STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-017

De nulpunten van benaderende veeltermen van een gehele functie en zijn kanonieke representatie

"Actualiteiten"

J. Korevaar

1948

De nulpunten van benaderende veeltermen van een gehele functie en zijn kanonieke representatie.

Voordracht door J. Korevaar in de serie Actualiteiten, 27 November 1948.

(The zeros of polynomials converging to an entire function and its canonical representation).

Summary. In its simplest form the problem treated here is as follows. Let $\{f_n(z)\}$ be a sequence of polynomials converging uniformly in every finite domain. The limit function f(z) will be an entire function. Now if the polynomials $f_n(z)$ furthermore satisfy the condition that their zeros, for all n, lie in a certain (infinite) domain D, what can we say about f(z)?

The limit functions f(z) have been completely characterized before for the following domains D (See the survey by N. Obrechkoff [3] and compare § 1):

1. A half-line (essentially by E. Laguerre, completed by G. Pólya)
2. A sector with aperture $<\pi$ (Pólya)
3. A half-plane (Pólya and Obrechkoff)
4. A line (Laguerre and Pólya).

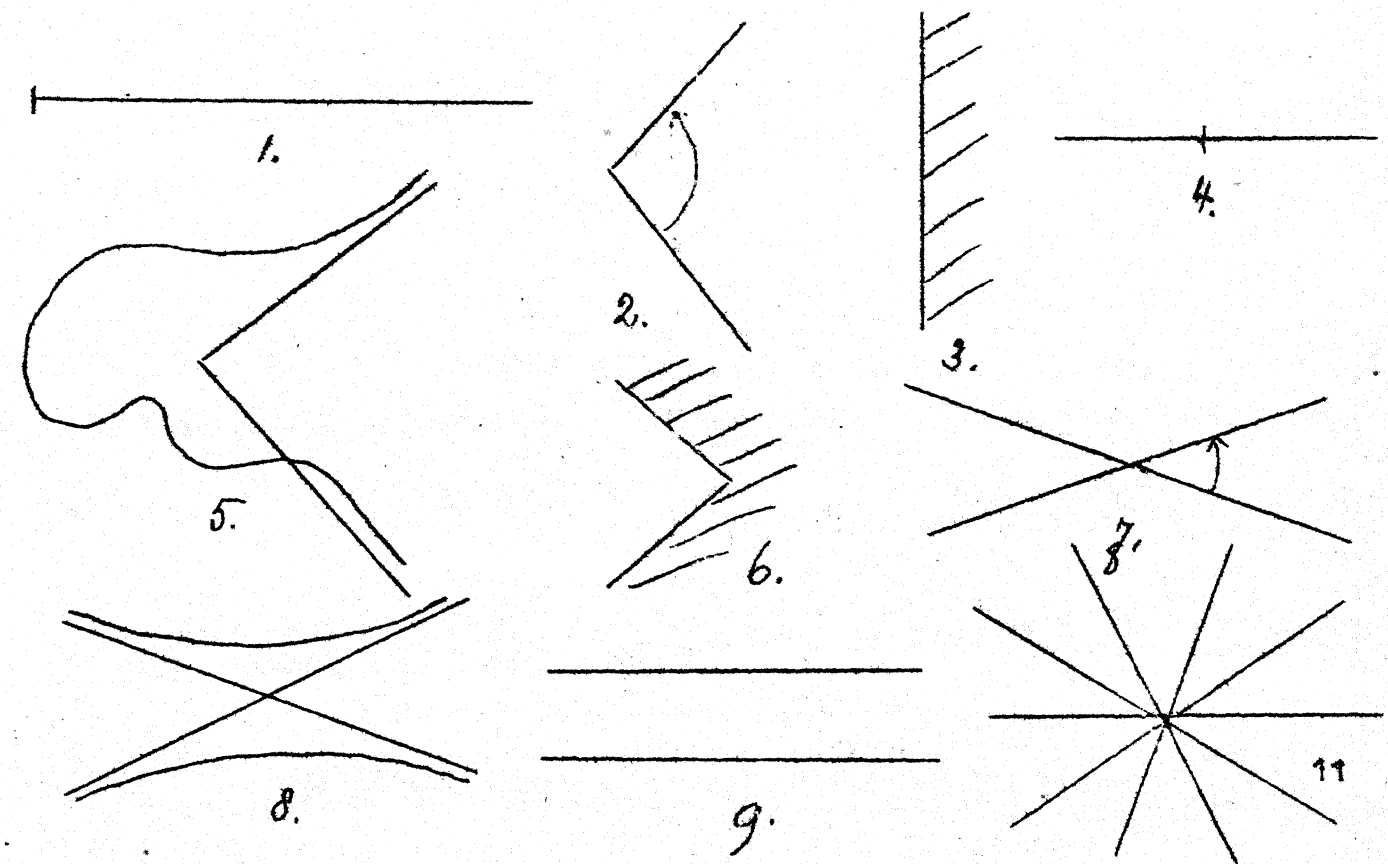
Here we shall give complete characterizations of the limit functions f(z) for the following domains D:

5. A domain "corresponding asymptotically" with a sector $<\pi$
6. A sector with aperture $>\pi$
7. A "double-sector" with aperture $<\frac{1}{2}\pi$
8. A domain "corresponding asymptotically" with such a double-sector
9. A strip ("corresponds asymptotically" with a line and is therefore a particular case of 8)
10. A "double-sector" with aperture $\frac{1}{2}\pi$ or $>\frac{1}{2}\pi$
11. The domain consisting of the k half-lines $\arg z = j(2\pi/k), |z| \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$
12. A domain consisting of k arbitrary half-lines starting from one point.

Just as Pólya's and Obrechkoff's theorems, our theorems are slightly more complicated than purely characterizing theorems would be. Our theorems are of the following form. Let $\{f_n(z)\}$ be a sequence of polynomials all zeros of which lie in D as before (Condition (Z)). Because of the restriction on the zeros of the $f_n(z)$ it will be unnecessary, in many cases, to suppose explicitly that the sequence $\{f_n(z)\}$ converges uniformly in every finite domain in order to be sure that f(z) will be an entire function. Thus we impose on $\{f_n(z)\}$ only weaker conditions of convergence, (C), which are chosen such that they imply uniform convergence in every finite domain in the particular

case D considered. We then make a statement on the form of the limit function f(z), which is a complete characterization in the sense that every entire function of that form is the uniform limit in every finite domain of a sequence of polynomials $f_n(z)$ all zeros of which lie in D. Our conditions (C) are related partly to older conditions, introduced by Pólya, partly to newer conditions given by O. Szász (See [4] and compare § 1).

For our methods of proof see § 2. The proofs of some of our theorems have been omitted; all proofs will be given in a Leyden thesis.



§ 1. Stellingen van E. Laguerre, G. Pólya, N. Obrechkoff en O. Szász.

Voor een uitvoerigere historische inleiding, dan hier wordt gegeven, zie men Obrechkoff [3] , waar men ook de literatuur tot 1941 vindt opgegeven.

Stelling 1 is in hoofdzaak afkomstig van Laguerre.

