STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950-016

Over driehoeken waarin een hoek een geheel veelvoud is van een andere hoek

H.J.A. Duparc

1950

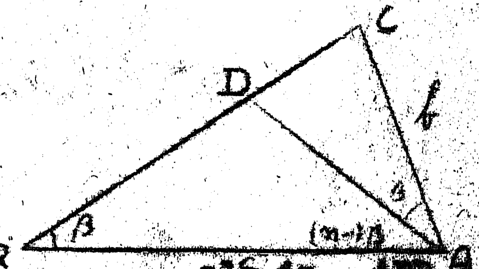
H. J. A. Duparc

Over driehoeken waarin een hoek een geheel veelvoud is van een andere hoek.

Beschouw een $\triangle$ ABC met de eigenschap $\alpha = n\beta$ (de zijden van de driehoek worden aangegeven door a, b en c de corresponderende hoeken door α, β en γ).

Indien hierin geldt $\alpha = n\beta$, bestaat er een relatie tussen de zijden, die wij aangeven met $f_n(a,b,c)=0$. Zo luidt f_1 b.v. $f_1(a,b,c)=a-b$.

Het is niet moeilijk om de vorm f_n te bepalen, zodra f_{n-1} bekend is. Teken daartoe in $\triangle$ ABC, waarin $\alpha = n\beta$, een rechte door A zodanig, dat $\angle$ CAD $= \beta$, dus $\angle$ DAB $= (n-1)\beta$.



Dan heeft men

$AD = \frac{bc}{a}$, $CD = \frac{b^2}{a}$, dus $BD = \frac{a^2-b^2}{a}$

In $\triangle$ ABC geldt dan en slechts dan $f_n(a,b,c)=0$, als in $\triangle$ ABD geldt $f_{n-1}(a',b',c')=0$, waarin a', b' en c' de lengten der zijden van $\triangle$ ABD voorstellen. Men heeft dus:

$$f_n(a,b,c) = K\, f_{n-1}(a',b',c') = K\, f_{n-1}\left(\frac{a^2-b^2}{a}, \frac{bc}{a}, c\right)$$
$$= K_1 f_{n-1}(a^2-b^2, bc, ac)$$

Het laatste gelijkteken geldt wegens het homogene karakter van de vormen (waarvan men zich hetzij direct, hetzij door volledige inductie kan overtuigen).

Wij vinden dus

$$f_n(a,b,c) = K_1 f_{n-1}(a^2-b^2, bc, ac).$$

<u>Voorbeelden</u>. Zoals al opgemerkt is, is

$$f_1(a,b,c) = a-b$$

Dus

$$f_2(a,b,c) = K_2\, f_1(a^2-b^2, bc, ac) = K_2(a^2-b^2-bc)$$

Neem

$$f_2(a,b,c) = a^2-b^2-bc$$

Verder $f_3(a,b,c) = K_3 f_2(a^2-b^2-bc,\ ac) = K_3\{(a^2-b^2)^2 - b^2c^2 - abc^2\}$

$$= K_3(a+b)\{(a+b)(a-b)^2 - bc^2\}$$

Neem

$$f_3(a,b,c) = (a+b)(a-b)^2 - bc^2$$

Verder

$$f_4(a,b,c) = K_4 f_3\{(a^2-b^2),\ bc,\ ac\}$$

$$= K_4\{(a^2-b^2+bc)(a^2-b^2-bc)^2 - bc.a^2c^2\}$$

$$= K_4\{(a^2-b^2)^3 - (a^2-b^2)^2bc - (a^2-b^2)b^2c^2 + b^3c^3 - a^2bc^3\}$$

$$= K_4(a^2-b^2)\{(a^2-b^2)^2 - (a^2-b^2)bc - b^2c^2 - bc^3\}$$

Neem $f_4(a,b,c) = (a^2-b^2)^2 - (a^2-b^2)bc - (b+c)bc^2$

Verder

$$f_5(a,b,c) = K_5 f_4(a^2-b^2,\ bc,\ ac)$$

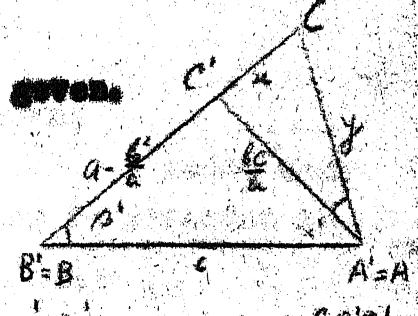
$$= K_5\{(a^2-b^2-bc)^2(a^2-b^2+bc)^2 - abc^2(a^2-b^2+bc)(a^2-b^2-bc) - a^2bc^4(a+b)\}$$

$$= K_5(a^2-b^2)\{(a^2-b^2)^3 - 2b^2c^2(a^2-b^2) - abc^2(a^2-b^2) - b^2c^4 - abc^4\}$$

$$= K_5(a-b)(a+b)^2\{(a+b)^2(a-b)^3 - 2b^2c^2(a-b) - abc^2(a-b) - bc^4\}$$

Neem $f_5(a,b,c) = (a+b)^2(a-b)^3 - bc^2(a+2b)(a-b) - bc^4$

Het is gemakkelijk zich van de extra factoren $a+b$ en $a-b$, die bij de bepaling der vorm f_n uit f_{n-1} optreden, rekenschap te geven.



