STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1956-016

Radicalen

"Actualiteiten"

Dr. W. Peremans

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Onderwerp: RADICALEN

door

Dr W. Peremans

26 mei 1956

In de literatuur zijn verscheidene definities gegeven voor het radicaal van een willekeurige ring, die echter geen van alle ten volle bevredigend zijn. We zullen deze radicaaldefinities hier niet bespreken, maar enige algemene opmerkingen maken over eisen, waaraan radicaaldefinities kunnen voldoen.

In het klassieke geval van hypercomplexe systemen (eindig-dimensionale algebra's over een lichaam) is het radicaal de vereniging van alle nilpotente linksidealen. In dit geval vertoont de restklassenring modulo het radicaal een regelmatige en eenvoudige structuur, die volledige klassificatie mogelijk maakt.

De klassieke theorie is zonder essentiële wijzigingen te generaliseren tot ringen, waarin de linksidealen aan de minimumvoorwaarde voldoen. Bovendien komt het op hetzelfde neer het radicaal te definiëren als de vereniging van alle linksnilidealen, d.w.z. linksidealen waarvan alle elementen nilpotent zijn.

Het doel van een radicaaldefinitie is het structuurprobleem van een ring in twee delen te splitsen, n.l. die van het radicaal zelf en die van de restklassenring modulo het radicaal. Het is de bedoeling dat deze restklassenringen (die in ieder geval zelf als radicaal het nulideaal zullen moeten hebben) een grotere mate van regulariteit vertonen, dan ringen in het algemeen.

We zullen nu voorlopig onder een <u>radicaaldefinitie</u> verstaan een toevoeging aan iedere ring A van een ideaal R(A) in A. In deze vorm is de definitie nog te algemeen om bruikbaar te zijn; we zullen er in het vervolg nog nadere beperkingen aan opleggen.

In de eerste plaats moeten we de uitdrukking "toevoeging aan iedere ring" nader preciseren. Daar de klasse van alle ringen een gevaarlijk begrip is en in ieder geval geen verzameling, waarop zonder meer functies kunnen worden gedefinieerd, moeten we vaststellen dat deze toevoeging in ieder geval alleen van het isomorfietype van de ring afhangt. Dat wil dus zeggen dat als φ een isomorfe afbeelding van de ring A op de ring B is, R(A) door φ op R(B) wordt afgebeeld. Dus

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

(1) $\varphi(A) = B$ en φ is isomorfie $\Rightarrow \varphi(R(A)) = R(B)$.

Dit houdt onder meer in dat $R(A)$ invariant moet zijn ten opzichte van alle automorfieën van A.

De gangbare radicaaldefinities worden op "algebraïsche"wijze vastgelegd en voldoen daardoor automatisch aan (1).

Op grond van het bovenstaande stellen we bovendien de eis:

(2) $R(A/R(A))=0$.

Om verdere condities op hun waarde te beoordelen zullen we voorbeelden gebruiken. Het zal daarbij spoedig nodig blijken voor deze voorbeelden ringen te kiezen, waarop de klassieke theorie niet van toepassing is. We zullen daarom voor deze voorbeelden een van de bestaande radicaaldefinities gebruiken. We kiezen daarvoor de radicaaldefinitie van Jacobson. Deze heeft het voordeel, dat zij de meest passende is voor algebra's, waarin door middel van een norm een metriek is vastgelegd, d.w.z. voor Banach-algebra's, zodat we kunnen putten uit het arsenaal van aan de analyse ontleende voorbeelden.

Het radicaal van Jacobson berust op het begrip "quasiregulier". Een element a van een ring A heet rechtsquasiregulier als er een $b \in A$ bestaat, zodat $ab+a+b=0$; b heet dan een rechtsquasi-inverse van a. Op analoge wijze definieert men linksquasiregulier en linksquasi-inverse. Een element a heet quasiregulier als het rechtsquasiregulier en linksquasiregulier is. In dat geval zijn de linksquasi-inverse en de rechtsquasi-inverse ondubbelzinnig bepaald en aan elkaar gelijk; dit element heet dan de quasi-inverse van a. Een rechtsideaal of linksideaal heet quasiregulier als al zijn elementen quasiregulier zijn. Het radicaal van Jacobson is de vereniging van alle quasireguliere linksidealen. Dit is een tweezijdig ideaal, dat tevens de vereniging van alle quasireguliere rechtsidealen is. Bovendien voldoet het aan (1) en (2). We zullen straks nog op het radicaal van Jacobson terugkomen.

