MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFD. TOEGEPASTE WISKUNDE

MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM-O.

TELEF. 51660-56643

Enige randproblemen met een scheve afgeleide.

Voordracht door Dr H.A.Lauwerier in de serie Actualiteiten, gehouden op Zaterdag 27 November 1954.

§1. Onder een scheve afgeleide van $f(x,y)$ verstaan we

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\right\}_{\omega} = \cos\omega\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\omega\,\frac{\partial f}{\partial y} . \tag{1.1}$$

De hoek ω heet de richting van de afgeleide. De scheve afgeleide in de richting ω in een punt $P_0(x_0,y_0)$ kan worden verkregen als de limiet van

$$\lim_{P\to P_0} \frac{f(P)-f(P_0)}{PP_0} ,$$

waarbij P op de lijn $x = x_0+t\cos\omega$, $y = y_0+t\sin\omega$ ligt.

Indien f het reële deel van een complexe analytische functie is, dus

$$w(z) = f(x,y) + i\,g(x,y) \quad , \; z = x+iy, \tag{1.2}$$

is

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\right\}_{\omega} = \mathrm{Re}\left\{e^{i\omega}\frac{dw}{dz}\right\}. \tag{1.3}$$

Beschouw nu een contour C. In elk punt van C kan de scheve afgeleide betrokken worden op de coördinaten x,y van het gebruikte assenstelsel, maar het is vaak voordeliger de tangent en de normaal als hoofdrichtingen te kiezen. Duiden we de tangentiële afgeleide aan met $\frac{\partial}{\partial s}$ en de normaal afgeleide (rechts van de kromme) met $\frac{\partial}{\partial n}$ dan is

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial(n,s)}\right\}_{\omega} = \cos\omega\,\frac{\partial f}{\partial n} + \sin\omega\,\frac{\partial f}{\partial r} \tag{1.4}$$

Geldt weer (1.2) en is ν de richting van de normaal, dan is

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial(n,s)}\right\}_{\omega} = \mathrm{Re}\left\{e^{(\nu+\omega)i}\,\frac{dw}{dz}\right\} . \tag{1.5}$$

§2. Een karakteristiek probleem met een scheve afgeleide is het volgende

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{in gebied } S, \tag{2.1}$$

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial(n,s)}\right\}_{\omega} = h(z) \qquad \text{op rand } C. \tag{2.2}$$

We vermelden als bijzondere gevallen

a. $\omega = \frac{\pi}{2}$ Probleem van Dirichlet.

b. $\omega = 0$ Probleem van Neumann.

c. $\omega = \frac{\pi}{2}$ op deel C_1 van C, $\omega = 0$ op deel $C_2 = C - C_1$.
Gemengd probleem.

§3. Problemen met scheve randvoorwaarden(2,2)komen voor in de hydrodynamica bij de getijdentheorie en in de electriciteitstheorie bij de verschijnselen optredend bij een gekruist electrisch en magnetisch veld (Hall-effect).

Beschouw b.v. een vlak metalen plaatje waarin een electrisch veld met potentiaal V heerst en waarop loodrecht een magnetisch veld aangebracht is. Is $\vec{k}$ de eenheidsvector loodrecht op het plaatje dan is de stroomdichtheid J a.v. te schrijven

$$\vec{J} = -\alpha \nabla V - \beta V \times \vec{k} \qquad (3.1)$$

De constanten α en β hangen af van het medium en van het magnetische veld. De continuïteitsvergelijking is $\nabla \vec{J} = 0$ en de randvoorwaarde is $\vec{n} \cdot \vec{J} = 0$.

Indien $\nabla \alpha = \nabla \beta \times \vec{k}$ is V harmonisch en voldoet aan de rand aan een scheve randvoorwaarde n.l.

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial (n,s)}\right\}_{\omega} = 0 \quad , \qquad (3.2)$$

waarbij $\omega = \arg(\alpha + \beta i)$.

Het stationaire gedrag van een vlakke roterende zee kan beschreven worden door het stelsel

$$\begin{cases} \lambda u_1 - \Omega u_2 + g\,h\,\frac{\partial u}{\partial x} = W_1 \\ \lambda u_2 + \Omega u_1 + g\,h\,\frac{\partial u}{\partial y} = W_2 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad , \end{cases} \qquad (3.3)$$

waarbij x,y cartesiaanse coördinaten; u_1, u_2 componenten van de totale stroom; u verheffing van het wateroppervlak boven gemiddeld niveau; W_1, W_2 componenten van de windkrachten; λ wrijvingscoëfficiënt; Ω rotatiecoëfficiënt (Coriolis-kracht); g versnelling van de zwaartekracht; h de diepte.

