STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1953 - 016

Over de afgeleide van $f(x) = x^k(1-x)^m$

C.G. Lekkerkerker

1953

Over de afgeleide van $f(x) = x^k(1-x)^m$

door C.G. Lekkerkerker.

Gegeven twee natuurlijke getallen k en m met $k > m$ en de functie $f(x) = x^k(1-x)^m$ $(0 < x < 1)$. Deze functie heeft een maximum in het punt $x_0 = \frac{k}{k+m}$ en is stijgend voor $0 < x < x_0$ en dalend voor $x_0 < x < 1$. Door de afdeling Statistiek werd ons de volgende vraag voorgelegd. Indien x_1 en x_2 twee getallen zijn met

(1) $\quad 0 < x_1 < x_2 < 1 \;,\; f(x_1) = f(x_2),$

is dan voldaan aan de ongelijkheid

(2) $\quad f'(x_1) < - f'(x_2).$

Het blijkt dat deze vraag bevestigend beantwoord moet worden, ook indien k en m willekeurige positieve getallen zijn met $k > m$.

Bewijs. Stel

(3) $\quad \frac{k}{m} = t \;,\; \frac{1-x_1}{1-x_2} = \alpha \;,\; \frac{x_2}{x_1} = \beta \;.$

Dan geldt

$$t > 1, \quad \alpha > 1, \quad \beta > 1.$$

Uit (1) volgt

$$x_1^k\,(1-x_1)^m = x_2^k\,(1-x_2)^m,$$

ofwel

(4) $$\alpha = \beta^t .$$

Wegens $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x} - \frac{m}{1-x}$

is (2) gelijkwaardig met

$$k\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) < m\left(\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2}\right),$$

ofwel

$$\frac{k}{m} < \frac{x_1}{1-x_1} \cdot \frac{1+\frac{1-x_1}{1-x_2}}{1+\frac{x_1}{x_2}}$$

Uit de laatste twee betrekkingen (3) kunnen we x_2 elimineren en daarna $\frac{x_1}{1-x_1}$ uitdrukken in α en β. En wel vinden we

$$1-x_1 = \alpha(1-\beta x_1),$$

dus $$x_1 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta},$$

dus $$\frac{x_1}{1-x_1} = \frac{1}{\alpha} \frac{1-\alpha}{1-\beta} .$$

Bijgevolg is (2) gelijkwaardig met

$$t < \frac{1}{\alpha} \frac{1-\alpha}{1-\beta} \cdot \frac{1+\alpha}{1+\frac{1}{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha^2-1}{\beta^2-1} .$$

Letten we op (4), dan zien we dat bewezen moet worden

$$t < \beta^{1-t} \frac{\beta^{2t}-1}{\beta^2-1} ,$$

ofwel

(5) $$\beta - \frac{1}{\beta} < \frac{\beta^t - \beta^{-t}}{t} .$$

Voor $x > 0$ neemt $\frac{\text{sh } x}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$ monotoon toe met x. Hetzelfde geldt voor

$$\frac{\text{sh } cx}{x} = \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2x} ,$$

als c een positieve constante is. Wegens $\beta > 1$ mogen we kiezen $c = \log \beta$. Derhalve is het rechterlid van (5) een monotoon toenemende functie van t. Daar voor t=1 beide leden van (5) aan elkaar gelijk zijn, is hiermee bewezen dat aan (5) is voldaan voor alle waarden van β en t met $\beta > 1$, $t > 1$. Daarmee is de bewering aangetoond.