STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-016

Dimensietheorie

"Actualiteiten"

J. Kemperman

1948

Dimensietheorie door J. Kemperman.

Voordracht Actualiteiten op Zaterdag 30 Oct.

De ruimte waarin wij leven wordt drie-dimensionaal genoemd, evenals de hierin voorkomende lichamen. Gewoonlijk wordt dit spraakgebruik gerechtvaardigd door er op te wijzen, dat we aan deze verschijningen een lengte, breedte en hoogte kunnen onderscheiden. Om analoge redenen bezigt men in het spraakgebruik termen eendimensionaal - resp. tweedimensionaal bij de omschrijving van de semi-wiskundige begrippen lijn en oppervlak.

De opstelling van de Euclidische meetkunde vindt zijn aanleiding in de waarneming aan de buitenwereld. Er moet dus een zekere isomorfie zijn tussen deze meetkunde en ons ruimtelijk inzicht. Het heeft dus zin te zoeken naar een wiskundig parallel van het intuitieve begrip dimensie. En wel moeten we eisen, dat volgens deze definitie van de Euclidische ruimte E^n een dimensie n toekomt.

Men definieert E^n als de verzameling van alle vectoren $X = (X_1, \ldots, X_n)$ met de componenten X_i als willekeurige reele getallen. Deze verzameling wordt een ruimte door de metrisering

$$|X - Y| = \sqrt{\sum (X_i - Y_i)^2}$$

Het zou voor de hand liggen E^n een dimensie n toe te kennen krachtens het aantal onafhankelijke parameters in E^n (v.g.l. ook het spreekgebruik: aantal dimensies = aantal afmetingen). De onderzoekingen van Cantor hebben evenwel geleerd, dat E^n en E^1 de zelfde machtigheid hebben d.w.z. voor ieder natuurlijk getal n kan E^n ééneenduidig beschreven worden door een enkele parameter t. $(-\infty < t < +\infty)$. Voor $n > 1$ is dan evenwel de functie $x(t)$ $(t \in E^1$ en $X \in E^n)$ of zijn omkering niet overal continu, zodat nog niet volgt dat E^n homeomorf is met E^1. Wanneer E^m en E^n $(m \neq n)$ homeomorf waren, dan zou een natuurlijke definitie van dimensie (die aan E^n een dimensie n toekent) geen enkele topologische betekenis kunnen hebben. Gelukkig bewees Brouwer in 1911, dat een dergelijke homeomorfie onmogelijk is.

Henri Poincaré schreef kort voor zijn dood (1912) in Revue de Metaphysique et de Morale: "Je fonderai la détermination du nombre des dimensions sur la notion de coupure...... Un continu a n dimensions quand on peut le décomposer en plusieurs parties en y pratiquant une ou plusieurs coupures qui soient elle-mêmes des continus à n-1 dimensions; c'est une definition par recurrence".

Uit dit citaat blijkt, dat Poincaré intuitief het begrip dimensie zeer diep heeft doorschouwd. Brouwer gaf in 1913 zijn beroemde definitie van "Dimensionsgrad", welke definitie kan worden beschouwd als een mathematische précisering van de ietwat vage omschrijving van Poincaré. Tevens bewees hij, dat E^n de "Dimensionsgrad" n heeft. Daar de "Dimensionsgrad" een topologisch begrip is (invariant voor homeomorfe afbeeldingen), bewees Brouwer hiermee ten tweede male, dat E^m en E^n $(m \neq n)$ niet homeomorf zijn.

De publicatie van Brouwer bleef lange tijd onopgemerkt. In 1922 stelden Menger en Urysohn (onafhankelijk van Brouwer en van elkander) de volgende recurrente definitie van dimensie op, die zeer analoog is met de definitie van Brouwer.

Def. 1. 1. De lege verzameling heeft de dimensie -1.

2. Een metrische ruimte X heeft een dimensie $\leq$ n als elk punt p van X willekeurig kleine omgevingen heeft, waarvan de rand een dimensie $\leq$ n-1 heeft.

3. We zeggen, dat X de dimensie n heeft, als n het kleinste gehele getal voorstelt, waarvoor dim. X $\leq$ n. Bestaat een zodanig geheel getal niet, dan zeggen we, dat X de dimensie ∞ heeft.

Def. 2. Een metrische ruimte X heeft in een punt x_0 een dimensie n, als n het kleinste gehele getal is, waarvoor nog willekeurig kleine omgevingen van x_0 bestaan met een rand van dimensie $\leq$ n-1. Bestaat zo'n geheel getal niet, dan zeggen we dat X in x_0 een oneindige dimensie heeft.