Eliminatie van u_1 en u_2 uit (3.3) geeft

$$\Delta u = F(W_1, W_2), \qquad (3.4)$$

waarbij het rechterlid een bekende functie is, n.l. een lineaire combinatie van de divergentie en de rotatie van de windvector (W_1, W_2). Voorlopig zij $F(W_1, W_2) = 0$ zodat u harmonisch is en beschouwd kan worden als het reële deel van een analytische functie $w(z)$.

Nu de randvoorwaarden. Aan de kust volgt de stroom de kustlijn. Is weer ν de richting van de normaal, dan is dus

$$u_1 \cos\nu + u_2 \sin\nu = 0.$$

Dit leidt voor u tot

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial(n,s)}\right\}_\omega = 0 \tag{3.5}$$

met $\omega = \arg\,(\lambda + \Omega i)$, of

$$\operatorname{Re}\left\{e^{(\nu+\omega)i}\,\frac{dw}{dz}\right\} = 0 \tag{3.6}$$

Aan de grens tussen een (ondiepe) zee en een (oneindig diepe) oceaan is $u = 0$ hetgeen impliceert dat

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0\,, \tag{3.7}$$

$$\operatorname{Re}\left\{e^{(\nu - \frac{\pi}{2})i}\,\frac{dw}{dz}\right\} = 0. \tag{3.8}$$

Om nu de vergelijking (3.4) met rechterlid op te lossen maken we op de bekende wijze gebruik van de tussenstap om een Greense functie te vinden welke aan de homogene vergelijking voldoet, maar die een logarithmische singulariteit bezit.

§4. a. Bepaal een Greense functie $G(x,y,\xi,\eta)$ in het bovenhalfvlak $y > 0$ met

$$\Delta G = 0\,, \tag{4.1}$$

waarbij $G(x,y,\xi,\eta) \backsim \ln\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ in (ξ,η), (4.2)

en met de randvoorwaarde

$$\left\{\frac{\partial G}{\partial(x,y)}\right\}_\omega = 0 \qquad y = 0. \tag{4.3}$$

Beschouw G als het reële deel van een analytische functie $w(z)$. De functie $\ln(z-\zeta)$ voldoet bijna. Spiegeling geeft de functie $\ln(z-\bar{\zeta})$. Een geschikte lineaire combinatie van deze twee blijkt te voldoen:

$$w = \ln(z-\zeta) - e^{-2\omega i}\ln(z-\bar{\zeta}) + \text{constante} \tag{4.4}$$

In reële notatie

$$G = \ln\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} - \cos 2\omega \ln\ (x-\xi)^2 + (y+\eta)^2 +$$
$$+ \sin 2\omega \operatorname{arctg}\frac{y+\eta}{x-\xi} + C. \tag{4.5}$$

b. Bepaal een Greense functie $G(x,y,\xi,\eta)$ in de strook $|x| < a$ met (4.1), (4.2) en

$$\left\{\frac{\partial G}{\partial(x,y)}\right\}_\omega = 0 \qquad \text{bij } x = \pm a. \tag{4.6}$$

Herhaalde toepassing van het spiegelingsprincipe leidt tot

$$w = \ln \sin \frac{z-\zeta}{4a}\pi - e^{-2\omega i} \ln \cos \frac{z+\bar{\zeta}}{4a}\pi + C. \qquad (4.7)$$

c. Het analoge probleem bij een cirkel b.v.

$$\left\{\frac{\partial G}{\partial (r,\varphi)}\right\}_{\omega} = 0 \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \qquad (4.8)$$

levert een kleine moeilijkheid op omdat volgens Gauss

$$\oint \frac{\partial G}{\partial n} ds = 2\pi \qquad (4.9)$$

Voor $\omega \neq \frac{\pi}{2}$ is het rechterlid van (4.9) wegens (4.8) gelijk aan 0 hetgeen betekent, dat er geen Greense functie met de eigenschap (4.2) bestaat. Het lukt wel wanneer we twee logarithmische singulariteiten met tegengestelde intensiteit toelaten. Aldus voldoet

$$w = \ln(z-\zeta_1)-\ln(z-\zeta_2)+e^{-2\omega i}\left\{\ln(1-1/\bar{\zeta}_1) - \right.$$
$$\left. -\ln(1-1/\bar{\zeta}_2)\right\} +C. \qquad (4.10)$$

§5. Beschouw nu een enkelvoudig samenhangend gebied R waarvan de grens C uit twee stukken C_1 en C_2 bestaat waarbij verschillende randvoorwaarden behoren.

$$C_1 \quad \left\{\frac{\partial G}{\partial (n,s)}\right\}_{\omega_1} = 0 \qquad (5.1)$$

$$C_2 \quad \left\{\frac{\partial G}{\partial (n,s)}\right\}_{\omega_2} = 0 \,.$$

Beschikkend over het machtige hulpmiddel van de conforme afbeelding kunnen we dit probleem terugbrengen tot een soortgelijke opgave voor een halfvlak b.v.

