 2\vartheta + \dots \rightrightarrows \frac{1}{2}\,\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\vartheta.$

Het is gemakkelijk te bewijzen, dat deze definitie toegepast op een convergente reeks de gewone som oplevert. Immers als $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, kan men bij gegeven positieve $\varepsilon$ m zo bepalen, dat voor $n > m$, $|s-s_n| < \varepsilon$. Noemen we $s_n - s = \varepsilon_n$, dan is $s_0+s_1+\dots+s_n = s_0+s_1+\dots s_m+(n-m+1)s+\varepsilon_m+\varepsilon_{m+1}+\dots+\varepsilon_n$, dus

$$\left|\frac{s_0+s_1+\dots+s_n}{n} - s\right| < \left|\frac{s_0+s_1+\dots s_m}{n}\right| + \left|\frac{(m-1)s}{n}\right| + \frac{n-m+1}{n}\varepsilon ,$$

waaruit het beweerde blijkt.
Een interessante toepassing van deze definitie op sommige divergente Fourierreeksen is in 1904 gegeven door Fejer.
Wanneer $\sigma_n = \dfrac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n}$ niet tot een limiet nadert, is het mogelijk dat $\dfrac{\sigma_0+\sigma_1+\ldots\sigma_n}{n}$ tot een limiet nadert, dan kan men deze limiet als de som definieren en zo kan men doorgaan. Dat is de methode van Hölder.
Cesaro gaat enigszins anders te werk. Hij bepaalt een gemiddelde na eerst aan de termen $s_k$ gewichten te hebben toegekend.
Hij definieert $S = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g_n^{(r)}s_0+g_{n-1}^{(r)}\,s_1+\ldots+g_0^{(r)}s_n}{g_n^{(r)}+g_{n-1}^{(r)}+\ldots+g_0^{(r)}}$,

waarbij $g_0^{(r)}=1$, $g_1^{(r)}=r, \ldots g_k^{(r)}= \dfrac{r(r+1)\ldots(r+k-1)}{k!} \ldots g_n^{(r)}= \dfrac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{n!}$

Hieruit volgt $g_0^{(r)}+g_1^{(r)}+\ldots g_n^{(r)}=g_n^{(r+1)}$.
Men vindt, dat als bovenstaande limiet voor zekere r bestaat, dan bestaat ze ook voor r+1 (en dus voor alle volgende rangnummers). Als r de kleinste waarde is, waarvoor de limiet bestaat, noemt Cesaro de reeks r-voudig onbepaald. Later is de spreekwijze $C^r$ sommeerbaar in gebruik genomen.
Door Pringsheim is in 1916 bewezen, dat de definities van Hölder en van Cesaro elkaar volkomen dekken.
Als de reeks $\sum\limits_0^\infty u_n$ $C^r$ sommeerbaar is, dan is $\sum\limits_0^\infty u_n x^n$ convergent voor $|x| < 1$. Immers als $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g_n^{(r)}s_0+g_{n-1}^{(r)}s_1+\ldots+g_0^{r}s_n}{g_n^{(r)}+g_{n-1}^{(r)}+\ldots+g_0^{(r)}} = S$,

wat we zullen schrijven $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n^{(r)}}{g_n^{(r+1)}} = S$, dan zullen de reeksen $\sum S_n^{(r)}x^n$ en $\sum g_n^{(r+1)}x^n$ dezelfde convergentiestraal hebben en $\sum g_n^{(r+1)}x^n$ is niet anders dan de binomiaalreeks voor $(1-x)^{-(r+1)}$, deze convergentiestraal is dus 1. Verder is

$$\sum S_n^{(r)}x^n = \sum s_n x^n.(1-x)^{-r} = \sum u_n x^n (1-x)^{-r-1}, \text{ althans formeel}$$

dus $\sum u_n x^n = (1-x)^{r+1} \sum S_n^{(r)}x^n$, waaruit het beweerde volgt.
Verder hebben we $\lim\limits_{x\to 1} \sum u_n x^n = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sum S_n^{(r)}x^n}{\sum g_n^{(r+1)}x^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n^{(r)}}{g_n^{(r+1)}} = S$