Met behulp van Def. 2 kunnen we Def. 1 ook als volgt formuleren:

Def. 3. De dimensie van een ruimte X is $\leq$ n als X in ieder punt x_0 van een X dimensie $\leq$ n heeft. Onder dim. X verstaan we het kleinste gehele getal met deze eigenschap. Bestaat zo'n geheel niet, dan schrijven we dim. X $=\infty$.

De artikels van Menger en Urysohn ontketenden een lawine van publicaties (Brouwer, Menger, Urysohn, Hurewicz, Nöbeling enz.), die bijdroegen tot de theorie van het begrip dimensie. Het kristalliseerproces duurde niet veel langer dan een tiental jaren. Toen kon de topologie roemen op een heerlijk juweel, flonkerend in zijn talloze nooit gedroomde facetten: de dimensietheorie.

§ 1. Begrippen.

De in de dimensietheorie beschouwde ruimte X wordt steeds metrisch verondersteld (motivering volgt), Onder een open deelverzameling $U \subset X$ verstaan we dan een zodanige verzameling, dat bij elk punt $x_o \in U$ een positief getal ε bestaat, zodat:

$$x \in X \text{ en } |x-x_o| < \varepsilon \qquad \text{impliceren } x \in X$$

In het bijzonder is X zelf een open verzameling. On-der een omgeving U van een punt x_o. zullen we elke open verzameling U verstaan waarvoor $x_o \in U$.

Een deelverzameling $F \subset X$ heet afgesloten als het complement $X-F$ t.o.v. X een open verzameling is.

Zij Y een metrische ruimte en $X \subset Y$. We kunnen Y weer als metrische ruimte opvatten door voor twee punten p_1 en p_2 van X dezelfde afstand te kiezen, als zij in de metriek van Y oorspronkelijk hadden. Een verzameling U met $U \subset X \subset Y$ kan dan open zijn t.o.v. X, terwijl U als deelverzameling van Y beschouwd niet open is (Kies b.v. U=X). We noemendaarom de begrippen "open" en "afgesloten" relatieve begrippen.

Voor onze metrische ruimte zijn de begrippen: limiet van een aftelbare puntenrij, accumulatiepunt van een deelverzameling A van X, direct duidelijk.

Onder de afsluiting $\overline{A}$ van A t.o.v. X verstaan we de vereniging van A en al zijn in X gelegen accumulatiepunten. De eigenschap $\overline{A} = A$ is aequivalent met het afgesloten zijn van A.

Onder de rand R(A) van A t.o.v. X verstaan we de verzameling van alle punten $p \in X$, zo dat in iedere omgeving van p (hoe klein ook) nog altijd punten van A èn punten buiten A liggen.
En wel geldt zoals we gemakkelijk nagaan

$$R(A) = \overline{A} \cdot (X-A) + \overline{(X-A)} \cdot A$$

Evenals de begrippen "open" en "afgesloten" zijn de begrippen "afsluiting" en "rand" "relatieve" begrippen. Deze opmerking is van belang bij toepassing van de dimensiedefinitie van Menger-Urysohn. Zij b.v. X een deelverzameling van E^n en x_o een punt van X. Een omgeving V van x_o t.o.v. X kan dan altijd opgevat worden als de doorsnede $V=X.U$ van X met een zekere omgeving U van x_o t.o.v. E^n. De rand R(V) van V t.o.v. X is dan de doorsnede van X met de rand R(U) van U t.o.v. E^n.

Voorbeeld. Zij I_m de deelverzameling van E^m bestaande uit alle punten waarvoor de bepalende coordinaten irrationaal zijn. Zij x_o een punt van I_m. Kies als omgeving V van x_0 t.o.v. I_m de doorsnede van I_2 met een open, assenparallele rechthoekig blok U in E^m, waarvoor de hoekpunten rationale coordinaten hebben. De rand van V t.o.v. I_m is de doorsnede van R(U) t.o.v. E^m met I_m, dus leeg. Daar het blok op de aangegeven wijze altijd nog willekeurig klein gekozen kan worden volgt: dim. $I_m = 0$ (dim. $I_m > -1$ daar I_m niet leeg).

Behalve metrisch zal de ruimte X ook steeds separabel verondersteld worden. Dit houdt in het bestaan van een aftalbare deelverzameling A van X, die dicht ligt in X d.w.z. $\bar{A} = X$.

Reeds bij de formulering van de dimensiedefinitie bezigden we het metrisch zijn van X ("willekeurig kleine omgevingen"). Deze metriek is evenwel niet essentieel in die zin, dat ook voor algemeen topologische ruimte (waarin apriori een omgevingsbegrip wordt gedefinieerd), een definitie van dimensie gegeven kan worden, die voor metrische ruimtes met Def. 1 samenvalt.

Def. 4. 1. De dimensie van de lege verzameling is -1.