Stelling 1. Als de rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ voldoet aan

(Z_1) alle nulpunten van $f_n(z)$ zijn reëel en ≥ 0 ($n = 1, 2, 3, \ldots$),

(C_1) $\{f_n(z)\}$ convergeert uniform in elk eindig domein,

dan is de limietfunctie f(z) van de rij $\{f_n(z)\}$ een gehele functie van z, die te schrijven is in de gedaante

(1.1) $$A e^{az} z^m \prod_p{}' (1 - z/z_p),$$

waarin

(1.2) $a \leq 0$, m geheel ≥ 0 , $z_p > 0$, $\sum z_p^{-1} < \infty$.

In het volgende stelt C(r) voor de cirkel $|z| \leq r$ $(r > 0)$, $S(\alpha)$ de sector $|z| \geq 0, |\arg z| \leq \frac{1}{2}\alpha$ $(\alpha \geq 0)$. Stelling 2 is van Pólya.

Stelling 2. Als de rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ voldoet aan
(Z_2) alle nulpunten van $f_n(z)$ liggen in de sector $S(\alpha)$ $(n=1,2,3,\ldots)$,
waarin

(1.3) $$0 \leq \alpha < \pi$$

(C_2) $\{f_n(z)\}$ convergeert uniform in een cirkel $C(r)$,
dan geldt (C_1) steeds als de limietfunctie $f(z)$ van $\{f_n(z)\}$ in $C(r) \not\equiv 0$ is. De limietfunctie $f(z)$ is dus altijd geheel; hij heeft de gedaante (1.1) met

(1.4) $-a \in S(\alpha)$, m geheel ≥ 0, $z_p \in S(\alpha)$, $\sum_p |z_p|^{-1} < \infty$.

Omgekeerd is elke gehele functie van de gedaante (1.1) + (1.4) + (1.3) de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ die aan (Z_2) voldoet.

Het grensgeval $\alpha=\pi$ (halfvlak) is behandeld door Pólya en Obrechkoff.

Stelling 3. Als de rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ voldoet aan
(Z_3) alle nulpunten van $f_n(z)$ hebben niet-negatief reëel deel (n = 1, 2, 3,...),
en aan $(C_3) = (C_2)$, dan geldt (C_1) steeds als de limietfunctie $f(z)$ van $\{f_n(z)\}$ in $C(r) \not\equiv 0$ is. De limietfunctie $f(z)$ is dus altijd geheel; hij heeft de gedaante

(1.5) $$A\, e^{az+bz^2} z^m \prod_p (1-z/z_p)\, e^{z/z_p},$$

waarin

(1.6) $$\begin{cases} \Re(z_p^{-1}) \geq 0, \ \sum_p \Re(z_p^{-1}) \text{ convergeert met som } \leq -\Re(a), \\ b \text{ reëel} \geq 0, \ m \text{ geheel} \geq 0, \ \sum_p |z_p|^{-2} < \infty. \end{cases}$$

Omgekeerd is elke gehele functie van de gedaante (1.5) + (1.6) de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ die aan (Z_3) voldoet.

Uit een artikel van Szász [4] volgt

Stelling 4. Men kan in stelling 3 (C_3) vervangen door een van de volgende voorwaarden:
(C_4') $\lim_{n\to\infty} f_n^{(j)}(0) = j!\, a_j$ bestaat voor j = 0, 1, 2,..., en $a_0 \neq 0$,
(f(z) kan nu natuurlijk niet $\equiv 0$ zijn),
(C_4'') $\{f_n(z)\}$ convergeert in de punten van een verzameling E met een eindig verdichtingspunt; als niet in alle punten van E de limiet f(z) van $\{f_n(z)\}$ nul is, dan bestaan er constanten d_1, d_2 zó dat
$$0 < d_1 < |f_n(0)| < d_2,\ |f_n'(0)| < d_2,\ |f_n''(0)| < d_2,\ (n=1,2,3,\ldots).$$
(In plaats van C(r) leze men in stelling 3 nu E.)

Tot slot de volgende stelling van Laguerre en Pólya.

Stelling 5. Als de rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ voldoet aan
(Z_5) alle nulpunten van $f_n(z)$ zijn reëel (n = 1, 2, 3,...),
en aan $(C_5) = (C_2)$, dan geldt (C_1) steeds als de limietfunctie f(z) van $\{f_n(z)\}$ in $C(r) \not\equiv 0$ is. De limietfunctie f(z) is dus altijd geheel; hij heeft de gedaante (1.5) met

(1.7) a, b reëel, $b \leq 0$, m geheel ≥ 0, z_p reëel, $\sum z_p^{-2} < \infty$.

Omgekeerd is elke gehele functie van de gedaante (1.5) + (1.7) de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ die aan (Z_5) voldoet.

In het volgende worden bewijzen gegeven van stelling 1 t.e.m. 4 met algemenere voorwaarden (C).

§ 2. Hulpmiddelen, die wij in het volgende gebruiken.

Wij beginnen met een stelling, die in hoofdzaak afkomstig is van A. Hurwitz (Vgl.[5] p. 119).

Stelling 6. Laat de functies $f_n(z)$ $(n = 1, 2, 3,\dots)$ regulier zijn in een domein D, gevormd door een enkelvoudig samenhangend gebied en zijn rand. Laat $f_n(z)\to f(z)$ uniform in D. Laat tenslotte $f(z)\not\equiv 0$.
Nu geldt: een inwendig punt z_1 van D is alleen dan een nulpunt van f(z), als z_1 de limiet is van een rij nulpunten $\{z_{n1}\}$ $(f_n(z_{n1})=0$ voor $n\geq n_0)$.
Preciezer geldt: z_1 is alleen dan m-voudig nulpunt van f(z), als er m rijen nulpunten $\{z_{n1}\},\{z_{n2}\},\dots,\{z_{nm}\}$ naar z_1 convergeren. $(f_n(z_{ni})=0$ voor $n\geq n_0$, $i = 1, 2,\dots,m$; z_{ni} en z_{nj} zijn voor $i\neq j$ steeds verschillende nulpunten van $f_n(z)$ - niet noodzakelijk verschillende punten).
Is z_1 m-voudig nulpunt van f(z), dan geldt uniform in D

(2.1) $$g_n(z)=f_n(z)/\prod_i(z-z_{ni})\to g(z)=f(z)/(z-z_1)^m.$$

Het eerste deel van de stelling is een eenvoudige toepassing van de stelling van Rouché; wat het laatste stuk betreft merken we op, dat er een cirkeltje C_1 om z_1 bestaat, binnen D, waarop geen andere nulpunten liggen van f(z) dan z_1. Voor voldoende grote n van $f_n(z)$ dus geen andere dan $z_{n1},\dots,z_{nm}$. In D - C_1 zal $g_n(z)$ uniform naar g(z) convergeren; wegens de maximum-modulusstelling dus ook op C_1.

Wij zullen enkele malen de product stelling van J. Hadamard gebruiken (Vgl.[5] p. 251).

Stelling 7. Als f(z) een gehele functie is van de orde $(\leq)\ \varrho$ d.w.z.

(2.2) $$f(z) = O(e^{|z|^{\varrho+\varepsilon}}) \text{ voor elke } \varepsilon>0,$$

met z = 0 als m-voudig nulpunt, en met nulpunten $\neq 0$ $z_1, z_2,\dots,$ zó, dat voor een zekere gehele $k\geq 1$

(2.3) $$\sum_p |z_p|^{-k}<\infty,$$

(men kan altijd $k\leq\varrho+1$ kiezen), dan heeft f(z) de kanonieke representatie

(2.4) $$f(z) = e^{P(z)}z^m\prod_p(1-z/z_p)e^{z/z_p+z^2/2z_p^2+\dots+z^{k-1}/(k-1)z_p^{k-1}},$$

waarin P(z) een veelterm is van de graad $\leq\varrho$.

