STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 016

Over de rang van een matrix

H.J.A. Duparc

1951

Rapport ZW 1951-016.

Over de rang van een matrix.

H.J.A.Duparc.

Zij gevraagd de rang der quadratische matrix (e_{rs}) van de orde n te berekenen, waarin

$e_{rs} = a_r a_s$ voor $r \neq s$;

$e_{rs} = a_r^2 - 1$ voor $r = s$;

hierbij voldoen de getallen $a_1, \ldots, a_n$ aan de relatie $\sum_{r=1}^{n} a_r^2 = 1$.

Allereerst merken wij op, dat de rang $\leq n-1$ is, want de determinant $|e_{rs}| = 0$. Immers, vermeerdert men de met a_1 vermenigvuldigde eerste kolom van de determinant met de met a_2 vermenigvuldigde tweede kolom, met de met a_3 vermenigvuldigde derde kolom, . . . , tenslotte met de met a_n vermenigvuldigde n^e kolom, dan komt in de r^e rij en 1^e kolom een element te staan met de waarde

$$a_1^2 a_r + a_2^2 a_r + \ldots + a_n^2 a_r - a_r = 0.$$

Dus $a_1 |e_{rs}| = 0$; evenzo $a_2 |e_{rs}| = 0$, , $a_n |e_{rs}| = 0$.
Daar niet alle $a_1, \ldots, a_n$ gelijk aan nul zijn

(immers $\sum_{r=1}^{n} a_r^2 = 1$),

vindt men $|e_{rs}| = 0$.

Wij beschouwen thans de minor E_n van het element e_{nn}.
Vermeerdert men de met a_1 vermenigvuldigde 1^e kolom van E_n met de met a_2 vermenigvuldigde tweede kolom, . . . , de met a_{n-1} vermenigvuldigde $(n-1)^e$ kolom, dan komt in de r^e rij en 1^e kolom een element te staan met de waarde

$$a_1^2 a_r + a_2^2 a_r + \ldots + a_{n-1}^2 a_r - a_r = -a_n^2 a_r.$$

Dus

$$a_1 E_n = -a_n^2 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 a_2 & \ldots & a_1 a_{n-1} \\ a_2 & a_2^2 - 1 & \ldots & a_2 a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_2 a_{n-1} & \ldots & a_{n-1}^2 - 1 \end{vmatrix}.$$

Vermindert men in de laatste determinant de 2^e kolom met $a_2 \times$ de eerste, . . . , de $(n-1)^2$ met de $a_{n-1} \times$ de eerste, dan vindt men

$$a_1 E_n = -a_n^2 \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n-1} & 0 & & -1 \end{vmatrix} = (-)^{n-1} a_1 a_n^2 .$$

$a_1 \neq 0$, dan is $E_n = (-)^{n-1} a_n^2$

$a_1 = 0$, maar een der andere grootheden $a_2, \ldots, a_{n-1}$, bv $a_t \neq 0$, dan vindt men hetzelfde resultaat door de hierboven met de 1^e kolom verrichte bewerking op de t^e kolom toe te passen.
Zijn $a_1, \ldots, a_{n-1}$ allen nul, dan is $a_n^2 = 1$ en men heeft

$$|e_{rs}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

, dus ook dan $E_n = (-)^{n-1} = (-)^{n-1} a_n^2$.

Evenzo $E_s = (-)^{n-1} a_s^2 \quad (s = 1, \ldots, n-1)$. Daar één der grootheden $a_1, \ldots, a_n$ van nul verschilt, is er een s met $E_s \neq 0$, dus de rang van (e_{rs}) is juist $n-1$.