2. We zeggen, dat voor een topologische ruimte X geldt dim. X $\leq$ n, als bij elk punt x_0 en elke omgeving U van x_0 (dus $x_0 \in U$), een omgeving V van x_0 bestaat met $V \subset U$ zo dat dim. R(V) $\leq$ n-1 als R(V) de rand van V voorstelt.

De reden van de beperking tot metrische separabele ruimtes ligt in het feit, dat alleen voor deze ruimtes eigenlijk nog sprake is van een dimensie<u>theorie</u>. Bij de bwijzen van practisch elke stelling uit de huidige dimensietheorie (waarbij we het bewijs rekenen vanaf de primaire gegevens : metriek en separabiliteit) maakt men een essentieel gebruik van de extra-gegevens.

Een afbeelding van een ruimte X in een ruimte Y heet <u>continu</u> als de origineelverzameling van elke open verzameling in Y een open verzameling in X is. Twee ruimtes heten homeomorf, als tussen X en Y een eeneenduidige afbeelding bestaat, die naar beide richtingen continu is. De afbeelding noemt men dan een topologische afbeelding of homeomorfie. Alle voor topologische afbeeldingen invariante begrippen noemt men topologische begrippen ("open", "afgesloten", "rand" enz.). In het bijzonder geldt:" Het begrip dimensie is een topologisch begrip", zoals we gemakkelijk nagaan.

§ 2. Stellingen.

Uit de definitie van dimensie volgt onmiddellijk:

Def. 5. Een niet lege ruimte X heeft de dimensie 0 (resp. n) als elk punt p van X willekeurig kleine omgevingen U heeft met lege rand (resp. met dimensie $\leq n-1$). Hieruit volgt o.a. dat een niet lege deelverzameling van een verzameling met dimensie 0 (resp. $\leq n$) weer een dimensie 0 (resp. $\leq n$) heeft.

Zij X een hoogstens aftelbare ruimte. Een punt p van X heeft tot de hoogstens aftelbaar vele punten x_i van X een hoogstens aftelbaar aantal afstanden $|p - x_i|$. Dus kan $\rho > 0$ willekeurig klein gekozen worden, en toch verschillende van alle getallen $|p - x_i|$. Een bolvormige open omgeving van p met straal ρ heeft dan in X een lege rand. Hieruit volgt

Stelling 1. Iedere niet lege, hoogstens aftelbare ruimte X heeft de dimensie nul.

In het bijzonder is de verzameling R_n van alle punten in E^n met rationale coordinaten een nuldimensionale verzameling. Analoog met Stelling 1. volgt, dat elke niet lege deelverzameling van E^1, die geen intervallen bevat de dimensie nul heeft b.v. het dicontinuum C van Cantor.

Def. 6. Als A, B en C drie paarsgewijs disjuncte deelverzamelingen van een ruimte X zijn, dan heten A en B gescheiden door C, als X-C. Kan worden geschreven als

$$X-C = A' + B'$$

met $A \subset A'$, $B \subset B'$, $A' . B' = 0$
terwijl A' en B' t.o.v. X-C als relatief-ruimte beide open (en dus ook beide afgesloten) verzamelingen zijn.

Wij zeggen, dat A en B in X gescheiden liggen, als A en B gescheiden worden door de lege verzameling.

Definitie 5 is aequivalent met

Def. 6. Dim. X $\leq n$ als ieder punt p van elke p niet bevattende afgesloten verzameling B kan worden gescheiden door een afgesloten verzameling C van dimensie $\leq n-1$.

Bewijs. Nodig $\rightarrow$ We vatten de open verzameling X-B op als een omgeving van p. Elke metrische ruimte is regulier (en zelfs normaal)[1]. Dus er bestaat een open omgeving V van p met $\overline{V} \subset X-B$. Wegens dim. X $\leq n$

---

[1] Een top. ruimte heet regulier (resp. normaal) als bij ieder punt p van X (resp. afgesloten verzameling A) en elke omgeving U van p (resp. A) een omgeving V van p (resp. A) bestaat met $\overline{V} \subset U$.

is erweer een omgeving W van p met $W \subset V$ waarvoor $R(W)$ een dimensie $n-1$ heeft. Uit $W \subset V$ volgt $\overline{W} \subset \overline{V} \subset X - B$, zodat $B \subset X - \overline{W}$. Omdat alle buiten W resp. $(X-\overline{W})$ gelegen accumulatiepunten van W (resp. $X-\overline{W}$) in $R(W)$ liggen, zijn de verzamelingen W en $X-\overline{W}$ afgesloten t.o.v. $X-R(W)$. En wel geldt $p \in W$ en $B \subset X - \overline{W}$, zodat de afgesloten $R(W)$ met dim. $R(W) \leq n-1$ de verlangde separatie levert.