Onze bewijzen zullen in hoofdzaak berusten op de volgende stellingen van E. Lindwart en Pólya, die wij hier geven in een vorm ongeveer van P. Montel (vgl. [3]).

Stelling 8. Als de rij veeltermen

(2.5) $$g_n(z)=\prod_p(1-z/z_{np}),\ (z_{np}\neq 0),\ (n=1,2,\dots),$$

voor een zekere gehele $k \geq 1$, $d > 0$, $M > 0$ voldoet aan de voorwaarden

(2.6) $$|g_n'(0)| < d, \ |g_n''(0)| < d, \ldots, |g_n^{(k-1)}(0)| < d, \ (n = 1, 2, \ldots),$$

(2.7) $$\sum_p |z_{np}|^{-k} \leq M, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

dan bestaan er constanten B en C zó, dat

(2.8) $$|g_n(z)| \leq B e^{C|z|^k}, \qquad \text{(voor alle n en z).}$$

Stelling 9. Als alle nulpunten z_{np} van de gehele functies $g_n(z) \neq 0$ zijn ($n = 1, 2, \ldots$), als (2.7) geldt en (2.8), en als de rij $\{g_n(z)\}$ convergeert op een puntverzameling E met tenminste één eindig verdichtingspunt, dan convergeert $\{g_n(z)\}$ uniform in elk eindig domein. De limietfunctie $g(z)$ is dus geheel; hij heeft de gedaante

(2.9) $$A e^{P(z)} \prod_p (1 - z/z_p) e^{z/z_p + z^2/2z_p^2 + \cdots + z^{k-1}/(k-1)z_p^{k-1}},$$

waarin $P(z)$ een veelterm is van de graad $\leq k$, en waarvoor (2.3) geldt.

Wij willen Pólya's bewijs (zie [2]) voor deze gedaante der stellingen geschikt maken. Wij gebruiken de volgende zeer eenvoudige lemma's.

Lemma 1. Voor alle complexe w en vaste gehele $k \geq 1$ geldt

(2.10) $$|(1-w) e^{w/1 + w^2/2 + \cdots + w^{k-1}/(k-1)}| \leq e^{E|w|^k},$$

E een constante.

Bewijs. Beschouw afzonderlijk de gevallen $|w| \leq 1/2k$ en $|w| > 1/2k$.

Lemma 2. Als

(2.11) $$h(w) = 1 + a_1 w + \cdots + a_p w^p = \prod_p (1 - w/w_p) = e^{c_1 w + c_2 w^2 + \cdots},$$

dan is

(2.12) $$c_j = -\frac{1}{j} \sum_p w_p^{-j}$$

een veelterm in $a_1, a_2, \ldots, a_j$.

Bewijs van stelling 8. Uit lemma 2, toegepast op $g_n(z)$, volgt in verband met (2.6) dat

(2.13) $$|s_{nj}| \leq K_j, \qquad s_{nj} = -\frac{1}{j} \sum_p z_{np}^{-j},$$

voor zekere constanten K_j en alle n ($j = 1, 2, \ldots, k-1$). Uit lemma 1 volgt nu in verband met (2.7)

$$|g_n(z)| = |\prod_p (1 - z/z_{np})| \leq e^{\Re(s_{n1} z + \cdots + s_{n,k-1} z^{k-1}) + EM|z|^k},$$

(2.14) $$|g_n(z)| \leq e^{K_1|z| + \cdots + K_k|z|^k}, \quad K_k = EM, \ (n = 1, 2, \ldots)$$

Uit (2.14) volgt (2.8)

Bewijs van stelling 9. De rij $\{g_n(z)\}$ is wegens (2.8) uniform begrensd in elk eindig domein. Daar $\{g_n(z)\}$ convergeert op E convergeert $\{g_n(z)\}$ volgens de stelling van Vitali uniform in elk eindig domein. De limietfunctie $g(z)$ is dus geheel; hij voldoet aan dezelfde ongelijkheid (2.8) als de $g_n(z)$. $g(z)$ is dus van de orde ($\leq$)k.

Laat $g(z)\not\equiv 0$. Dan is $z = 0$ geen nulpunt van $g(z)$, omdat er anders een rij nulpunten z_{n1} ($g_n(z_{n1}) = 0$ voor $n \geq n_0$) zou zijn die $\to 0$, hetgeen onmogelijk is wegens (2.7). Laat de nulpunten van $g(z)$ zijn $z_1, z_2, \ldots$ Als $\{z_{n1}\}, \{z_{n2}\}, \ldots$ rijen nulpunten der $g_n(z)$ zijn die resp. convergeren naar $z_1, z_2, \ldots$ (vgl. stelling 6) dan geldt voor elke P wegens (2.7)

(2.15) $$\sum_{p\leq P} |z_p|^{-k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{p\leq P} |z_{np}|^{-k} \leq M.$$

Dat wil zeggen: (2.3) geldt.

Toepassing van stelling 7 voltooit het bewijs.

We geven nu enkele toepassingen van stelling 8.

Stelling 10. Laat V de verzameling zijn van de nulpunten der veeltermen $f_n(z)$ ($n = 1, 2, \ldots$). Als er een punt ζ is, van waaruit men V ziet onder een hoek $\beta < \pi$, terwijl voor zekere constanten d_1, d_2

(2.16) $$0 < d_1 < |f_n(\zeta)| < d_2, \quad |f_n'(\zeta)| < d_2, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

dan zijn er constanten B en C zó, dat

(2.17) $$|f_n(z)| \leq B e^{C|z|}, \text{ (voor alle n en z)}.$$

Bewijs. Door een beweging kunnen we bereiken dat $\zeta = 0$ en dat alle nulpunten z_{np} der $f_n(z)$ liggen in de sector $S(\beta)$ $(|z| \geq 0, |\arg z| \leq \frac{1}{2}\beta)$. Laat nu $g_n(z) = f_n(z)/f_n(0)$. De veeltermen $g_n(z)$ hebben de gedaante (2.5) en ze voldoen aan (2.6) en (2.7) met $k = 1$. Wat betreft (2.7) blijkt dit als volgt: $z_{np} \in S(\beta)$, dus

$$\Re(z_{np}^{-1}) = |z_{np}|^{-1}\cos(\arg z_{np}) \geq |z_{np}|^{-1}\cos\tfrac{1}{2}\beta,$$

(2.18) $$\begin{cases} \sum |z_{np}|^{-1} \leq \sec\tfrac{1}{2}\beta \; \Re(\sum z_{np}^{-1}) = \\ \quad = \sec\tfrac{1}{2}\beta \; \Re(-g_n'(0)) < \sec\tfrac{1}{2}\beta \, (d_2/d_1), \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

wegens (2.16). Uit stelling 8 volgt nu, dat (2.8) geldt ($k=1$). Hieruit volgt een dergelijke ongelijkheid voor $f_n(z)$. Door een beweging in het z-vlak gaat de vorm van de ongelijkheid niet verloren.

