STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1957-015

Bewijs van een identiteit voor ζ-functies

C.G. Lekkerkerker

1957

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Bewijs van een identiteit voor ι-functies.

door

C.G. Lekkerkerker

Zij $\iota(x)$ de functie, bepaald door

$$\iota(x) = \begin{cases} 1 \text{ als } x > 0 \\ 0 \text{ als } x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

In het volgende zullen we steeds aannemen dat

$$\iota(0) = 1, \tag{2}$$

ofschoon de te bewijzen identiteit ook geldt als we definiëren $\iota(0)=0$, en vermoedelijk ook als we voor $\iota(0)$ een willekeurig reëel getal ϑ kiezen. Door de heer Runnenburg, medewerker van de afdeling Statistiek, werd ons de volgende vraag gesteld.

Bekend is [1] dat de grootheid $\gamma_n(q)$, bepaald door

$$\gamma_n(q) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \iota(s_1-t_1)\, \iota(s_1+s_2-t_1-t_2) \ldots \iota(s_1+\ldots+s_n-t_1-\ldots t_n).$$

$$.dB(s_1)dB(s_2)\ldots dB(s_n)dA(t_1)\ldots dA(t_n) \quad (q>0),$$

waarbij $B(s)$ en $A(t)$ verdelingsfuncties zijn, gelijk is aan de coëfficiënt van z^n in de machtreeksontwikkeling van de functie

$$F(z) = \exp\left[\frac{-1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \frac{\log(1-z\beta(q-\zeta)\alpha(\zeta))}{\zeta}\, d\zeta\right] \quad (\delta > 0),$$

waarbij $\alpha(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\, dA(t)$, $\beta(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, dB(t)$. Nu valt op te merken dat men hieruit de volgende identiteit kan afleiden. Als n een natuurlijk getal is en als $x_1, x_2, \ldots, x_n$ willekeurige reële getallen zijn, dan geldt

$$\sum_{\pi(1,2,\ldots,n)} \iota_1\, \iota_{12} \cdots \iota_{12\ldots n} = \tag{3}$$

$$= \sum_{\pi(1,2,\ldots,n)} \sum_{m=1}^{n} \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n} \cdot \frac{\iota_{12\ldots n_1}\, \iota_{n_1+1,\ldots,n_1+n_2} \cdots \iota_{n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}+1,\ldots,n}}{n_1 n_2 \ldots n_m\, m!}.$$

Daarbij is ter afkorting gesteld

$$\iota_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \iota(x_{j_1} + x_{j_2} + \ldots + x_{j_k})$$

en geeft het onderschrift $\gamma(1,2,\ldots,n)$ aan dat gesommeerd wordt over alle $n!$ permutaties $\gamma(1,2,\ldots,n)$ van de indices $1,2,\ldots,n$, terwijl verder in het rechterlid gesommeerd wordt over alle geordende partities van n in een willekeurig aantal natuurlijke getallen $n_1,n_2,\ldots,n_m$. In het geval dat alle $x_i \geq 0$ zijn, wordt een direct bewijs van (3) gesuggereerd door de bovenstaande formules, d.m.v. voortbrengende functies (zie onder). De vraag is nu of men algemeen een direct en elementair bewijs van de identiteit (3) kan geven.

In het onderstaande zullen we dit uitvoeren. We maken eerst twee opmerkingen vooraf.

Opm.1. We beschouwen een willekeurige term in het rechterlid van (3) en vragen ons af hoe vaak deze term in de gehele som voorkomt. Zij die term b.v.

$$\frac{\iota_{12\ldots n_1}\,\iota_{n_1+1,\ldots,n_1+n_2}\cdots\cdots\iota_{n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}+1,\ldots,n}}{n_1 n_2 \ldots n_m\; m!}\;.$$ Bij een

vast gekozen permutatie $\gamma(1,2,\ldots,n)$ komt deze term in de som, uitgestrekt over díe geordende partities $\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$ van n, waarvoor het stelsel getallen $\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$ een permutatie is van het stelsel getallen $\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}$, ten hoogste éénmaal voor. Verder komt deze term inderdaad voor, dan en slechts dan als de permutatie $\gamma(1,2,\ldots,n)$ verkregen wordt door een willekeurige permutatie van de getallen $1,2,\ldots,n_1$, een willekeurige permutatie van de getallen $n_1+1,\ldots,n_1+n_2,\ldots$, een willekeurige permutatie van de getallen $n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}+1,\ldots,n$ in een van de $m!$ mogelijke volgorden achter elkaar te plaatsen. Dit heeft tengevolge dat de beschouwde term juist $n_1!n_2!\ldots n_m!m!$ maal voorkomt. Dus kan het rechterlid van (3), stel R, geschreven worden als

$$(4)\qquad R = \sum (n_1-1)!(n_2-1)!\ldots(n_m-1)!\;\iota_{12\ldots n}\,\iota_{n_1+1,\ldots,n_1+n_2}\cdots\;\iota_{n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}+1,\ldots,n}$$

waarbij de som nu uitgestrekt wordt over alle verschillende termen, die van de aangegeven vorm zijn of daaruit ontstaan door een permutatie van de indices $1,2,\ldots,n$.

Opm.2. Door alle x_j met een klein positief bedrag ε te vermeerderen kunnen we bereiken dat géén der deelsommen $x_{j_1}+x_{j_2}+\ldots+x_{j_k}$ gelijk aan nul is, zonder dat bij deze verandering van de x_j een der deelsommen van teken verandert. Vervolgens kunnen we alle x_j in een zekere, voldoend kleine omgeving, willekeurig variëren, zonder dat een der deelsommen van teken verandert. We kiezen nu n getallen $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$ die onafhankelijk zijn over de ring der gehele getallen, en dus ook over het lichaam van de rationale getallen, en mogen dan bij de afleiding van (3) onderstellen dat

$$x_j = r_j\,\theta_j \quad (j=1,2,\ldots,n), \tag{5}$$

waarbij $r_1,r_2,\ldots,r_n$ rationale getallen zijn.