Voldoende → onaloog

Merk op, dat bij het bewijs van de aequivalenties van Def. 5 en Def. 6 de normaliteit van X is gebruikt.

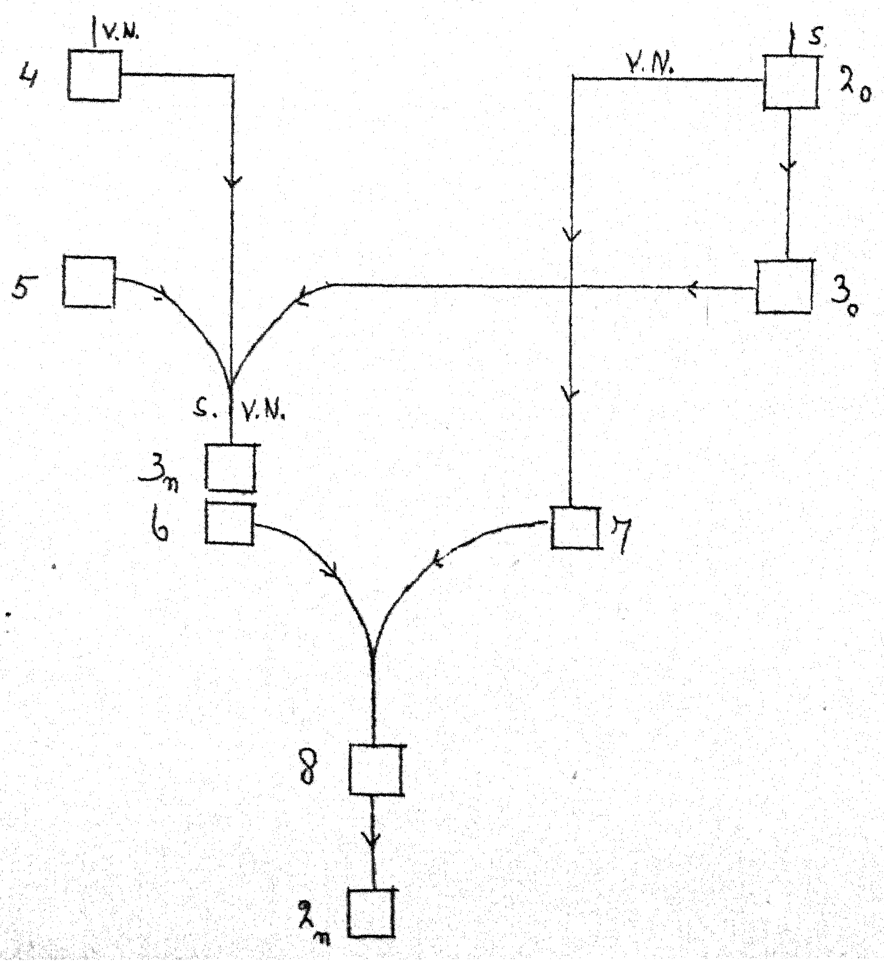
De twee volgende stellingen uit de dimensietheorie zijn bijzonder belangrijk:

Stelling 2. Een ruimte X, die opgevat kan worden als de aftelbare som van afgesloten deelverzamelingen met een dimensie $\leq n$, heeft zelf ook een dimensie $\leq n$.

Stelling 3. Nodig en voldoende opdat X een dimensie $\leq n$ heeft, is dat elk tweetal disjuncte afgesloten verzamelingen A en B kan worden gescheiden door een afgesloten verzameling met een dimensie $\leq n-1$.

Bij het bewijs, moet men beide stellingen splitsen in een stelling betrekking hebbende op $n = 0$ resp. op algemene n. We zullen ter onderscheid spreken van stelling 2_0 (resp. st. 3_0) en stelling 2_n (resp. st. 3_n).

De bewijsvoering verloopt dan volgens het volgende schema:



Stelling 2 en stelling 4 worden direct uit de definitie van dimensie afgeleid. Hierbij werd resp. de volledige [1] normaliteit en de separabiliteit van de ruimte X gebruikt, hetgeen aangegeven is door de letters S en V.N. Behalve voor de stellingen $4, 5, 2_0$, 3_0 geldt het bewijs niet meer als de ruimte niet separabel of niet volledig normaal is.

De stellingen 3_n en 6 worden gelijktijdig verkregen uit de stellingen 4,5 en 3_0. Dit hangt samen met een samengesteld inductiebewijs. We zullen nu de stellingen 4 t/m 8 nader noemen.

Stelling 4. Een deelverzameling X' van een ruimte X heeft een dimensie $\leqq$ n dan en alleen dan, wanneer ieder punt van X' in X een willekeurig kleine omgeving heeft, waarvan de rand X' een doorsnede heeft met een dimensie $\leqq$ n-1.