Stelling 11. Laat V de verzameling zijn van de nulpunten der veeltermen $f_n(z)$ ($n = 1, 2, \ldots$) Als er een punt ζ is, van waaruit men V ziet onder een hoek π, terwijl voor zekere constanten d_1, d_2

(2.19) $$0 < d_1 < |f_n(\zeta)| < d_2, \quad |f_n'(\zeta)| < d_2, \quad |f_n''(\zeta)| < d_2, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

dan zijn er constanten B en C zó, dat

(2.20) $$|f_n(z)| \leq B e^{C|z|^2}, \text{ (voor alle n en z)}.$$

Bewijs. Door een beweging kunnen we bereiken dat $\zeta = 0$ en dat alle nulpunten z_{np} der $f_n(z)$ liggen in het halfvlak $\Re(z) \geq 0$. Laat nu $g_n(z) = f_n(z)/f_n(0)$. De veeltermen $g_n(z)$ hebben de gedaante (2.5) en ze voldoen aan (2.6) en (2.7) met $k = 2$. Wat betreft (2.7) blijkt dit als volgt. (vgl. Szász [4]). Wegens lemma 2 en (2.19) bestaat er een constante d_3 zó dat

(2.21) $$\left|\sum z_{np}^{-1}\right| < d_3, \quad \left|\sum z_{np}^{-2}\right| < d_3^2, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Noemen we even $z_{np}^{-1} = \lambda_p + i\mu_p \ (\lambda_p \geq 0)$, dan vinden we uit (2.21)

$$\sum |z_{np}|^{-2} = \sum \lambda_p^2 + \sum \mu_p^2 = 2\sum \lambda_p^2 - \{\sum(\lambda_p^2 - \mu_p^2)\} \leq$$

$$\text{(2.22)} \qquad \leq 2\left(\sum \lambda_p\right)^2 + \left|\sum(\lambda_p^2-\mu_p^2)\right| =$$

$$= 2\left(\Re \sum z_{np}^{-1}\right)^2 + \left|\Re \sum z_{np}^{-2}\right| < 3d_3^2, \ (n=1,2,\dots).$$

Uit stelling 8 volgt nu, dat (2.3) geldt (k = 2). Voor $f_n(z)$ geldt dus een dergelijke ongelijkheid; ook nog na een transformatie $z' = az + b$, $|a| = 1$.

Opmerking. Uit § 5 volgt dat een stelling zoals 10 of 11 niet geldig kan zijn als men V ziet onder een hoek $> \pi$.

We noemen tenslotte de volgende eenvoudige hulpstelling.

Lemma 3. Als enerzijds

$$\text{(2.23)} \qquad f(z) = e^{c_1 z + c_2 z^2 + \dots},$$

waarin de reeks convergeert in $C(r)$ ($|z| \leq r$), en als anderzijds uniform in $C(r)$

$$\text{(2.24)} \qquad f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z), \quad f_n(z) = \prod_{p \leq B_n} (1 - z/z_{np}), \ (z_{np} \neq 0),$$

dan is

$$\text{(2.25)} \qquad c_j = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{j} \sum_{p \leq B_n} z_{np}^{-j}, \ (j = 1, 2, \dots).$$

Bewijs. In $C(\frac{1}{2}r)$ convergeert $\log f_n(z)$ uniform naar $\log f(z)$. We hebben dus $c_j = \lim_{n\to\infty} c_{nj}$ als c_{nj} de coëfficiënt is van z^j in de machtreeks voor $\log f_n(z)$. Toepassing van lemma 2 voltooit het bewijs.

§ 3. Sector met opening $\leq \pi$ en halfvlak, behandeld met zwakkere convergentievoorwaarden.

We bewijzen voor de sector $S(\alpha)$ ($|z| \geq 0$, $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\alpha$) de volgende uitbreiding van stelling 2 (en 1).

Stelling 12. Als de rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ voldoet aan $(Z_{/2}) = (Z_2)$ waarin $0 \leq \alpha < \pi$, en aan

$(C_{/2})$ $\{f_n(z)\}$ convergeert in de punten van een verzameling E met een eindig verdichtingspunt; als de limietfunctie $f(z)$ van $\{f_n(z)\}$ op E $\not\equiv 0$ is, bestaat er ofwel een punt ζ dat niet behoort tot $S(\alpha) - 0$, zó, dat voor zekere constanten d_1 en d_2

$$\text{(3.1)} \qquad 0 < d_1 < |f_n(\zeta)| < d_2, \quad |f_n'(\zeta)| < d_2, \ (n=1,2,\dots),$$

ofwel een punt $\zeta \neq 0$, $\arg \zeta = \pm\frac{1}{2}\alpha$ zó, dat voor zekere constanten d_1 en d_2

$$\text{(3.2)} \qquad 0 < d_1 < |f_n(\zeta)| < d_2, \quad |f_n'(\zeta)| < d_2, \quad |f_n''(\zeta)| < d_2, \ (n=1,2,\dots),$$

dan geldt (C_1) steeds als de limietfunctie $f(z)$ op E $\not\equiv 0$ is. $f(z)$ is dus altijd geheel; hij heeft de gedaante (1.1) + (1.4).

Omgekeerd is elke gehele functie $f(z)$ van de gedaante (1.1) + (1.4) + (1.3) de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ die aan $(Z_{/2}) = (Z_2)$ voldoet.

Bewijs. We beginnen met het directe gedeelte. Laat $f(z) \not\equiv 0$.

(i). Laat $\zeta = 0$. Dan geldt (3.1). Uit stelling 10 volgt dat (2.17) geldt, uit het bewijs van stelling 10 (zie (2.18), $\beta = \alpha$) volgt dat (2.7) geldt (k=1). We kunnen dus stelling 9 (k = 1) op de rij $\{f_n(z)\}$ toepassen. We vinden dat (C_1) geldt, en dat $f(z)$ de gedaante (1.1) heeft met $m = 0$, $\sum |z_p|^{-1} < \infty$. Dat $z_p \in S(\alpha)$ volgt onmiddellijk uit stelling 6.

Rest te bewijzen $-a \in S(\alpha)$. Lemma 3 (§ 2) geeft

(3.3) $$a - \sum z_p^{-1} = \lim_{n\to\infty} - \sum z_{np}^{-1}.$$

Zorgt men dat $z_{n1} \to z_1, z_{n2} \to z_2, \ldots, z_{nP} \to z_P$ (vgl. stelling 6) dan heeft men

(3.4) $$\sum_{p \le P} z_p^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{p\le P} z_{np}^{-1}.$$

Bij gegeven $\varepsilon > 0$ kan men P zo groot kiezen dat $\sum_{p>P} z_p^{-1} = \vartheta\varepsilon, |\vartheta| \le 1$.
Uit (3.3) en (3.4) volgt dan

(3.5) $$-a + \vartheta\varepsilon = \lim_{n\to\infty} \sum_{p>P} z_{np}^{-1}.$$

Daar het rechterlid van (3.5) in $S(\alpha)$ ligt, moet $-a \in S(\alpha)$.

(ii) Als ζ niet $\in S(\alpha)$ geldt (3.1); men ziet $S(\alpha)$ uit ζ onder een hoek $\beta < \pi$. Uit stelling 10 volgt dat (2.17) geldt. Uit het eerste deel van het bewijs van stelling 9 volgt dus, dat voor $\{f_n(z)\}$ (C_1) geldt; $f(z)$ is dus geheel. Laat nu $z = 0$ een m-voudig nulpunt zijn van $f(z)$. We kunnen als in stelling 6 een rij veeltermen $F_n(z)$ construeren die uniform in elk eindig domein naar $F(z) = f(z)/z^m$ convergeert, terwijl $F_n(0) \ne 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Daar ook $F(0) \ne 0$ voldoet $\{F_n(z)\}$ aan de voorwaarden van stelling 12 met $\zeta = 0$. Uit (i) volgt nu dat $f(z)$ de vereiste vorm (1.1) + (1.4) heeft.