De meest fundamentele operaties, die op ringen kunnen worden toegepast zijn het toepassen van homomorfe afbeeldingen, het vormen van deelringen en het vormen van directe sommen. Deze operaties zijn trouwens fundamenteel voor alle door identiteiten gedefinieerde algebraïsche structuren.

Het ligt voor de hand om te postuleren dat bij homomorfe afbeelding het radicaal van een ring overgaat in het radicaal van het beeld van de ring. Als dus ψ de ring A homomorf op de ring B afbeeldt, zou $\psi(R(A)) = R(B)$ moeten zijn. Op grond van (1) en de homomorfiestelling kunnen we deze eis ook voor één ring formuleren. Als het ideaal J de kern van ψ is, is B isomorf met A/J en wel op grond van een isomorfe afbeelding χ, die vastgelegd is door $\chi\vartheta = \psi$, waarin ϑ de kanonieke homomorfie van A op A/J is. Op grond van (1) is dan $R(B) = \chi(R(A/J))$, dus $\chi(\vartheta(R(A))) = \chi(R(A/J))$, dus $R(A/J) = \vartheta(R(A)) = (R(A),J)/J$. Dus

(3) $R(A/J) = (R(A), J)/J$, als J een ideaal in A is.

Het is echter aan een eenvoudig voorbeeld te zien, dat (3) niet vervuld is voor het radicaal van Jacobson. Neem hiertoe voor A de ring van de gehele getallen en $J=(4)$, dan is $R(A)=0$, dus $(R(A),J)/J=J/J=0$, maar A/J is de restklassenring mod 4, die $\{0,2\}$ als radicaal heeft. Dit is niet als een tekortkoming van het radicaal van Jacobson te beschouwen, daar bij iedere redelijke radicaaldefinitie het radicaal van de ring der gehele getallen nul moet zijn en de restklassenring mod 4 aan de eisen van de klassieke theorie voldoet.

De radicaaldefinitie van Jacobson voldoet echter wel aan de volgende verzwakking van (3):

(4) $(R(A),J)/J \subset R(A/J)$, als J een ideaal in A is.

Als n.l. $\bar{a}$ een element van $(R(A),J)/J$ is, is er een $b \in R(A)$ met $b \in \bar{a}$. Nu is het linksideaal $(b)_1$ voortgebracht door b quasiregulier. Het is echter duidelijk dat de kanonieke homomorfie van A op A/J het linksideaal $(b)_1$ afbeeldt op het door $\bar{a}$ in A/J voortgebrachte linksideaal en dat dit laatste linksideaal ook quasiregulier is. Dus $\bar{a} \in R(A/J)$.

Als we echter het geval beschouwen dat $J \subset R(A)$, dan geldt (3) wel voor het radicaal van Jacobson, dus

(5) $R(A/J) = R(A)/J$, als J een ideaal in A is en $J \subset R(A)$.

Op grond van (4) behoeven we alleen te bewijzen, dat $R(A/J) \subset R(A)/J$. Dit volgt echter direct uit de volgende hulpstelling:

Als $ab+a+b$ rechtsquasiregulier (resp. linksquasiregulier) is met rechtsquasi-inverse (resp. linksquasi-inverse) c, dan is a (resp. b) rechtsquasiregulier (resp. linksquasiregulier) met rechtsquasi-inverse $bc+b+c$ (resp. linksquasi-inverse $ca+c+a$).

Deze hulpstelling is triviaal te verifiëren.

Door $J=R(A)$ te nemen volgt uit (5) direct (2).