Stelling 5. Als A en B twee deelverzamelingen van een ruimte X zijn, dan geldt

$$\text{dim. } (A+B) \leqq 1 + \text{dim. } A + \text{dim. } B.$$

Stelling 6. Zij n eindig. Een ruimte X heeft dan en alleen dan een dimensie $\leqq$ n, als X de som is van een deelverzameling met een dimenzie $\leqq$ n-1 en een deelverzameling met een dimensie $\leqq$ 0.

Stelling 7. Zij A een nuldimensionale deelverzameling van X. Laten C_1 en C_2 twee disjuncte afgesloten deelverzamelingen van X zijn. Dan bestaat er een afgesloten verzameling B, die C_1 en C_2 scheidt zo dat A B = 0.

Stelling 8. Zij A een deelverzameling van X met een dimensie $\leqq$ n. Laten C_1 en C_2 twee disjuncte afgesloten deelverzamelingen van X zijn. Dan bestaat er een afgesloten verzameling B, die C_1 en C_2 scheidt, zo dat dim. A B $\leqq$ n-1.

Als voorbeeld geven we nu het bewijs van stelling 8. Laat dus aan de gegevens van stelling 8 voldaan zijn.

1. Zij vooreerst n=0. Dan is ofwel dim. A= -1 en is de stelling triviaal, dan wel dim. A= 0 in welk geval de bewering op stelling 7 is terug te brengen.
2. Zij n > 0. Dan is A volgens stelling 6 de som van een verzameling E met dimensie $\leqq$ 0 en een verzameling D met dimensie $\leqq$ n-1. Volgens stelling 7 bestaat een afgesloten verzameling B die C_1 en C_2 scheidt zo dat E B = 0. Hieruit volgt A B = D B $\subset$ D zodat dim. A B $\leqq$ n-1.

Men ziet gemakkelijk in, dat stelling 2_n een bijzonder geval is van stelling 8.

---

[1]) Een ruimte X heet volledig normaal wanneer elke deelverzameling als relatief-ruimte beschouwd) normaal is.

§ 3. Toepassingen.

1. Zij R_n^m de verzameling van alle punten in E^n met precies n rationale coordinaten. Voor elke greep $i_1 \ldots i_m$ uit de getallen $1, \ldots n$ en elke keuze $r_1 \ldots r_m$ van rationale getallen, is de doorsnede C_k van het hypervlak V_k

$$x_{i_1} = r_1 , \ldots \quad x_{i_m} = r_m$$

met de ruimte R_n^m isomorf met I_{n-m} (de puntverzameling bestaande uit alle punten van E^{n-m} met uitsluitend irrationale coordianten) en heeft dus een dimensie nul (zie § 2). Tevens is C_k een afgesloten deelverzameling van R_n^m als doorsnede van (de t.o.v. E^n afgesloten verzameling) V_k met R_n^m. Daar er slechts aftelbaar vele verzamelingen C_k mogelijk zijn, volgt uit Theorema 3_o , dat R_n^m de dimensie nul heeft.

2. Eenvoudig is te zien, dat dim. $E^n \leqq$ n. In § 4 zullen we aantonen dat dim. $E^n \geqq$ n. Dus dim. E^n = n.

3. Zij $o \leq m \leq n$. Onder M_n^m verstaan we de verzameling van alle punten in E^n met hoogstens m rationale coordinaten. Onder L_n^m de verzameling van alle punten met minstens m coordinaten. Dan geldt

$$M_n^m = R_n^o + \dot{R}_n + \ldots + R_n^m$$

$$L_n^m = R_n^m + R_n^{m+1} + \ldots + R_n^n$$

Ieder der R_n^k heeft de dimensie nul.

Uit stelling 5 volgt dan

$$\text{dim. } M_n^m \leqq m \qquad \text{dim } L_n^m \leqq n-m$$

Nus is $E^n = M_n^m + L_n^m$ en dim $E^n \geq$ n. Weer wegens stelling 5 moet noodzakelijk gelden

$$\text{dim. } M_n^m = m \qquad \text{dim. } L_n^m = n - m.$$

Bijzonder interessant is de n-dimensionale verzameling M_{2n+1}^n. Het is een z.g. universeel n-dimensionale ruimte d.w.z. elke ruimte X met dim. $X \leqq$ n is homeomorf met een deelverzameling van M_{2n+1}^n, terwijl dim $M_{2n+1}^n = n$.

§ 4 dim. $E^n \geqq$ n.