(iii) Als $\zeta \ne 0$, $\arg \zeta = \pm\frac{1}{2}\alpha$ geldt (3.2); men ziet $S(\alpha)$ uit ζ onder een hoek π. Uit stelling 11 volgt dat (2.20) geldt. Uit het eerste deel van het bewijs van stelling 9 volgt dus, dat voor $\{f_n(z)\}$ (C_1) geldt; $f(z)$ is dus geheel. Zie verder (ii).

We bewijzen nu het omgekeerde deel van stelling 12. Als $f(z) \equiv 0$ voldoet $f_n(z) = n^{-1}$. Stel $f(z) \not\equiv 0$. Uniform in elk eindig domein geldt

(3.6) $$f(z) = \lim_{n\to\infty} A z^m (1 + az/n)^n \prod_{p\le n} (1 - z/z_p).$$

Daar $-a \in S(\alpha)$, $z_p \in S(\alpha)$ liggen alle nulpunten van de veelterm in het rechterlid in $S(\alpha)$.

Wij bewijzen nu een overeenkomstig resultaat voor het halfvlak $S(\pi)$, dat een uitbreiding is van stelling 3 en 4 (met C_4'').

Stelling 13. Als de rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ voldoet aan $(Z_{13}) = (Z_3)$, en aan (C_{13}): $\{f_n(z)\}$ convergeert in de punten van een verzameling E met een eindig verdichtingspunt; als de limietfunctie $f(z)$ van $\{f_n(z)\}$ op $E \not\equiv 0$ is, bestaat er een punt ζ dat geen inwendig punt is van $S(\pi)$ zó, dat voor zekere constanten d_1 en d_2

(3.7) $\quad 0 < d_1 < |f_n(\zeta)| < d_2, \ |f_n'(\zeta)| < d_2, \ |f_n''(\zeta)| < d_2, (n = 1, 2, \dots),$

dan geldt (C_1) steeds als de limietfunctie $f(z)$ op $E \not\equiv 0$ is. $f(z)$ is dus geheel; hij heeft de gedaante (1.5) + (1.6).

Omgekeerd is elke gehele functie $f(z)$ van de gedaante (1.5) + + (1.6) de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ die aan $(Z_{/3}) = (Z_3)$ voldoet.

Bewijs. Stel $f(z) \not\equiv 0$. We beginnen met het directe gedeelte. Als in het bewijs van stelling 12 blijkt, dat we ons tot het geval $\zeta = 0$ kunnen beperken. Uit stelling 11 volgt dat (2.20) geldt, uit het bewijs van stelling 11 (zie (2.22)) volgt dat (2.7) geldt (k=2). We kunnen dus stelling 9 (k=2) op de rij $\{f_n(z)\}$ toepassen. We vinden dat (C_1) geldt, en dat $f(z)$ de gedaante (1.5) heeft met $m = 0$, $\quad \sum |z_p|^{-2} < \infty$.

Dat $z_p \in S(\pi)$ is duidelijk.

Rest te bewijzen dat $\sum \Re(z_p^{-1})$ convergeert met som $\leq -\Re(a)$ en dat $b \geq 0$ is. Zorg weer, dat $\{z_{n1}\}, \dots, \{z_{nP}\}$ convergeren naar $z_1, \dots, z_P$. Dan geldt wegens $\Re(z_{np}) \geq 0$ en lemma 3 (§ 2)

(3.8)
$$\sum_{p \leq P} \Re(z_p^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p \leq P} \Re(z_{np}^{-1}) \leq \lim_{n\to\infty} \sum \Re(z_{np}^{-1}) = -\Re(a).$$

Daar P in (3.8) willekeurig is en $\Re(z_p^{-1}) \geq 0$ geldt: $\sum \Re(z_p^{-1})$ convergeert met som $\leq -\Re(a)$. Uit lemma 3 volgt verder

(3.9)
$$b - \tfrac{1}{2} \sum z_p^{-2} = \lim_{n\to\infty} -\tfrac{1}{2} \sum z_{np}^{-2}.$$

Bij gegeven $\varepsilon > 0$ kan men P zo groot kiezen dat

(3.10)
$$b + \vartheta\varepsilon = \lim_{n\to\infty} -\tfrac{1}{2} \sum_{p>P} z_{np}^{-2}, \quad |\vartheta| \leq 1.$$

(Vgl. (3.5).) Laat nu $z_{np} = x_{np} + i y_{np}$ $(x_{np} \geq 0)$. We schatten als volgt

(3.11)
$$-\sum_{p>P} z_{np}^{-2} = \sum_{p>P} y_{np}^2 |z_{np}|^{-4} + \sum_{p>P} (2i y_{np} - x_{np}) x_{np} |z_{np}|^{-4} = S_1 + S_2.$$

(3.12)
$$|S_2| \leq \{\max_{p>P} (2|y_{np}| + x_{np}) |z_{np}|^{-2}\} \sum_{p>P} x_{np} |z_{np}|^{-2}.$$

Als $p \to \infty$ zal $|z_{np}| \to \infty$, dus het max. in (3.12) zal $\to 0$. De som in (3.12) is begrensd: $\leq \sum \Re(z_{np}^{-1}) = -\Re(a)$. Hieruit volgt dat $S_2 \to 0$ $(P \to \infty)$. Voor voldoende grote P verschilt b willekeurig weinig van $\frac{1}{2} S_1$; daar $S_1 \geq 0$ moet $b \geq 0$.

We bewijzen nu het omgekeerde gedeelte. Uniform in elk eindig domein geldt:

(3.13)
$$f(z) = \lim_{n\to\infty} A e^{az + bz^2} z^m \prod_{p \leq n} (1 - z/z_p) e^{z/z_p},$$

en, $a + \sum_{p \leq n} z_p^{-1} = a_1$ stellend,

(3.14)
$$e^{a_1 z} = \lim_{k\to\infty} (1 + a_1 z/k)^k, \quad e^{bz^2} = \lim_{k\to\infty} (1 + bz^2/k)^k.$$

Daar $\Re(a_1) \leq \Re(a) + \sum \Re(z_p^{-1}) \leq 0$, $b \leq 0$, hebben de veeltermen achter de limiettekens in (3.14) al hun nulpunten in $S(\pi)$. Uit (3.13) en (3.14) volgt het gestelde.

§ 4. Domein "asymptotisch overeenstemmend" met een sector $<\pi$.

$C(r)$ betekent weer de cirkel $|z| \leqslant r$ $(r > 0)$, $S(\alpha)$ de sector $|z| \geqslant 0$, $|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\alpha$ $(\alpha \geqslant 0)$. Onder $T=T(\alpha)$ verstaan we een oneindig domein (gebied + rand), dat "asymptotisch met $S(\alpha)$ overeenstemt". D.w.z. α is de onderste grens van de getallen β, waarbij een $C(r)$ bestaat zó, dat $T - T \times C(r) \subset S(\beta)$, en α is tegelijk de bovenste grens van de getallen $\gamma \geqslant 0$ waarbij een $C(r)$ bestaat zo, dat $S(\gamma) - S(\gamma) \times C(r) \subset T$. De halve strook $R(z) \geqslant 0$, $|I(z)| \leqslant \Delta$ is een voorbeeld van een $T(0)$. Wij bewijzen nu de volgende uitbreiding van stelling 12.