We beschouwen nu directe sommen. Deze vatten we op als directe vereniging in de zin van de abstracte algebra ten opzichte van optelling en vermenigvuldiging. Voor ringen komt dit, zoals bekend, hierop neer dat een ring A directe som is van de ringen B en C als de additieve groep van A directe som is in de zin van de groepentheorie van de additieve groepen van B en van C en als bovendien B en C elkaar annulerende idealen in A zijn. Als dan $a=b+c$ ($a \in A$, $b \in B$, $c \in C$), dan is a dan en slechts dan quasiregulier als b en c beide quasiregulier zijn. Hieruit volgt direct

(6) $R(A+B) = R(A) + R(B)$.

We beschouwen nu een deelring A_1 van A en vragen ons af in hoeverre

(7) $R(A_1) = A_1 \cap R(A)$ als A_1 een deelring van A is,

vervuld is. Dit blijkt niet het geval te zijn. Neem hiertoe voor A de volle 2×2 matrixring K_2 over een lichaam K, dan is $R(A)=0$. Voor A_1 nemen we de ring der matrices λC_{12} als λ het lichaam K doorloopt (C_{jk} stelt de matrix voor met een 1 op het snijpunt van de j^e rij en de k^e-kolom en elders nullen). In A_1 zijn alle elementen nilpotent, dus $R(A_1)=A_1$. In dit geval vinden we dus dat $A_1 \cap R(A) \subset R(A_1)$ met een echte inclusie. Dit voorbeeld blijft geheel binnen de klassieke theorie. Om een voorbeeld van de omgekeerde inclusie te geven moeten we buiten de klassieke theorie gaan, omdat voor ringen, waarvan de linksidealen aan de minimumvoorwaarde voldoen, de inclusie $A_1 \cap R(A) \subset R(A_1)$ algemeen geldig is, zoals makkelijk is in te zien.

We kiezen als voorbeeld een bekende ring uit de theorie der Banach-algebra's (zie E. Hille, Functional analysis and semi-groups, blz.478). Als elementen van de ring nemen we de complexe functies, die analytisch zijn voor $|z| < 1$ en continu voor $|z| \leq 1$. Voor de optelling nemen we de gewone optelling van functies; het product van twee functies f(z) en g(z) definiëren we als de functie

$$\int_0^z f(z-t)g(t)dt.$$

Het is makkelijk na te gaan, dat we op deze wijze een commutatieve ring A krijgen. Definiëren we bovendien

$$\|f\| = \max_{|z| \leq 1} |f(z)|,$$

dan is A een complexe Banach-algebra zonder eenheidselement. Voor het radicaal van Jacobson geldt nu $R(A)=A$. In iedere Banach-algebra geldt n.l., dat als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-a)^n$ convergeert, a quasiregulier is met quasi-inverse $b= \sum_{n=1}^{\infty}(-a)^n$. In ons geval is door volledige inductie makkelijk te bewijzen, dat

$$|f^n(z)| \leq \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!} \|f\|^n,$$

dus $\|f^n\| \leq \frac{1}{(n-1)!} \|f\|^n$; hierin stelt f^n natuurlijk de n^e macht voor van f ten opzichte van de hierboven gedefinieerde vermenigvuldiging. Hieruit volgt direct de convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} (-f)^n$ voor alle f ($\| \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n \| \leq \|f\| e^{\|f\|}$). Dus $R(A)=A$. Voor A_1 nemen we de polynomen in z; het is duidelijk dat deze een deelring van A vormen. De quasi-inversen van elementen van A_1 behoeven echter niet in A_1 te liggen; zo heeft de constante functie 1 als quasi-inverse $-e^{-z}$ en de functie z als quasi-inverse $-\sin z$. Dus $R(A_1) \neq A_1$; men kan zelfs bewijzen dat $R(A_1)=0$. In ieder geval geldt in dit geval $R(A_1) \subset A_1 \cap R(A)$ met een echte inclusie.