een uitbreiding van de stelling van Abel.
De klasse der $C^{(r)}$ sommeerbare reeksen is tamelijk beperkt. Uit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n^{(r)}}{g^{(r+1)}} = S$ kan men afleiden $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n^r} = 0$.
De definitie van Borel kan in meer gevallen worden toegepast. Zij luidt

$$S = \int_0^\infty e^{-x}\,(u_0+u_1x+\frac{u_2}{2!}x^2+\ldots)dx,$$

als het tweede lid betekenis heeft. Borel stelt deze voor als een uitbreiding van de gemiddeldenmethode. Hij stelt eerst

$$S = \frac{a_0s_0+a_1s_1+a_2s_2+\dots}{a_0+a_1+a_2+\dots}$$

Hij neemt $a_n=c_n x^n$ en laat vervolgens x onbepaald toenemen. Hij verlangt, dat de reeksen en teller en noemer voor alle x convergeren, wegens de noemer moet dus $\sum c_n x^n$ een gehele functie voorstellen. Borel kiest $\sum c_n x^n=e^x$, dus $c_n=\frac{1}{n!}$. (Men krijgt generalisaties door in plaats van $e^x$ te kiezen $e^{x^k}$). Dus

$$S = \lim_{x\to\infty} e^{-x}(s_0+s_1x+\frac{1}{2!}s_2x^2+\dots)$$

Deze uitdrukking transformeert Borel nu, aannemende, dat de reeks $\sum u_n$ van dien aard is, dat de volgende herleidingen geldig zijn.

Zij $s_0+s_1x+\frac{s_2}{2!}x^2+\dots=s(x)$, dan is $s(0)=u_0$, dus

$$S-u_0=e^{-x}s(x)\Big|_0^\infty=\int_0^\infty \frac{d}{dx}\left\{e^{-x}s(x)\right\}dx.$$

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{-x}s(x)\right\}=e^{-x}\left\{s'(x)-s(x)\right\} \quad \text{en } s'(x)=s_1+s_2x+\frac{s_3}{2!}x^2+\dots$$

dus $s'(x)-s(x)=u_1+u_2x+\frac{3}{2!}x^2+\dots$

Noemen we dit $u_1(x)$ dan wordt

$$S-u_0=\int_0^\infty e^{-x}u_1(x)dx=\left[e^{-x}\int_0^x u_1(x)dx\right]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}\left(\int_0^x u_1(x)dx\right)dx.$$

Hierin valt de geintegreerde term weg en $\int_0^x u_1(x)dx=u_1x+\frac{u_2}{2!}x^2+\dots$

Schrijven we nu voor $u_0$ nog $\int_0^\infty e^{-x}u_0dx$, dan vinden we

$$S=\int_0^\infty e^{-x}(u_0+u_1x+\frac{u_2}{2!}x^2+\dots)dx,$$

de gestelde definitieformule. Borel voert voor de uitkomst het symbool $\int_0^\infty u_n$ in.

Men kan deze uitkomst ook afleiden uit een algemeen principe door Hardy geformuleerd (1903).

Het bewijs, dat deze definitie toegepast op een convergente reeks de gewone som oplevert is wat moeilijker dan bij de definitie van Cesaro.

Gegeven is dus $\sum u_n=s$, waaruit volgt $\sum\frac{u_n}{n!}x^n$ is voor alle waarden van x convergent. Te bewijzen $\int_0^\infty e^{-x}\sum_0^\infty\frac{u_n}{n!}x^n dx=s$.

Wij hebben

$$\int_0^G e^{-x}\sum_0^\infty\frac{u_n}{n!}x^n dx=\sum_0^\infty\frac{u_n}{n!}\int_0^G e^{-x}x^n dx$$

omdat een machtreeks uniform convergeert in ieder interval, dat geheel binnen het convergentieinterval ligt. Nu is

$$\int_0^G e^{-x}\, x^n dx = n! - \int_G^\infty e^{-x}\, x^n\, dx,$$

dus $\sum_0^\infty \frac{u_n}{n!}\int_0^G e^{-x}\, x^n dx = \sum_0^\infty u_n - \sum_0^\infty \frac{u_n}{n!}\int_G^\infty e^{-x}\, x^n\, dx = s - \sum_0^\infty u_n v_n,$