Stelling 14. Als de rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ voldoet aan

(Z_{14}) alle nulpunten van $f_n(z)$ liggen in $T(\alpha)$ $(n= 1,2,3,\ldots)$

waarin

(4.1) $$0 \leqslant \alpha < \pi$$

en aan

(C'_{14}) $\{f_n(z)\}$ convergeert uniform in een $C(r)$ met een r zo groot, dat $C(r)$ een inwendig punt heeft dat niet $\in T(\alpha)$, van waar uit men $T(\alpha)$ ziet onder een hoek $\leqslant \pi$,

of aan de zwakkere voorwaarde

(C''_{14}) $\{f_n(z)\}$ convergeert voor $z \in E$, waarin E een verzameling is met een eindig verdichtingspunt; als de limietfunctie $f(z)$ van $\{f_n(z)\}$ op $E \not\equiv 0$ is, dan bestaat er een punt ζ, niet inwendig punt van $T(\alpha)$, van waar uit men $T(\alpha)$ ziet onder een hoek $\varphi < \pi$ $(\varphi = \pi)$, terwijl

(4.2) $$0 < d_1 < |f_n(\zeta)| < d_2, \quad |f_n'(\zeta)| < d_2$$

((4.3) $$0 < d_1 < |f_n(\zeta)| < d_2, \quad |f_n'(\zeta)| < d_2, \quad |f_n''(\zeta)| < d_2)$$

voor zekere constanten d_1, d_2 en alle n (eventueel alle $n \geqslant n_0$), dan geldt (C_1) steeds als de limietfunctie $f(z)$ van $\{f_n(z)\}$ op $C(r)$, resp. $E, \not\equiv 0$ is. $f(z)$ is dus geheel; hij heeft de gedaante

(4.4) $$A e^{az} z^m \prod_p \left(1 - \frac{z}{z_p}\right)$$

waarin

(4.5) $$-a \in S(\alpha), \quad m \text{ geheel} \geqslant 0, \quad z_p \in T(\alpha), \quad \sum |z_p|^{-1} < \infty.$$

Omgekeerd is elke gehele functie van de gedaante (4.4)+(4.5)+(4.1) de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen die aan (Z_{14}) voldoet.

Bewijs. Stel $f(z) \not\equiv 0$. We beginnen met het directe gedeelte. Uit (C'_{14}) volgt dat er een punt ζ is in $C(r)$ met $f(\zeta) \neq 0$, dat aan de voorwaarden van (C''_{14}) voldoet (zelfs met $\varphi < \pi$). We kunnen ons dus tot (C''_{14}) beperken. Precies als bij stelling 12 bewijst men uit (C''_{14}) dat (C_1) geldt. $f(z)$ is dus geheel.

Laat nu $\alpha < \beta < \pi$ Bepaal R zo groot, dat $T - T \times C(R) \subset S(\beta)$. Als 0 (m keer), $z_1, \ldots, z_P$ de nulpunten zijn van $f(z)$ in $C(R)$ kunnen we op de wijze aangegeven in stelling 6 een rij veeltermen $\{F_n(z)\}$ construeren die uniform in elk eindig domein convergeert naar $F(z)= f(z) / \left\{ z^m \prod_{p \leqslant P} (1-z/z_p) \right\}$, terwijl $F_n(z)$ geen nulpunten heeft in $C(R)(n=1,2\ldots)$. Op $\{F_n(z)\}$ kunnen we nu stelling 12 toepassen met β in plaats van α. We vinden dat $f(z)$ de gedaante (4.4) heeft met $-a \in S(\beta)$, m geheel $\geqslant 0$; $\sum |z_p|^{-1} < \infty$. Dat $z_p \in T(\alpha)$ volgt onmiddellijk uit stelling 6. Daar β willekeurig dicht bij α kan worden gekozen, moet $-a \in S(\alpha)$. Ook (4.5) geldt dus.

En nu het omgekeerde gedeelte. Als $z = 0$ nulpunt is van $f(z)$ moet $0 \in T(\alpha)$. $z_p \in T(\alpha)$, dus alle nulpunten van $g_n(z) = z^m \prod_{p \leq n} (1-z/z_p)$ behoren tot $T(\alpha)$, en $g_n(z) \to z^m \prod (1-z/z_p)$ uniform in elk eindig domein. Tenslotte is $e^{az} = \lim_{n\to\infty} (1+az/n)^n$ de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen waarvan de nulpunten(voor $n \geqslant n_0$) alle in $T(\alpha)$ liggen, steeds als $\alpha = 0$ of als $-a \in S(\gamma)$ met $\gamma < \alpha$. Als $\arg(-a) = \pm \frac{1}{2}\alpha$ $(\alpha > 0)$ kunnen we eerst e^{az} benaderen met functies $e^{a_1 z}$, $a_1 \to a$, $-a_1 \in S(\gamma)$ met $\gamma < \alpha$.

§ 5. Sector met opening $> \pi$. Laat de rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ voldoen aan

(Z_{15}) alle nulpunten van $f_n(z)$ liggen in $S(\alpha)$ $(\alpha > \pi,\ n = 1,2,3,\ldots)$

en aan (C_2). Wat kunnen wij zeggen over de limietfunctie $f(z)$ van $\{f_n(z)\}$ in $C(r)$? Het zal blijken (voorbeeld 2) dat $f(z)$ niet geheel behoeft te zijn. Dit is misschien onverwacht, gezien de stelling van Jentzsch (zie [5] p. 238) die met zich brengt dat een machtreeks in z, met positieve convergentiestraal, waarbij de nulpunten van de partiële sommen alle liggen in een sector $S(\alpha)$ met opening $\alpha < 2\pi$, noodzakelijk een gehele functie voorstelt.

Laat dan $\{f_n(z)\}$ aan (Z_{15}) voldoen en aan (C_1). Dan is $f(z)$ zeker geheel. Wat kunnen we zeggen over de orde van $f(z)$? Uit voorbeeld 1 zal blijken, dat $f(z)$ de orde oneindig kan hebben. Ook elke eindige orde k (k geheel $\geqslant 1$) kan voorkomen (voorbeeld 3). Dit leidt tenslotte tot de karakteriserende stelling 15.

Voorbeeld 1. De functie

$$f(z) = e^{e^z} \tag{5.1}$$

is de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ die aan (Z_{15}) voldoet.