Het ligt nu voor de hand te vragen, wat er gebeurt als we voor A_1 een linksideaal of een rechtsideaal nemen. Als J een linksideaal in A is en a een in A quasiregulier element van J, dan ligt de quasi-inverse van a ook in J, zoals direct uit de definitie van quasi-inverse volgt. Verder is het door een element a van J voortgebrachte linksideaal $(a)_l$ in A uiteraard bevat in J. Stel nu dat $a \in J \cap R(A)$, dan ligt ieder element van $(a)_l$ in J en heeft een quasi-inverse, die in J ligt. Nu geldt voor het door a voortgebrachte linksideaal $(a)_{lJ}$ in J, dat $(a)_{lJ} \subset (a)_l$, dus $a \in R(J)$. Voor rechtsidealen gaat het betoog analoog omdat het radicaal van Jacobson ook met rechtsidealen kan worden gedefinieerd. We hebben dus gevonden:

(8) $J \cap R(A) \subset R(J)$, als J een linksideaal of een rechtsideaal in A is.

Deze inclusie kan in het klassieke geval al een echte inclusie zijn. Neem weer $A=K_2$, dan is $R(A)=0$. Neem voor J het linksideaal bestaande uit de matrices $\lambda C_{11}+\mu C_{21}$ ($\lambda, \mu \in K$). Het radicaal van J bestaat uit de matrices μC_{21} ($\mu \in K$); dus $R(J)\neq 0$. Dus $J \cap R(A) \subset R(J)$ met een echte inclusie.

Daar ringen met eenheidselement bijzonder belangrijk zijn, gaan we na wat er met het radicaal gebeurt bij formele adjunctie van een eenheidselement aan een ring A. We beschouwen daartoe paren (a,n) met $a \in A$, $n \in G$ (de ring der gehele getallen) en definiëren

$$(a,n) + (b,m) = (a + b,\ n + m),$$
$$(a,n)(b,m) = (ab + ma + nb, nm).$$

Het is makkelijk na te gaan, dat deze paren dan een ring A_1 vormen met eenheidselement $(0,1)$. Verder vormen de elementen $(a,0)$ een deelring van A_1 die isomorf is met A en die we gemakshalve met A identificeren. Verder is makkelijk na te gaan, dat (a,n) dan en slechts dan quasiregulier is, als hetzij $n=0$ en a quasiregulier in A, hetzij $n=-2$ en $-a$ quasiregulier in A. Hieruit leidt men direct af dat $R(A_1)=R(A)$.

(9) $R(A_1)=R(A)$ als A_1 uit A ontstaat door formele adjunctie van een eenheidselement.

Het radicaal van Jacobson laat zich, zoals bekend, ook nog op een andere wijze karakteriseren, n.l. als doorsnede van de maximale linksidealen M, die aan de volgende conditie voldoen: er is een $c \in A$, zodat $xc-x \in M$ voor alle $x \in A$. We beschrijven dit verband met behulp van de operatie $*$ gedefinieerd door $a * b=ab+a+b$. Deze operatie heeft de volgende eigenschappen.

<u>A</u>. $(a * b) * c = a * (b * c)$.

<u>B</u>. $(a+b) * c = a * c + b * c - c$.

<u>C</u>. $a * (b+c) = a * b + a * c - a$.

Als omgekeerd een algebraïsch systeem gegeven is met twee binaire operaties + en $*$, dat ten opzichte van + een commutatieve groep is en dat verder aan A,B en C voldoet, dan is dit systeem een ring ten opzichte van + en ten opzichte van de vermenigvuldiging gedefinieerd door $ab=a*b-a-b$. Uit A,B en C leidt men n.l. gemakkelijk af:

(10) $0*a = a*0 = a$.

(11) $(-a)*b = -a*b + 2b$.

(12) $a*(-b) = -a*b + 2a$.

(13) $(a-b)*c = a*c - b*c + c$.

(14) $a*(b-c) = a*b - a*c + a$.

Met behulp hiervan zijn de ringaxioma's gemakkelijk te verifiëren. Op grond van (10) is 0 het neutrale element ten opzichte van $*$. Quasi-regulariteit is dus gewone regulariteit ten opzichte van $*$. Het feit dat de quasi-inverse ondubbelzinnig bepaald is is met behulp van $*$ het standaardbewijs voor het overeenkomstige feit van een inverse: uit $a*b=0$ en $c*a=0$ volgt $c=c*0=c*(a*b)=(c*a)*b=0*b=b$.