waarbij $v_n = \frac{1}{n!}\int_G^\infty e^{-x}\, x^n dx = \frac{e^{-G}}{n!}\,(G^n + nG^{n-1} + n(n-1)G^{n-2} + \ldots + n!G + n!) =$

$$e^{-G}\left(1 + G + \frac{G^2}{2!} + \ldots + \frac{G^n}{n!}\right),$$

waaruit blijkt, dat voor iedere positieve $G$, $v_n$ met $n$ monotoon stijgt en steeds $< 1$ is. Het gaat er nu om, te vinden, wat $\sum_0^\infty u_n v_n$ wordt als $G$ onbepaald toeneemt. Wij kunnen, bij willekeurige positieve $\varepsilon$, $m$ zo bepalen dat voor $n > m$ $|s - s_m| < \varepsilon$. We hebben dan

$$\sum_0^\infty u_n v_n = \sum_0^m u_n v_n + \sum_{m+1}^\infty u_n v_n = e^{-G}\sum_0^m u_n\left(1 + G + \frac{G^2}{2!} + \ldots + \frac{G^n}{n!}\right) + \sum_{m+1}^\infty u_n v_n.$$

De eerste term nadert tot 0, als $G$ onbepaald toeneemt. Op de laatste passen we een herleiding toe overeenkomend met de welbekende transformatie van Abel. Voor iedere $n > m$ is

$$\sum_{m+1}^n u_n v_n = (s_{m+1} - s_m)v_{m+1} + (s_{m+2} - s_{m+1})v_{m+2} + \ldots + (s_n - s_{n-1})v_n$$

$$= -s_m\, v_{m+1} - s_{m+1}(v_{m+2} - v_{m+1}) - \ldots \quad - s_{n-1}(v_n - v_{n-1}) + s_n v_n$$

en daar $v_{m+1}$, $v_{m+2} - v_{m+1}, \ldots, v_n - v_{n-1}$ alle positief zijn, vinden we als $g$ de grootste en $k$ de kleinste der grootheden $s_m$, $s_{m+1}, \ldots, s_n$ is

$$\sum_{m+1}^n u_n v_n < g v_n - k(v_{m+1} + v_{m+2} - v_{m+1} + \ldots + v_n - v_{n-1}) = (g-k)v_n .$$

Nu is $g < s + \varepsilon$ en $k > s - \varepsilon$, $0 < v_n < 1$, dus

$$\sum_{m+1}^n u_n v_n < 2\varepsilon .$$

Evenzo $\sum_{m+1}^n u_n v_n > -2\varepsilon$ en daar dit voor iedere $n$ geldt

$$\left|\sum_{m+1}^\infty u_n v_n\right| < 2\varepsilon .$$

Wij vinden dus inderdaad $\int_0^G e^{-x} \sum_0^\infty \frac{u_m}{n!}\, x^n dx = s.$

Ook hier hebben we een analogon van het theorema van Abel.

Zij $\sum_0^\infty u_n = s$ en beschouw $\sum_0^\infty u_n x^n = \int_0^\infty e^{-t} \sum_v^\infty \frac{u_n}{n!}\, x^n t^n dt = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x}\tau} \sum_0^\infty \frac{u_n}{n!}\, \tau^n d\tau.$

Zij $\frac{1}{x} = \xi+1$ dan is, voor $0<x<1$, $\xi$ positief en wij hebben

$$\sum_0^\infty u_n x^n = (1+\xi)\int_0^\infty e^{-\tau(1+\xi)} \sum_0^\infty \frac{u_n}{n!}\tau^n d\tau .$$

Gegeven is $\int_0^\infty e^{-\tau} \sum_0^\infty \frac{u_n}{n!}\tau^n d\tau = s$. Daar deze integraal bestaat is de integraal in de vorige formule uniform convergent in een interval dat het eindpunt $\xi=0$ bevat, dus

$$\lim_{x\to 1} \int_0^\infty u_n x^n = \lim_{\xi\to 0} (1+\xi)\int_0^\infty e^{-\tau(1+\xi)} \sum_0^\infty \frac{u_n}{n!}\tau^n \, d\tau = s.$$