We bewijzen nu (3) door volledige inductie naar n. Voor $n=1$ is de identiteit kennelijk juist. We nemen nu aan dat hij juist is, als n een der waarden $1,2,\ldots,n-1$ heeft, en bewijzen hem voor n. We onderscheiden twee gevallen

I. Alle x_j zijn $\geqq 0$. We hebben, als $|z|<1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}-1 = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left\{-\log(1-z)\right\}^m = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n\right\}^m$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n}\frac{1}{n_1n_2\ldots n_m\, m!}z^n,$$

waarbij de som in het laatste lid, behalve over n, uitgestrekt wordt over alle geordende partities van n. Gelijkstelling van de coëfficiënten van z^n in eerste en laatste lid geeft

$$1 = \sum_{m=1}^{n}\sum_{m_1+n_2+\ldots+n_m=n}\frac{1}{n_1n_2\ldots n_m\, m!}. \tag{6}$$

In het beschouwde geval zijn in (3) de ι-waarden alle 1 en zijn beide leden van (3) gelijk aan $n!$ maal de corresponderende leden van (6). Dus geldt (3).

II. Niet alle x_j zijn $\geqq 0$. Is $x_1+x_2+\ldots+x_n<0$, dan is ook van de deelsommen $x_{j_1}+x_{j_2}+\ldots+x_{j_k}$, behorende bij een willekeurige term in het linker-of rechterlid van (3), minstens één <0. Dan geldt dus (3). We mogen dus onderstellen, dat

(7) $$x_1+x_2+\ldots+x_n \geqq 0.$$

Laat nu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ van de vorm (5) zijn en zij b.v. $x_{j_o} < 0$. We vergroten x_{j_o}, waarbij we de eis dat x_{j_o}/θ_{j_o} rationaal is laten vervallen, totdat voor het eerst een der deelsommen die negatief was de waarde 0 krijgt. In die deelsom moet wegens (5) de term x_{j_o} voorkomen; om dezelfde reden kunnen niet twee verschillende deelsommen die de term x_{j_o} bevatten gelijk zijn, en kan bij die verandering van x_{j_o} slechts één deelsom 0 worden. Omdat we over alle permutaties sommeren, mogen we hierbij onderstellen dat $j_o=1$ en dat die deelsom de som $x_1+x_2+\ldots+x_k$ is ($k \geqq 1$). Omdat vóór de verandering van x_1 voldaan is aan (7), is verder $k<n$.

We kunnen algemeen linker- en rechterlid van (3), stel L en R, splitsen in een som van termen die $\iota_{12\ldots k}$ als factor bevatten en een som van termen die niet die factor bevatten. Zij daarbij

$$L = P\,\iota_{12\ldots k} + Q\ , \qquad R = P'\,\iota_{12\ldots k} + Q'\ .$$

In het beschouwde geval neemt L bij de beschouwde verandering van x_1 toe met P en R met P'. We zullen aantonen dat steeds geldt

(8) $$P = P'.$$

Als dit juist is, dan kunnen we door een zeker eindig aantal veranderingen van de beschreven soort uit te voeren, geval II reduceren tot geval I en is de identiteit dus bewezen.

In een term in het linkerlid van (3) komt de factor $\iota_{12\ldots k}$ dan en slechts dan voor als $\gamma(1,2,\ldots,n)$ uiteenvalt in een permutatie $\gamma(1,2,\ldots,k)$ van de getallen $1,2,\ldots,k$ en een permutatie $\gamma(k+1,\ldots,n)$ van de getallen $k+1,\ldots,n$. Wegens de inductieonderstelling en de betrekking (4) is

$$\sum_{\gamma(1,2,\ldots,k)} \iota_1\,\iota_{12}\cdots\iota_{12\ldots k} = \sum \left\{\prod (n_j-1)!\right\}.\,\iota_{12\ldots n_1}\cdots \iota_{n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}+1,\ldots,k},$$

waarbij de som rechts uitgestrekt wordt over alle geordende partities van k en alle permutaties $\gamma(1,2,\ldots,k)$, met dien verstande dat alleen verschillende termen gerekend worden. Nu is, bij de nieuwe waarde van x_1, $x_1+x_2+\ldots+x_k=0$, maar géén hierin bevatte deelsom gelijk aan 0; dus is van de laatste som alleen de term met $m=1$, $n_1=k$ niet 0. Passen we nogmaals de inductieonderstelling toe, en wel op $x_{k+1},\ldots,x_n$, dan vinden we dus dat, bij de nieuwe waarde van x_1,

$$P = (k-1)! \sum_{\gamma(k+1,\ldots,n)} \iota_{k+1}\, \iota_{k+1,k+2} \cdots \iota_{k+1,\ldots,n}$$

$$= (k-1)! \sum \left\{ \prod (n_j-1)! \right\} \iota_{k+1,\ldots,k+n_1} \cdots \iota_{k+n_1+\ldots+n_{m-1}+1,\ldots,n},$$

waarbij de laatste som uitgestrekt wordt over alle partities van n-k en alle permutaties van $\{k+1,\ldots,n\}$.

Men gaat gemakkelijk na dat de laatste uitdrukking juist P' voorstelt. Daarmee is (8) bewezen, en het bewijs van (3) voltooid.

[1] Zie F. Pollaczek, Sur la répartition des périodes d'occupation ininterrompue d'un guichet, Comptes Rendus 234, 2042-4 (1952).