STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1949-016

Een opmerking over intuïtionistische logica

W. Peremans

1949

Een opmerking over intuïtionistische logica.

door W. Peremans.

In de geformaliseerde intuïtionistische praedicatenrekening volgens Heyting (A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. 1930, 57 - 71) is de formule

(1) $$(\forall x)\ f(x) \rightarrow (\exists x)\ f(x)$$

een afleidbare formule. Dit houdt blijkbaar in, dat als individuengebied slechts toegelaten wordt een (mathematische) soort, waarin een element kan worden aangewezen, dus b.v. bij de huidige stand van wetenschap niet de soort van de natuurlijke getallen waarvoor het vermoeden van Fermat onjuist is. Vele gangbare formules uit deze calculus (zo b.v. die voor de omzetting van generalisatoren in particularisatoren en omgekeerd) blijven evenwel geldig, ook zonder dat die veronderstelling gemaakt wordt. Men kan zich de vraag stellen of een deductieve opbouw mogelijk is, die vrij is van deze veronderstelling.

De axioma's die aan de uitspraakrekening worden toegevoegd, zijn de volgende:

(2) $$(\forall x)\ f(x) \rightarrow f(y)$$

(3) $$f(y) \rightarrow (\exists x)\ f(x).$$

Door toepassing van de conclusieregel volgt hieruit direct formule (1). We zullen dus als we formule (1) vermijden willen, al direct hier beperkingen moeten invoeren. Nu bevatten (2) en (3) de vrije veranderlijke y. We moeten ons eerst afvragen, welke de betekenis is van een formule met een vrije veranderlijke, als het individuengebied geen aanwijsbare elementen bezit. Het meest voor de hand ligt de interpretatie: als er een y wordt aangewezen dan gaat de formule bij substitutie van die y over in een juiste bewering. Bij deze interpretatie zijn zowel (2) als (3) juist, maar dan is blijkbaar toepassing van de conclusieregel, die hieruit (1) levert, niet geoorloofd. Dit komt, omdat de vrije veranderlijke, die in (2) en (3) voorkomt, in de conclusie ontbreekt. Zolang er echter geen waarden voor y kunnen worden aangewezen, zijn (2) en (3) nog geheel zinledig, maar (1) heeft wel zin. Het is duidelijk, dat een conclusie uit een of meer zinledige formules, die een zinvolle oplevert, niet juist behoeft te zijn, en het in dit geval dan ook niet is.

De eenvoudigste oplossing is, dat we de formules met vrije veranderlijken in het geheel niet toelaten. Dit houdt vergeleken met de gewone theorie geen ernstige beperking in, omdat daar toch formules met vrije veranderlijken en de overeenkomstige formules waarin de vrije veranderlijken door zich over de gehele formule uitstrekkende $\forall$ -operatoren gebonden waren uit elkaar afgeleid konden worden. Onze axioma's worden dan als volgt:

(4) $$(\forall y)[(\forall x)\ f(x) \rightarrow f(y)]$$

(5) $$(\forall y)[f(y) \rightarrow (\exists x)\ f(x)]$$

Nu is het echter zo, dat bij de deducties formules met vrije veranderlijken een zeer grote rol spelen. Het is dus te voorzien, dat als we geen speciale maatregelen zouden treffen, de gestelde beperking te sterk zou zijn, doordat we afleidbare formules uit de bekende theorie die in de hier gegeven interpretatie juist blijven, toch niet in staat zouden zijn af te leiden. In het bijzonder stellen de beschikbare deductiemiddelen ons niet in staat om formules, waar een quantificator voor staat, die zich over de gehele formule uitstrekt, "af te breken". Dergelijke formules worden nu juist zeer belangrijk, omdat ze de plaats innemen van formules met vrije veranderlijken. Er zal dus een verruiming van de deductieregels moeten worden aangenomen, die bestaat in het plaatsen van generalisatoren voor praemissen en conclusie. Hiermee mag evenwel niet zo ver worden gegaan, dat onjuiste resultaten van het karakter van formule (1) te voorschijn komen. Globaal gesproken komt het hierop neer, dat voorzichtigheid moet worden betracht, waar individuenveranderlijken van het toneel verdwijnen in de conclusie, die in een of meer van de praemissen wel aanwezig waren.