Een deel van hetgeen we willen bewijzen kan zelfs onder zwakkere voorwaarden worden aangetoond. Laat in een additieve groep een operatie $\otimes$ gegeven zijn die voldoet aan:

(15) $a\otimes(b\otimes c) = (a\otimes b)\otimes c$.

(16) $a\otimes 0 = 0\otimes a = a$.

We definiëren $\otimes$-regulariteit op de voor de hand liggende wijze. Een ondergroep J heet een $\otimes$-linksideaal als de restklassengroep mod J de $\otimes$-operatie als linksoperatie toelaat, d.w.z. als $a\otimes(b+j)-a\otimes b \in J$ voor alle $a,b \in A$ en $j \in J$.

In het bijzonder volgt hieruit voor b=0, dat $a\otimes j-a \in J$ voor alle $a \in A$ en $j \in J$. De gewone som van twee $\otimes$-linksidealen is dan een $\otimes$-linksideaal en de doorsnede van willekeurig veel $\otimes$-linksidealen is een $\otimes$-linksideaal. Het heeft dus zin om te spreken van het $\otimes$-linksideaal voortgebracht door een element van A. Verder heet een $\otimes$-linksideaal J c-regelmatig ($c \in A$), als $a\otimes c-c \in J$ voor alle $a \in A$ (we noemen het ook regelmatig). Een $\otimes$-linksideaal dat het c-regelmatige $\otimes$-linksideaal J omvat is ook c-regelmatig.

Als Φ een collectie deelverzamelingen van A is met $A \in \Phi$, dan heet B een maximaal element van Φ als $B \in \Phi$ en als voor iedere $X \in \Phi$ met $B \subset X$ geldt X=B of X=A. Deze definitie wijkt af van de gebruikelijke in die zin, dat A zelf ook een maximaal element van Φ is. Het voordeel is, dat iedere Φ een maximaal element bezit (n.l. A) en dat het dus onder alle omstandigheden zin heeft om te spreken van de doorsnede van alle maximale elementen van Φ .

A zelf is een $\otimes$-linksideaal, dat c-regelmatig is voor alle $c \in A$. Een c-regelmatig $\otimes$-linksideaal J is dan en slechts dan =A, als $c \in J$.

Immers als $c \in J$, dan is $a * c - a \in J$ en $a * c - c \in J$, dus $a \in J$ voor alle $a \in A$.

Het $\otimes$-radicaal R van A wordt nu gedefinieerd als de verzameling van die elementen van A die een $\otimes$ regulier $\otimes$-linksideaal voortbrengen.

Verder noemen we S de doorsnede van alle maximale regelmatige $\otimes$-linksidealen.

Nu geldt $R \subset S$. Om dit te bewijzen is het blijkbaar voldoende om het volgende aan te tonen:

Als M een maximaal c-regelmatig $\otimes$-linksideaal is, als $a \in A$ en als $a \notin M$, dan is het door a voortgebrachte $\otimes$-linksideaal $(a)_1^{\otimes}$ niet $\otimes$-regulier.

<u>Bewijs</u>: Omdat $a \notin M$, is $M \neq A$, dus $c \notin M$. Wegens de maximaliteit van M is de som van M en $(a)_1^{\otimes}$ gelijk aan A, dus geldt $c = b + d$, $b \in M$, $d \in (a)_1^{\otimes}$. Voor alle $x \in A$ geldt nu $x \otimes d - c = x \otimes d - x \otimes (d+b) + x \otimes c - c \in M$, dus $x \otimes d \neq 0$. Dus d is niet $\otimes$-regulier.

De omgekeerde inclusie $S \subset R$ tonen we aan voor de operatie $*$. De volgende hulpstelling geldt zelfs voor $\otimes$.

Als alle elementen van een $\otimes$-linksideaal J $\otimes$-linksregulier zijn, dan is J $\otimes$-regulier.

<u>Bewijs</u>: Bij $a \in J$ bestaat een $b \in A$ met $b \otimes a = 0$. Hieruit volgt $-b = b \otimes a - b \in J$, dus $b \in J$. Dus is b $\otimes$-linksregulier en, wegens $b \otimes a = 0$, ook $\otimes$-rechtsregulier, dus $\otimes$-regulier met $\otimes$-inverse a. Dus is a $\otimes$-regulier.