Laten we een $\triangle A'B'C'$ met zijden

$a' = a - \frac{b^2}{a}$, $b' = \frac{bc}{a}$, $c' = c$

beschouwen, waarin $\alpha' = (n-1)\beta'$

Onderstel, zoals steeds, $a \neq 0$

Maak $\angle(A'C', \ldots) = \beta'$ Zo ontstaat een driehoek $A'B'C$ met $\alpha = \angle CA'B' = n\beta$ $(\beta = \beta')$; hierin is ondersteld dat $A'C$ en $B'C$ niet samenvallen.

Ligt C' niet op $B'A'$ F), dan zijn de rechten $A'C$ en $B'C$ verschillend, dus C is vastgelegd. Het geval dat C' op $B'A'$ ligt, worde dus apart bekeken.

Op grond van gelijkvormigheid ($\triangle CB'A' \sim \triangle CA'C'$) heeft men

F) dus A' niet op $B'C'$

$x : y = \frac{bc}{a} : c$; $y : (a - \frac{b^2}{a} + x) = \frac{bc}{a} : c$

dus

$$cx = \frac{bcy}{a} ; \quad cy = bc - \frac{b^3c}{a^2} + \frac{bcx}{a} = bc - \frac{b^3c}{a^2} + \frac{b^2cy}{a^2}$$

derhalve $cy(a^2-b^2) = cb(a^2-b^2)$. Hieruit volgen de gevallen

1.° c=0 Dan liggen echter A', B' en C' wel collineair, zelfs vallen deze punten dan samen, zodat men dan tevens heeft $B'C'=0$ dus $a^2=b^2$. (zie 4.)

2.° $a^2=b^2$. Ook in dit geval zijn A', B' en C' collineair (zie 4.)

3.° y=b, dus $x=\frac{b^2}{a}$ waaruit volgt dat de zijden van $\triangle A'B'C'$ resp. gelijk zijn aan a, b en c en dat twee hoeken voldoen aan $\alpha = n\beta$ In dit geval levert f_{n-1} dus de gezochte relatie f_n

4.° beschouwt men het geval dat A', B', C' collineair zijn slechts het geval $\alpha'=\beta'=0$. dus. Dan heeft men wegens $\alpha'=(n-1)\beta'$

$$a - \frac{b^2}{a} + \frac{bc}{a} = c$$

derhalve $a^2-b^2=c(a-b)$ In dit geval vindt men $a+b=c$ of $a=b$

Wenst men driehoeken te construeren met $\alpha=n\beta$, dan kan men uitgaan van een willekeurige hoek $\beta<\frac{\pi}{n+1}$ en daardoor $\alpha=n\beta$ construeren, waarna een driehoek met de gevraagde eigenschap bepaald (geconstrueerd) is.

Wenst men rationale driehoeken te vinden met de gevraagde eigenschap (een driehoek heet rationaal, als de verhouding zijner zijden rationaal is), dan merke men op, dat men alle rationale punten (x,y,z) der vlakke kromme $f_n(x,y,z)=0$ diene te bepalen.

Deze vindt men als volgt.

In een rationale driehoek zijn, wegens de cosinus regel, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ rationaal, dus $\sin\alpha, \sin\beta$ en $\sin\gamma$ zijn van de gedaante $r\sqrt{m}$, waarin r en m rationaal zijn. Wegens $tg\,\varphi/2 = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$ zijn dan $tg\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\beta}{2}$ en $tg\frac{\gamma}{2}$ ook van de gedaante $r\sqrt{m}$.

Stel nu $tg\frac{\beta}{2}=\sqrt{t}$, dan zijn $tg\frac{\alpha}{2}=tg\frac{n\beta}{2}$ en $tg\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{(n+1)\beta}{2}$ van de gedaante $r\sqrt{t}$ (r rationaal), zodat wegens $\sin\varphi=\frac{2\,tg\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}}$ men vindt $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma = a'\sqrt{t}:b'\sqrt{t}:c'\sqrt{t}$, zodat voor (x,y,z) een rationale parameter voorstelling is gevonden in t.

Voorbeeld $t=\frac{1}{7}$; $n=3$ $tg\frac{\beta}{2}=\frac{1}{7}\sqrt{7}$ $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{7}\sqrt{7}$, $tg\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{21}\sqrt{7}$

$\sin\alpha=\frac{5\sqrt{7}}{16}$; $\sin\beta=\frac{1}{4}\sqrt{7}$; $\sin\gamma=\frac{3}{32}\sqrt{7}$ dus bv. a=10, b=8, c=3.

In het proefschrift van J.H.J. Almering *) worden speciaal figuren bestudeerd, die uit driehoeken bestaan, waarin de tangenten der halve hoeken zelf, of eerst na kwadraatsverheffing, rationaal zijn en op blz. 26 en 71 geeft hij het voorbeeld van een driehoek ABC met a=10, b=3, c=8 en $\alpha=3\gamma$

Wenst men ten slotte de gedaante van de vorm f_n direct te vinden, dan kan men als volgt te werk gaan. Uit de formule van de Moivre volgt

$$\cos n\beta = R(\cos\beta + i\sin\beta)^n$$

$$= \cos^n\beta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\beta\,\sin^2\beta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\beta\,\sin^4\beta - \ldots$$

dus

$$\frac{-a^2-b^2+c^2}{2bc} = \left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}\right)^n - \binom{n}{2}\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}\right)^{n-2}\left[1-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}\right)^2\right]$$

$$+\binom{n}{4}\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2ab}\right)^{n-4}\left[1-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}\right)^2\right]^2.$$