In de eerste plaats moeten we onze aandacht richten op de deductieregels

(6) $$\frac{A(x) \rightarrow B}{(\exists x) A(x) \rightarrow B}$$

(7) $$\frac{A \rightarrow B(x)}{A \rightarrow (\forall x)\ B(x)}$$

dat zijn die regels welke als nieuwe aan die van de uitspraakrekening worden toegevoegd. Deze bevatten immers een vrije veranderlijke in de praemisse. We kunnen deze praemisse binden met generalisator en krijgen dan een deductie, die geldig blijft in de hier bedoelde interpretatie:

(8) $$\frac{(\forall x)[A(x) \rightarrow B]}{(\exists x)\ A(x) \rightarrow B}$$

(9) $$\frac{(\forall x)[A \rightarrow B(x)]}{A \rightarrow (\forall x)\ B(x)}$$

De substitutieregel moet in die zin worden gewijzigd, dat als door de substitutie een formule ontstaat, die vrije individuenveranderlijken bevat, deze alle gebonden moeten worden met generalisatoren over de hele formule. Zo ontstaat uit $p \to p$ door substitutie van $f(x)$ voor p de formule $(\forall x)[f(x) \to f(x)]$.

De conclusieregel vereist de meeste omzichtigheid. We mogen b.v. wel schrijven

(10) $$\frac{(\forall x)\ A(x)\ ,\ (\forall x)[A(x) \to B(x)]}{(\forall x)\ B(x)}$$

waarin $B(x)$ werkelijk van x afhangt, maar niet:

(11) $$\frac{(\forall x)\ A(x)\ ,\ (\forall x)[A(x) \to P]}{P}$$

Het onderscheid maken tussen formules die wel of niet van een veranderlijke afhangen, betekent geen nieuwe onderscheiding, want deze was bij de deducties (6) en (7) en ook bij een goede formulering van de substitutieregel ook al nodig.

Een essentieel punt komt nog naar voren als we (6) nog eens in het oog vatten. In de gebruikelijke opbouw was ook

(12) $$\frac{A(x) \to B}{(\forall x)A(x) \to B}$$

toegelaten, immers (12) was zwakker dan (6). Nu is echter (12) niet meer toelaatbaar in zijn nieuwe vorm

(13) $$\frac{(\forall x)[A(x) \to B]}{(\forall x)A(x) \to B}$$

hetgeen o.m. blijkt uit het feit dat met behulp van (13) en de gewone conclusieregel (zonder generalisatoren), de onjuiste deductie (11) onmiddellijk gevonden wordt. Maar inderdaad is nu (12) ook niet meer zwakker dan (6), omdat (1) zijn geldigheid verloren heeft.

We geven tenslotte nog als voorbeeld van een afleiding, die van de formule:

(14) $$(\forall x)[f(x) \to g(x)] \to .\ (\forall x)\ f(x) \to (\forall x)\ g(x).$$

$$\frac{(\forall y)[(\forall x)\ f(x) \to f(y)]\quad (4)}{}\ \text{subst.} \qquad \frac{p \to .q \to r : \to : q. \to .p \to r}{}\ \text{subst.}$$

$$\frac{(\forall y)\ [(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to .f(y) \to g(y)],\ (\forall y)[(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to . \to .f(y) \to g(y) : \to : f(y) \to .(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to g(y)]}{(\forall y)[f(y) \to .(\forall x)\ \{f(x) \to g(x)\} \to g(y)]\ (15)}\ (10)$$

$(\forall y)[(\forall x)\ f(x) \to f(y)]$ (4) $\qquad \underline{p \to .q \to p \wedge q}$ subst.

$$(\forall y)[(\forall x)\ f(x) \to f(y) . \to : f(y) \to .(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to g(y) : \to : (\forall x)\ f(x) \to f(y) . \wedge : f(y) \to . \to .(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to g(y)]$$

———————————————————— (10)

(15) $$(\forall y)[f(y) \to .(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to g(y) : \to : (\forall x) f(x) \to f(y) . \wedge : f(y) \to .(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to g(y)]$$

———————————————————— (10)

$(\forall y)[(\forall x) f(x) \to f(y) . \wedge : f(y) \to . \to .(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to g(y)]$ $\qquad \underline{p \to q . \wedge . q \to r . \to . p \to r}$ subst.

$$(\forall y)[(\forall x)\ f(x) \to f(y) . \wedge : f(y) \to . \to .(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to g(y) : \to : (\forall x) f(x) \to . \to .(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to g(y)]$$

———————————————————— (10)

$(\forall y)[(\forall x)\ f(x) \to .(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to g(y)]$ $\qquad \underline{p \to .q \to r : \to . p \wedge q \to r}$ subst.

$$(\forall y)[(\forall x)\ f(x) \to .(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to g(y) : \to . \to .(\forall x)\ f(x) \wedge (\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to g(y)]$$

———————————————————— (10)

$\underline{(\forall y)[(\forall x)\ f(x) \wedge (\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to g(y)]}$ (9)

$\underline{(\forall x)\ f(x) \wedge (\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to (\forall y)\ g(y)}$ uitsp.rek.

$\underline{(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to .(\forall x)\ f(x) \to (\forall y)\ g(y)}$

$(\forall x)\{f(x) \to g(x)\} \to .(\forall x)\ f(x) \to (\forall x)\ g(x).$