Immers, uniform in elk eindig gebied geldt

$$e^{e^z} = \lim_{\delta\downarrow 0,\, p\to\infty} e^{\delta z^2}\left(1+\frac{e^z}{p}\right)^p \tag{5.2}$$

$$1+\frac{e^z}{p} = 2e^{\frac{1}{2}(z-\log p+\pi i)}\sinh \tfrac{1}{2}(z-\log p-\pi i)$$

$$= \lim_{q\to\infty} e^{\frac{1}{2}(z-\log p+\pi i)}(z-\log p-\pi i)\prod_{j\leq q}\left\{1+\frac{(z-\log p-\ldots}{4\pi^2 j^2}\right. \tag{5.3}$$

$$e^{\delta z^2} e^{\frac{1}{2}pz} = \lim_{s\to\infty}\left\{1+\frac{\delta z^2+\frac{1}{2}pz}{s}\right\}^s. \tag{5.4}$$

Om een benaderende veelterm $f_n(z)$ te vinden, die bv. in $C(n)$ minder dan $1/n$ van $f(z)$ afwijkt, kieze men eerst $\delta>0$ klein genoeg en p groot genoeg, dan q groot genoeg en tenslotte s groot genoeg. Neemt men dan s nog zoveel groter, dat de nulpunten $\{-p \pm (p^2-16\delta s)^{1/2}\}/4\delta$ van de veelterm in 't rechterlid van (5.4) in $S(\alpha)$ liggen, dan is de zaak in orde.

Voorbeeld 2. De functie

$$f(z) = \exp\{(e^{1-z}-1)^{-1}\} \tag{5.5}$$

is de uniforme limiet in $C(r)$ $(r<1)$ van een rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ die aan (Z_{15}) voldoet.

Immers, door de substitutie $z \to k z$ volgt uit voorbeeld 1 dat $\exp(e^{kz})$ (k geheel, $\geqslant 1$) de uniforme limiet is in $|z+1| \leqslant r$ van een rij veeltermen die aan (Z_{15}) voldoet. $\exp(e^{k(z-1)})$ is het dus in $C(r)$. Maar dan is ook het in $C(r)$ uniform convergente product $\prod_{k\geqslant 1} \exp(e^{k(z-1)}) = f(z)$ de uniforme limiet in $C(r)$ van een rij veeltermen die aan (Z_{15}) voldoet.

Voorbeeld 3. De functie

$$f(z) = e^{bz^k} \quad (b \text{ complex, } k \text{ geheel} \geqslant 1). \tag{5.6}$$

is de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ die aan (Z_{15}) voldoet.

Immers, uniform in elk eindig domein geldt

$$e^{bz^k} = \lim_{\delta\downarrow 0,\, \varepsilon\downarrow 0} e^{\delta z^2} \exp(bz^k e^{\varepsilon z}), \tag{5.7}$$

$$\exp(bz^k e^{\varepsilon z}) = \lim_{q\to\infty}\left(1+\frac{bz^k e^{\varepsilon z}}{q}\right)^q. \tag{5.8}$$

Volgens de stelling van Hadamard geldt verder

$$1+\frac{bz^k e^{\varepsilon z}}{q} = e^{az}\prod\left(1-\frac{z}{z_p}\right)e^{\frac{z}{z_p}}. \tag{5.9}$$

Hierin zijn a en z_p natuurlijk afhankelijk van ε en q. Bij vaste $\varepsilon>0$ kan men echter q zo groot kiezen, dat de nulpunten z_p van (5.9) alle in $S(\alpha)$ liggen. Immers, laat $z_p = x + iy$ een nulpunt zijn van (5.9) met $x<0$. Dan geldt $|b z^k e^{\varepsilon z}| = q$ of, $|q/b|^2 = t^k$ stellend $(t>0)$, $(x^2+y^2)^k e^{2\varepsilon x} = t^k$.

Hieruit volgt

$$\left\{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}^k = t^k x^{-2k} e^{-2\varepsilon x} \geqslant t^k\left(\frac{\varepsilon e}{k}\right)^{2k},$$

dus

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2 \geqslant t\left(\frac{\varepsilon e}{k}\right)^2 \tag{5.10}$$

Als q, dus t, voldoende groot is liggen alle z_p dus in $S(\alpha)$.

Tenslotte geldt uniform in elk eindig domein

(5·11) $$e^{az}\prod\left(1-\frac{z}{z_p}\right)e^{\frac{z}{z_p}} = \lim_{s\to\infty} e^{az}\prod_{p\leq s}\left(1-\frac{z}{z_p}\right)e^{\frac{z}{z_p}},$$

en, $a+\sum_{p\leq s} z_p^{-1} = a_1$ stellend,

(5·12) $$e^{\delta z^2}e^{qa_1 z} = \lim_{u\to\infty}\left\{1+\frac{\delta z^2+qa_1 z}{u}\right\}^u,$$

waarin de veelterm in het rechterlid voor voldoend grote u zijn nulpunten in $S(\alpha)$ heeft.

<u>Stelling 15</u>. Nodig en voldoende, opdat de gehele functie $f(z)$ de uniforme limiet is, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $f_n(z)$ waarvan alle nulpunten liggen in $S(\alpha)$ ($\alpha>\pi$, $n = 1,2,\dots$), is dat alle nulpunten van $f(z)$ in $S(\alpha)$ liggen.

<u>Bewijs</u>. Dat deze voorwaarde nodig is, is evident (stelling 6). Hij is ook voldoende. Volgens de productstelling van <u>Weierstrass</u> kan men namelijk schrijven

(5·13) $$f(z)=e^{g(z)}\prod_p\left(1-\frac{z}{z_p}\right)e^{\frac{z}{z_p}+\frac{z^2}{2z_p^2}+\dots+\frac{z^{k_p}}{k_p z_p^{k_p}}},$$

waarin $g(z)$ geheel is en het product uniform convergeert in elk eindig domein. Wil men nu de veelterm $f_n(z)$ zo bepalen dat hij in C(n) benaderen door $e^{g_n(z)}$ maal een eindig product ($g_n(z)$ een veelterm), dus door

(5·14) $$e^{h_n(z)}\prod_{p\leq A_n}\left(1-\frac{z}{z_p}\right)$$

zeg, $h_n(z)$ een veelterm. $z_p \in S(\alpha)$, en uit voorbeeld 3 volgt dat men $e^{h_n(z)}$ in C(n) zo goed men wil kan benaderen door een veelterm met al zijn nulpunten in $S(\alpha)$. Dit voltooit het bewijs.

minder dan 1/n van f(z) verschilt, dan kan men eerst f(z) in C(n)

§ 6. "Dubbelsector" met opening $< \frac{1}{2}\pi$ en domein asymptotisch daarmee overeenstemmend. Strook. Door een eenvoudige kunstgreep (voor een deel te vinden bij Lindwart en Pólya [2] kan men het directe gedeelte van stelling 5 afleiden uit het geval $\alpha = 0$ van stelling 2. Uit het algemene geval van stelling 2 (die in de door ons bewezen stelling 12 begrepen is) volgt op dezelfde wijze het directe gedeelte van stelling 16 over de "dubbelsector" $\mathcal{U}(\alpha)$ die de som is van de tegenover elkaar liggende sectoren

(6.1) $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\alpha$, $|\arg(-z)| \leq \frac{1}{2}\alpha$, $(|z| \geq 0)$.

Stelling 16. Als de rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ voldoet aan

(Z_{16}) alle nulpunten van $f_n(z)$ liggen in $\mathcal{U}(\alpha)$, $(n = 1,2,\cdots)$, waarin

(6.2) $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$,

en aan $(C_{16}) = (C_2)$, dan geldt (C_1) steeds als de limietfunctie $f(z)$ van $\{f_n(z)\}$ op $C(r) \not\equiv 0$. In elk geval is $f(z)$ geheel; hij heeft de gedaante

(6,3) $A e^{az + bz^2} \prod_p \left(1 - \frac{z}{z_p}\right) e^{\frac{z}{z_p}}$, waarin

(6.4) $-b \in S(\alpha)$, m geheel ≥ 0, $z_p \in \mathcal{U}(\alpha)$, $\sum |z_p|^{-2} < \infty$.