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\ \dfrac{dw}{dz} = 0 & y = 0 \quad x > 0 \\ \mathrm{Re}\ e^{i\omega} \dfrac{dw}{dz} = 0 & y = 0 \quad x < 0. \end{cases} \qquad (5.2)$$

Hieraan voldoet

$$\frac{dw}{dz} = z^{-\frac{\omega}{\pi}}\left\{\frac{\zeta^{\omega/\pi}}{z-\zeta} - \frac{\bar{\zeta}^{\omega/\pi}}{z-\bar{\zeta}}\right\}\varphi(z), \qquad (5.3)$$

waarbij $\varphi(z)$ een gehele functie is. Het hangt nu af van het gedrag op oneindig voor G wat voor $\varphi(z)$ gekozen moet worden. Is G logarithmisch oneindig voor $|z| \to \infty$ dan is $\varphi(z)$ juist een constante.

De functie

$$G = -\mathrm{Re} \int_z^{\infty} s^{-\frac{\omega}{\pi}}\left\{\frac{\zeta^{\omega/\pi}}{s-\zeta} - \frac{\bar{\zeta}^{\omega/\pi}}{s-\bar{\zeta}}\right\} ds. \qquad (5.4)$$

voldoet aan alle eisen en gedraagt zich in (ξ, η) als $\ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$.

§ 6. Een uitbreiding van het in § 5 bestudeerde probleem leidt tot het volgende. Men vraagt een functie $w(z)$ te bepalen welke analytisch in het bovenhalfvlak $y > 0$ is, aldaar in ζ een pool met residu 1 heeft en zich op de rand $y = 0$ a.v. gedraagt

$$x_{j+1} < x < x_j \qquad \mathrm{Re}\left\{e^{i\omega_j} w\right\} = 0 \qquad j = 0,1,\ldots n, \qquad (6.1)$$
$$x_n = -\infty \ , \quad x_0 = +\infty \ ,$$
$$\omega_{j+1} > \omega_j .$$

Hieraan voldoet

$$w = P(z)\left\{\frac{P^{-1}(\zeta)}{z-\zeta} - \frac{P^{-1}(\bar\zeta)}{z-\bar\zeta}\right\} \varphi(z), \qquad (6.2)$$

waarbij

$$P(z) = e^{-i\omega_0} \prod_1^n (z-x_j)^{\frac{\omega_{j-1}-\omega_j}{\pi}} \qquad (6.3)$$

en $\varphi(z)$ dezelfde betekenis heeft als in § 5.

Van belang is de index $k = \frac{\omega_n - \omega_0}{\pi}$.
In het algemeen zijn er $[k]+1$ lineair onafhankelijke oplossingen omdat voor $\varphi(z)$ de machten $1, z, \ldots z^{[k]}$ gekozen kunnen worden.

$\ln P(z)$ kunnen we schrijven als een Stieltjes integraal; $\omega_0 = 0$ kiezend is

$$\ln P(z) = \frac{1}{\pi} \int \ln(z-x)\, d\,\omega(x), \qquad (6.4)$$

waarbij $\omega(x) = \omega_j \qquad x_{j+1} < x < x_j$.

Indien $\omega(x)$ continu verandert, dus voor $y = 0$

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i\,\omega(x)}\, w\right\} = 0, \qquad (6.5)$$

en indien $\omega(\infty) = 0$ dan is eveneens de oplossing gegeven door (6.2) en de Stieltjes integraal (6.4).

Deze problemen staan in nauw verband met het probleem van Riemann-Hilbert dat in het boek "Singular integral equations" van Muskhelishvili behandeld wordt:

Bepaal een functie $\Phi(z)$ analytisch in een gebied R en continu in R+C (gebied +rand) zodanig dat op de rand

$$\mathrm{Re}(a+bi)\,\Phi = c \qquad (6.6)$$

waarbij a, b, c gegeven reële functies zijn.

Hilbert heeft dit probleem oorspronkelijk herleid tot een singuliere integraal vergelijking.