Hieruit blijkt ook, dat als voor een reeks de Cesarosom en de Borelsom beide bestaan, dan zijn ze gelijk.
Borel noemt een reeks voor welke de integraal $\int_0^\infty e^{-x} u(x)$ betekenis heeft sommeerbaar. Voor de theorie is nog van belang het begrip absoluut sommeerbaar. Daarvoor wordt vereist, dat $\int_0^\infty e^{-x}|u(n)|dx$ en ook $\int_0^\infty e^{-x}|u'(x)|dx$ en $\int_0^\infty e^{-x}|u^{(\lambda)}(x)|dx$ voor alle $\lambda$ betekenis hebben. Wij kunnen hierbij nog opmerken, dat uit het bestaan van $\int_0^\infty e^{-x}|u'(x)|dx$ dat van $\int_0^\infty e^{-x}|u(x)|dx$ volgt maar niet omgekeerd.
Als voorbeelden van sommeerbare reeksen kunnen we dezelfde reeksen nemen voor welke we de Cesarosom berekend hebben

$$1-1+1-1+\ldots \to \int_0^\infty e^{-x}\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\ldots\right)dx = \int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \tfrac{1}{2}.$$

Om een eenvoudig voorbeeld te hebben, waarbij de Cesarosom niet bestaat nemen we voor x 1

$$1-x+x^2-x^3+\ldots \to \int_0^\infty e^{-t}\left(1-xt+\frac{x^2}{xt}\ldots\right)dt = \int_0^\infty e^{-t(1+x)}dt = \frac{1}{1+x} .$$

De reeks in dit voorbeeld is voor $-1<x\leq 1$ convergent, voor die waarden heeft de integraal van Borel dus ook betekenis en ook de waarde $\frac{1}{1+x}$.
Wij kunnen ook complexe waarden van x in onze beschouwing betrekken. Onze uitkomst geldt voor $\mathrm{Re}\, x > -1$. Wij kunnen dat ook zo uitdrukken. Voor de functie, die in de omgeving van de oorsprong wordt gegeven door de reeks $1-x+x^2-\ldots$ geeft de integraal van Borel voor die reeks de analytische voortzetting over het halfvlak $\mathrm{Re}\, x > -1$.
In dit voorbeeld levert dat dus niets nieuws, daar de eenvoudige voorstelling $\frac{1}{1+x}$ de analytische voortzetting over het gehele vlak geeft. In ingewikkelder gevallen kunnen we op deze wijze voor de bestudering van de functie gewichtige bijdragen verkrijgen. We kunnen nog opmerken, dat in ons voorbeeld de zaak vereenvoudigd werd doordat de beschouwde functie maar een singulier punt heeft. In het algemeen kan men bewijzen, dat als $\xi$ een singulier punt is van een functie die door een machtreeks in

de omgeving van de oorsprong (of een willekeurig punt) Q gegeven is de integraal van Borel toegepast op die reeks een analytische voortzetting geeft, die niet verder reikt dan de rechte in $\xi$ loodrecht op . Op die wijze vinden we voor een functie met een eindig aantal singuliere punten de analytische voortzetting over een gebied begrensd door rechte lijnen de sommeerbaarheidsveelhoek.

In het vorige hebben we als toepassing van de somdefinitie de analytische voortzetting van een functie gezocht. Men kan ook omgekeerd te werk gaan en de analytische voortzetting van de functie gebruiken om tot een somdefinitie voor een divergente reeks te komen. Zij $\sum u_n$ een divergente reeks, zodanig dat de reeks $\sum u_n x^n$ niet de convergentiestraal 0 heeft. Deze stelt dan in de omgeving van de oorsprong een analytische functie f(x) voor. Men kan dan de som definieren als de waarde van die functie voor x=1. Daarbij komt het er dus op aan de analytische voortzetting van die functie te bepalen. Mittag- Leffler heeft een uitdrukking opgesteld in de vorm van een reeks van polynomen, die de functie voorstelt in het gehele gebied waar ze bestaat behoudens een aantal coupures, de ster van de functie.