Als $a \in A$ dan is de verzameling der elementen $x * a - a$ (x doorloopt A) een a-regelmatig $*$-linksideaal. In de eerste plaats is het een additieve groep want $x * a - a - (y * a - a) = (x-y) * a - a$. Verder geldt voor $b, c \in A$ dat $b * (c + x * a - a) - b * c = (b * x - b) * a - a$, dus is het een $*$-linksideaal, dat klaarblijkelijk a-regelmatig is.

Om nu $S \subset R$ aan te tonen nemen we een $a \in A$ met $a \notin R$, dan is $(a)_1^{*}$ niet $*$-regulier en bevat dus op grond van de zojuist bewezen hulpstelling een element b, dat niet $*$-linksregulier is. Als we nu aantonen dat $b \notin S$, dan geldt ook $a \notin S$. Het is dus voldoende de volgende bewering te bewijzen:

Als b niet $*$-linksregulier is, dan bestaat er een maximaal b-regelmatig $*$-linksideaal M met $b \notin M$.

<u>Bewijs</u>: Uit het gegeven volgt dat $x * b \neq 0$ voor alle $x \in A$. We vormen nu het b-regelmatige $*$-linksideaal J met elementen $x * b - b$ (x doorloopt A). Nu is $-b \notin J$, dus $b \notin J$. De collectie van de $*$-linksidealen van A die J omvatten en waarvan b geen element is, voldoet aan de voorwaarden van de stelling van Zorn en bevat dus een maximaal element M (hier is maximaal bedoeld in de zin van de partiële ordening door inclusie). Nu is M b-regelmatig, omdat $J \subset M$. Maar M is ook maximaal als $*$-linksideaal, want als K een $*$-linksideaal is met $M \subset K$ en $M \neq K$, dan geldt $b \in K$, maar tevens is K b-regelmatig, dus $K = A$. Dus voldoet M aan de gestelde

eisen.

Het $*$-radicaal is echter het radicaal van Jacobson, want $*$-regulier is hetzelfde als quasi-regulier en een $*$-linksideaal is hetzelfde als een gewoon linksideaal. Dit laatste volgt uit $a*(b+j)-a*b=a*j-a=aj+j$. Verder volgt uit $x*a-a=-(x(-a)-x)$, dat als we een gewoon linksideaal J a-regelmatig noemen als $xa-x \in J$ voor alle $x \in A$, dan blijkbaar een a-regelmatig $*$-linksideaal hetzelfde is als een -a-regelmatig gewoon linksideaal.

Hiermee is dus een bewijs gegeven van de bekende stelling, dat het radicaal van Jacobson de doorsnede is van alle maximale regelmatige linksidealen. Het bewijs wijkt niet essentieel af van het gangbare, maar is in een vorm gegoten, die de weg naar mogelijke generalisatie wijst.

We merken nog op, dat in een ring met eenheidselement e ieder linksideaal e-regelmatig is, waaruit volgt, dat in dat geval het radicaal van Jacobson de doorsnede is van alle maximale linksidealen.

We besluiten met een opmerking over de mogelijkheid om in een ring een met de gewone vermenigvuldiging samenhangende gewijzigde vermenigvuldiging in te voeren. Hiertoe gaan we uit van een endomorfie van de additieve groep van de ring, dat is dus een afbeelding φ van A in zichzelf, die voldoet aan $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$. Verder eisen we dat $\varphi(\varphi(ab)c)=\varphi(a\varphi(bc))$. Als we nu de nieuwe vermenigvuldigingsoperatie o invoeren door $a \circ b=\varphi(ab)$, dan geeft het stelsel operaties + en o weer een ringstructuur in A, die voor een radicaaldefinitie kan worden gebruikt, Op de consequenties hiervan gaan we niet in. We merken slechts op, dat als n een geheel getal is de afbeelding $\varphi(a)=na$ aan de eisen voldoet. In een matrixring zijn nog andere afbeeldingen mogelijk: als P en Q vaste matrices zijn met $P^2=Q^2=0$, dan voldoet ook $\varphi(X)=PXQ$ aan de eisen.