Met S^n duiden we altijd de rand van een Euclidische bol in E^n aan. Dan geldt

Stelling 9. Voor $x \in S_n$ en $o \leq t \leq 1$ bestaat er geen continue functie $f(t, x)$ met functiewaarden in S_n en met de randvoorwaarden

$$f(0,x) = x \qquad f(1,x) = \text{constant}.$$

Aanschouwelijk betekent dit, dat we nooit een vlies van een massieve bol kunnen verwijderen zonder het te scheuren. We zullen deze stelling niet bewijzen. Uit stelling 9 volgt direct de aanschouwelijk zeer sprekende

Stelling 10. Zij K_n een afgesloten bolvormige omgeving in E^n met rand S_{n-1}. Dan bestaat er geen continue afbeelding van K_n in S_{n-1} waarbij alle punten van S_{n-1} invariant zijn.

Bewijs. Stel, dat de beschreven afbeelding F wel bestaat. Dan zou de functie

$$f(t,x) = F((1-t)x)$$

met $x \in S_{n-1}$ en $f(t,x) \in S_{n-1}$ aan de in stelling 9 verboden randvoorwaarden voldoen.

Stelling 11. (Het dekpunttheorema van Brouwer). Een afbeelding f van een afgesloten bolvormige omgeving K_n (in E_n) in zichzelf heeft altijd een dekpunt d.w.z. een punt waarvoor $f(x) = x$.

N.B. Onder een afbeelding zullen we altijd een continue afbeelding verstaan.

Bewijs. Stel de bewering is onjuist. Voor elk punt $x \in K_n$ geldt dan $f(x) \neq x$. Zij S_{n-1} de rand van K_n. Verbindt elk punt x met $f(x)$ en verleng dit segment aan de kant van x. Het snijpunt met S_{n-1} noemen we $g(x)$. Dan zou $g(x)$ de in stelling 10 verboden eigenschap hebben.

Stelling 12. Zij I_m de kubus in E_n van alle punten $(x_1, \ldots, x_m)$ met $|x_i| \leq 1$. Zij C_i de zijde $x_i = 1$, C_i' de tegenoverliggende. Als B_i ($i = 1, \ldots, m$) een afgesloten verzameling is, die C_i en C_i scheidt, dan geldt

$$B_1 \ldots\ldots B_m \neq 0$$

Bewijs. B_i scheidt C_i en C_i' betekent:

$$I_n - B_i = U_i + U_i'$$

$$C_i \subset U_i \; ; \; C_i' \subset U_i'$$

$$U_i \cdot U_i' = 0,$$

terwijl U_i en U_i' open zijn in $I_n - B_i$ en dus ook in I_n ($I_n - B_i$ is open in I). Voeg aan $x \in I_n$ een vector $v(x)$ toe met als absolute waarde van de i-de exponent de afstand van x tot B_i ($v_i(x) > 0$ als $x \in U_i'$, $v_i(x) = 0$ als $x \in B_i$, $v_i(x) < 0$ als $x \in U_i$)

Bevestig de vector $v(x)$ aanhet punt x als beginpunt. Noem het eindpunt $f(x)$. Dan is $f(x)$ een afbeelding van I_n in zichzelf, die aan alle voorwaarden van stelling 11 voldoet. (I_n is homeomorf met een afgesloten bolvormige omgeving in E^n). Dus volgens het dekpunttheorema is voor zekere punt $f(x) = x$ d.w.z. $v(x)=0$ ofwel $x \in B_i$ $(i=1,\dots,n)$ zodat $B_1 \ldots\ldots B_n \neq 0$.

Stelling 13. Zij X een ruimte met dimensie $\leq$ n-1, Laten C_i, C_i' ($i = 1,\ldots\ldots,n$)n paren disjuncte afgesloten verzamelingen zijn. Dan bestaat voor $i = 1,\ldots\ldots,n$ een afgesloten verzameling B_i die C_i en C_i' scheidt, zo dat $B_1 \ldots\ldots B_n = 0$.

Bewijs. Stelling 2 leert het bestaan van een afgesloten verzameling B_1 die C_1 en C_2 scheidt en waarvoor dim. $B_1 \leq n-2$. Uit stelling 8 volgt dan het bestaan van een afgesloten verzameling B_2, die C_2 en C_2' scheidt, en waarvoor dim. $B_2 \leq n-3$. Doorgaand vinden we tenslotte een afgesloten verzameling B_n, die C_n en C_n' scheidt en waarvoor

$$\text{dim. } B_1 \ldots B_n \leq -1$$

d.w.z. $B_1 \ldots\ldots B_n = 0$.

Stelling 14. dim. $E_n \geq$ n.

Bewijs. We tonen aan, dat dim. $I_n \geq n$. Zij nu dim. $I_n \leq$n-1. Met de stellingen 12 en 13 verkrijgen we onmiddellijk een contradictie.

§ 5. Andere definities en dimensies.