In het boek van Muskhelisvili wordt dit probleem opgelost voor cirkel en halfvlak waarbij voortdurend gebruik gemaakt wordt van Cauchy integralen van het type

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\log G(t)}{t-z}\,dt$$

waarbij $G(t)=\frac{-a+bi}{a+bi}$. Het verband tussen deze integraal en die van (6.4) is onmiddellijk duidelijk.

§7. Indien de gezochte functie niet meer aan de potentiaalvergelijking voldoet vervalt het analytische apparaat practisch en moeten andere wegen ingeslagen worden. Indien echter de gegeven differentiaalvergelijking veel op de potentiaalvergelijking lijkt, b.v.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=k^2 f \qquad (7.1)$$

kan men nog wel wat bereiken. Van de indirecte methoden vermelden wij
1. herleiding tot een (singuliere) integraalvergelijking.
2. iteratiemethoden.

Wij zullen ons hier echter beperken tot directe methoden waarbij een expliciete oplossing mogelijk is.

Beschouw b.v. het probleem om een Greense functie $G(x,y,\xi,\eta)$ te vinden welke in het bovenhalfvlak $y>0$ aan

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=G \qquad (7.2)$$

voldoet, bij (ξ,η) een singulariteit als (4.2) bezit en waarbij de scheve afgeleide in de richting ω op de rand $y=0$ nul is:

$$\cos\omega\frac{\partial G}{\partial x}+\sin\omega\frac{\partial G}{\partial y}=0 \qquad y=0 \qquad (7.3)$$

Een functie welke aan (7.2.) voldoet en welke de voorgeschreven singulariteit in (ξ,η) heeft is

$$K_0\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y-\eta|\,\mathrm{Ch}u+i(x-\xi)\mathrm{Sh}u}\,du. \qquad (7.4)$$

Om nu aan (7.3) te voldoen passen wij het spiegelingsprincipe toe en stellen wij

$$G=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-|y-\eta|\,\mathrm{Ch}u+i(x-\xi)\mathrm{Sh}u\right\}du+$$
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)\exp\left\{-(y+\eta)\mathrm{Ch}u+i(x-\xi)\mathrm{Sh}u\right\}du. \qquad (7.5)$$

Uit (7.3) volgt

$$\varphi(u)=-\frac{i\cos\omega\,\mathrm{Sh}u+\sin\omega\,\mathrm{Ch}u}{i\cos\omega\,\mathrm{Sh}u-\sin\omega\,\mathrm{Ch}u}=-\frac{\mathrm{Sh}(u-\omega i)}{\mathrm{Sh}(u+\omega i)}. \qquad (7.6)$$

8. Indien het beschouwde gebied een sector is kunnen we met behulp van de Laplacetransformatie de vergelijking (7.2) weer tot een potentiaalvergelijking herleiden en kan dus een expliciete oplossing verkregen worden.

In poolcoördinaten is n.l.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2}=G \tag{8.1}$$

Stel nu

$$\Gamma(s,\varphi)=\mathrm{Shs}\int_0^\infty e^{-r\mathrm{Chs}}\,G\,dr,$$

$$G(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{r\mathrm{Chs}}\,\Gamma(s,\varphi)\,ds, \tag{8.2}$$

dan gaat (8.1) over in

$$\frac{\partial^2\Gamma}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\varphi^2}=0 \tag{8.3}$$

Een scheve randvoorwaarde van het type

$$\cos\omega\,\frac{\partial G}{\partial\varphi}+r\sin\omega\,\frac{\partial G}{\partial r}=0 \qquad \varphi=\alpha \tag{8.4}$$

gaat hierbij over in

$$\cos\omega\,\frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi}-\sin\omega\,\frac{\partial}{\partial s}(\mathrm{Cth}\,s\Gamma)=0 \qquad \varphi=\alpha \tag{8.5}$$

Dit probleem kan nu met de theorie van § 6 opgelost worden.

Literatuur.

1. H.Poincaré, Leçons de mécanique céleste, 3 Paris (1910).

2. Volterra, Sulle corrente elettriche in una lamina metallica. Rend.Lincei,ser.V vol.24 (1915).

3. A.S.Peters, Water waves over sloping beaches. Comm.pure appl.Math.5 p.87-108 (1952).

4. Bouligand, Giraud, Delens, Le problème de la dérivée oblique. Actualités sci. et ind. Paris (1935).

5. D.Graffi, Sul problema della derivata obliqua. Bollettino della Unione Matematica It. III 4 p.378-382 (1952).

6. N.J.Muskhelishvili, Singular integral equations.Noordhoff (1953).