A. Lesbesgue (Math.Ann.) formuleerde in 1911 het volgende lemma, dat hij evenwel niet correct bewees.

Lemma. Bij een verdeling van I_n in eindig vele voldoend kleine deelverzamelingen C_i , die elk opgevat kunnen worden als de som van eindig vele afgesloten kubussen, is er minstens één punt van I_n, dat tot (n+1) verschillende C_i behoort. In 1913 werd dit lemma door Brouwer bewezen en later nog door vele anderen. Het bleek, dat C_i niet uit kubussen behoeft te kunnen worden opgebouwd. Het lemma blijft juist als C_i afgesloten zonder meer is.

Men kan I_n verdelen in willekeurig kleine afgesloten verzamelingen C_i, zo dat ieder punt van I_n hoogstens tot n+1 verschillende C_i behoort (n.l. een verdeling analoog met het verband van een gemetselde muur). Blijkbaar heeft I_n de volgende eigenschap : P_n.

Def. We zeggen ,dat een compacte ruimte X de eigenschap P_n heeft, als geldt:

a. Bij elke voldoend fijne overdekking van X met afgesloten verzameling $C_1, \dots, C_p$ is er minstens één punt van X, dat tot minstens n+1 verschillende verzamelingen C_i behoort.

b. Er zijn nog willekeurig fijne overdekkingen van X met eindig vele afgesloten verzamelingen C_i, zo dat n+2 verschillende C_i een lege doorsnede hebben.

Zoals men gemakkelijk ziet is deze eigenschap P_n van een compacte ruimte X een topologisch begrip. Homeomorfe afbeeldingen van I_n en I_m ($m \neq n$) zijn dus onmogelijk.

Menger en Urysohn (Fund. Math. VIII) bewezen, dat voor een compacte deelverzameling X van een Euclidische ruimte eigenschap P_n aequivalent is met de eigenschap dim. $X_n = n$.
Dit geldt dus voor alle eindig-dimensionale compacte verzamelingen, die n.l. homeomorf zijn met een (eveneens compacte) deelverzameling van zekere Euclidische ruimte. Voor deze verzamelingen drukt de eigenschap P_n een direct aanschouwelijke eigenschap uit. Dit in tegenstelling met de recurrent gedefinieerde dimensie.

B. Reeds in 1909 introduceerde Frechet het begrip dimensietype naar aanleiding van de definitie van de kardinaalgetallen.

Def. Men zegt van een ruimte X, dat zijn dimensietype $\leq$ is dan dat van een ruimte Y, als X homeomorf is met een deelverzameling van Y. Als bovendien dimensietype - Y $\leq$ dimensietype -X, dan heten X en Y van hetzelfde dimensietype.

Natuurlijk blijft de mogelijkheid open, dat noch X topologisch in Y, noch Y topologisch in X kan worden ingebed. De dimensietype heten dan onvergelijkbaar.

Voorbeeld. Beschouw een viervlak in E^3 en verbindt een punt P binnen het viervlak met de vier hoekpunten. Laat X bestaan uit deze vier verbindende segmenten en de ribben van het viervlak. Zij $Y=E^2$. Dan zijn de dimensietypesvan X en Y onvergelijkbaar.

C. Hausdorff heeft met behulp van de z.g. p-dimensionale maat een dimensiebegrip ingevoerd, dat naar hem een dimensie van Hausdorff wordt genoemd.

Zij X een metrische ruimte en p een reeel getal ≥ 0. Zij $\varepsilon > 0$ en beschouw nu alle verdelingen

$$X = A_1 + A_2 + \dots$$

van X in aftelbaar vele verzamelingen A_i met diameter $\delta(A_i) < \varepsilon$.

Zij nu

$$m_p^{\varepsilon}(X) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} [\delta(A_i)]^p$$

Als ε monotoon tot nul nadert, dan stijgt $m_p^{\varepsilon}(X)$ monotoon naar een (al dan niet oneindige) limiet $m_p(X)$. Dus $m_p(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_p^{\varepsilon}(X)$. Men noemt $m_p(X)$ de p-dimensionale maat van X. Men ziet gemakkelijk in, dat voor $p < q$ geldt $m_p(X) \geq m_q(X)$. In het bijzonder: als $m_p(X) < \infty$ dan is $m_q(X) = 0$; als $m_q(X) > 0$ dan is $m_p(X) = \infty$.

Def. Onder de dimensie van Hausdorff van de metrische ruimte X verstaat men het supremum van de verzameling der reële getallen p, waarvoor $m_p(X) > 0$.

Voorbeeld. De verzameling C van Cantor, bestaande uit alle reele getallen van de vorm

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

met $a_n = 0$ of 2, heeft een H-dimensie $= \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}63$.

Men maakt dit plausibel door er op te wijzen, dat men C kan insluiten in 2^n intervallen, ieder der lengte 3^{-n}. Voor deze verdeling is

$$\sum [\delta(A_i)^p] = 2^n \cdot 3^{-np} = \left(\frac{2}{3^p}\right)^n$$

Voor $n \to \infty$ treedt een limiet $0 < m < \infty$ op alleen als $p = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Voor metrische separabele ruimtes heeft Szpilrajn bewezen:

a. H-dim. X $\geq$ dim. X

b. inf. H-dim. (X') = dim. X

als we links X' de verzameling van alle met X homeomorfe (en dus metrische) ruimtes laten doorlopen.

§6. Belangrijke stellingen uit de dimensietheorie.

Stelling 15. Nodig en voldoende opdat een deelverzameling A van E^n een n-dimensionale verzameling is, is dat A een niet lege deelverzameling bevat, die open is in E^n.

Def. Onder een overdekking van een ruimte X verstaan we een eindig stel open verzamelingen

$$U_1 \dots . U_n \text{ met } X = U_1 + \dots + U_n .$$

Het grootste getal n waarvoor nog n+1 verzamelingen uit de overdekking bestaan met een niet lege doorsnede heet de orde van de overdekking.

Een overdekking β heet een verfijning van de overdekking α als iedere verzameling van de overdekking β bevat is in een of andere verzameling van de overdekking α.

Stelling 16. Een ruimte X heeft dan en alleen dan een dimensie $\leq n$ als elke overdekking een verfijning heeft van de orde n.

Stelling 17. Zij X een ruimte met dim. X $\leq$ n. Dan is X homeomorf met een deelverzameling van I_{2n+1}.

Def. Zij α een overdekking van X en g een afbeelding van X in een ruimte Y. We noemen g een α-afbeelding als bij ieder punt $y_0 \in Y$ een omgeving U van y_0 bestaat, waarvan het origineel voor de afbeelding geheel bevat is in een verzameling uit de overdekking.

Stelling 18. Een ruimte X heeft dan en alleen dan een dimensie $\leq$ n als bij elke overdekking α van X een α-afbeelding bestaat van X op een polytoop van dimensie $\leq$ n.

Daarbij verstaan we onder een polytoop zekere verzamelingen in een Euclidische ruimte, die zijn opgebouwd uit eindig vele dusjuncte open simplexen (punten, open intervallen enz.) zo dat met ieder simplex ook alle zijvlakken bevat zijn.

Ieder open simplex met n+1 hoekpunten is homeomorf met E^n en heeft dus de dimensie n. Onder de dimensie van het polytoop verstaan we de grootste onder de dimensies van de samenstellende simplexen.

Def. Zij A een deelverzameling van X en $f(x)$ een afbeelding van A in een ruimte Y. Een afbeelding $F(x)$ van X in Y waarvoor geldt

$$F(x) = f(x) \quad \text{als } x \in A$$

heet een uitbreiding van de afbeelding f over X.

Stelling 19. Een ruimte X heeft een dimensie $\leq n$ dan en alleen dan, als voor elke afgesloten verzameling C en elke afbeelding van C in S_n er een uitbreiding van f over X bestaat.

Def. X en Y zijn twee ruimtes. We zeggen, dat een afbeelding f van X in Y homotoop is met een afbeelding g van X in Y, als er een continue functie bestaat met argumenten $x \in X$ en $0 \leq t \leq 1$ en functiewaarden in Y, waarvoor geldt:

$$f(x,0) = f(x) \qquad f(x,1) = g(x)$$

Stelling 20. Laten f en g twee afbeeldingen zijn van X in S_n. Zij gegeven, dat voor de verzameling D van punten x waarvoor $f(x) \neq g(x)$ een dimensie $\leq n-1$ heeft. Dan zijn f en g homotoop.

We noemen een afbeelding f van X in Y homotoop nul, als f homotoop is met de constante afbeelding. Uit de vorige stelling volgt onmiddellijk

Stelling 21. Zij X een ruimte met dim. $X<n$. Dan zijn alle afbeeldingen van X in S_n homotoop met nul.

Stelling 22. (Invariantentheorema van Brouwer). Als A en B twee homeomorfe deelverzamelingen van E_n zijn, dan correspondeert met een inwendig punt van A een inwendig punt van B in de homeomorfie.

Literatuur.

H. Poincaré	Revue de Metaphysique et de Morale (1912).
L.E.J. Brouwer	Math.Ann. 70 (1911)
"	Journ. of Math. 142 (1913).
K. Menger	Monatshefte f Math. u. Phys. (1922).
Urysohn	Comptes Rendus 175 (1922)
K. Menger	Dimensionstheorie (1928).
Szpilrajn	Fund. Mathematicae 28 (1937)
W. Hurewicz and H. Wallmann	Dimensiontheory (1948)