Omgekeerd is elke gehele functie van de gedaante (6.3)+(6.4)+(6.2) de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ die aan (Z_{16}) voldoet.

Bewijs. (directe gedeelte) . Laat $f(z) \not\equiv 0$. We mogen dan wel $f_n(o) = 1$, $f(o) = 1$ onderstellen. (Verwijder een eventueel m-voudig nulpunt $z = 0$ van $f(z)$ als in stelling 6). Definieer nu $g_n(w)$ als volgt: $g_n(z^2) = f_n(z)\ f_n(-z)$. De veeltermen $g_n(w)$ hebben al hun nulpunten $w_{np} = z_{np}^2$ (z_{np} nulpunt van $f_n(z)$) in $S(2\alpha)$. Bovendien convergeert $g_n(w)$ uniform in $C(r^2)$. Daar $2\alpha < \pi$ volgt nu uit het bewijs van stelling 10 dat er een constante M bestaat zo, dat

(6.5) $\sum |z_{np}|^{-2} = \sum |w_{np}|^{-1} < M$; $(n = 1,2,\ldots)$

We passen nu stelling 8 en 9 toe op $\{f_n(z)\}$ (k=2). We vinden dat $\{f_n(z)\}$ voldoet aan (C_1) en dat $f(z)$ is van de vorm (6.3) met $\sum |z_p|^{-2} < \infty$. Dat $z_p \in \mathcal{U}(\alpha)$ spreekt vanzelf; rest te bewijzen $-b \in S(\alpha)$.

Beschouw $g(w)$: $g(z^2) = f(z)\, f(-z)$; $g(w) = B e^{2bw} w^m \prod_p \left(1 - \frac{w}{z_p^2}\right)$, (6.6)

en $g(w)$ is de uniforme limiet in $C(r^2)$ van $\{g_n(w)\}$. Uit stelling 2 volgt dus $-2b \in S(2\alpha)$; zodat $-b \in S(\alpha)$.

(Omgekeerde gedeelte). Laat $f(z) \not\equiv 0$. Het oneindige product in (6.3) benaderen we eerst door een eindig product. We moeten dan nog bekijken

(6.7) $$e^{a_1 z + bz^2} = \lim_{\delta \downarrow 0} e^{a_1 z + (b-\delta) z^2} \qquad (\delta \geq 0).$$

Voor voldoende grote n liggen de nulpunten van $[1 + \{a_1 z + (b-\delta) z^2\}/n]$ zeker in $U(\alpha)$ (Toevoeging van δ is nodig als $b = 0$ of steeds als $-b$ op de rand ligt van $S(\alpha)$; als $\alpha = 0$ is a_1 reëel).

Men kan ook stelling 12 voor een dubbelsector "vertalen", maar dat wordt iets gecompliceerder. Wel zullen we stelling 14 "vertalen", tenminste het gedeelte met (C'_{14}). Laat $V = V(\alpha)$ een oneindig domein zijn, dat "asymptotisch met $U(\alpha)$ overeenstemt". D.w.z. α is de onderste grens van de getallen β, waarbij een $C(r)$ bestaat zó, dat $V - V \times C(r) \subset U(\beta)$, en α is tegelijk de bovenste grens van de getallen $\gamma \geqslant 0$ waarbij een $C(r)$ bestaat zo dat $U(\gamma) - U(\gamma) \times C(r) \subset V$. Wij hebben

Stelling 17. Als de rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ voldoet aan

(Z_{17}) alle nulpunten van $f_n(z)$ liggen in $V(\alpha)$, $(n = 1, 2, \cdots)$, waarin α aan (6.2) voldoet, en aan

(C_{17}) $\{f_n(z)\}$ convergeert uniform in een cirkel $C(r)$ met een r zo groot, dat $C(r)$ een inwendig punt ζ heeft, dat inwendig punt is van een domein D, dat noch met $V(\alpha)$, noch met het in O gespiegelde domein $\overline{V(\alpha)}$ van $V(\alpha)$ een punt gemeen heeft, en dat door de transformatie $w = z^2$ overgaat in een halfvlak (aan (C_{17}) is zeker voldaan als r zo groot is dat $V(\alpha) - V(\alpha) \times C(r-\delta) \subset U(\frac{\pi}{2})$ voor een zekere $\delta > 0$),

dan geldt (C_{17}) steeds als de limietfunctie $f(z)$ van $\{f_n(z)\}$ op $C(r) \not\equiv 0$ is. $f(z)$ is geheel en van de gedaante (6.3), waarin

(6.8) $\quad -b \in S(\alpha)$, m geheel $\geqslant 0$, $z_p \in V(\alpha)$, $\quad \sum |z_p|^{-2} < \infty$.

Omgekeerd is elke gehele functie van de gedaante (6.3) +(6.8) $(0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi)$ de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen die aan (Z_{17}) voldoet.

Bewijs. (Directe gedeelte). Laat als bij stelling 16 $f_n(0) = 1$, $f(0) = 1$, $g_n(z^2) = f_n(z)\, f_n(-z)$. Alle nulpunten $w_{np} = z^2_{np}$ (z_{np} nulpunt van $f_n(z)$) van $g_n(w)$ liggen in de $T(2\alpha)$ gegeven door de punten $w = z^2$, $z \in V(\alpha)$. $\{g_n(w)\}$ convergeert uniform in $C(r^2)$; $C(r^2)$ heeft een inwendig punt ζ^2 van waar uit men $T(2\alpha)$ ziet onder een hoek $\leq \pi$. Volgens stelling 14 convergeert $\{g_n(w)\}$ dus uniform in elk eindig domein. Daar alle nulpunten w_{np} van $g_n(w)$ met voldoende grote modulus in $S(2\beta)$ liggen (β vast, $2\alpha < 2\beta < \pi$) en de limietfunctie $g(w)$ van $\{g_n(w)\}$ geheel is, geldt (6.5). Zie verder het bewijs van stelling 16, directe deel; in plaats van op stelling 2 doe men een beroep op stelling 14 om te bewijzen dat $-b \in S(\alpha)$.

(Omgekeerde gedeelte). Vgl. de overeenkomstige gedeelten van de bewijzen van stelling 14 en 16.

De vertaling van stelling 14 met (C''_{14}) wordt me te ingewikkeld. Wel noem ik het volgende bijzondere geval, waarbij ook in het omgekeerde gedeelte $\alpha = 0$.

Stelling 18. Als de rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ voldoet aan

(Z_{18}) alle nulpunten van $f_n(z)$ liggen in de strook $|I(z)| \leqslant \Delta$ $(\Delta \geqslant 0, n = 1,2\ldots)$,

(C_{18}) $\{f_n(z)\}$ convergeert in de punten van een verzameling E met een eindig verdichtingspunt; als de limietfunctie $f(z)$ van $\{f_n(z)\}$ op $E \not\equiv 0$ is, bestaat er een punt ζ dat geen inwendig punt is van de strook zo, dat voor zekere constanten d_1 en d_2,

(6.9) $0 < d_1 < |f_n(\zeta)| < d_2, \ |f_n'(\zeta)| < d_2, \ |f_n''(\zeta)| < d_2$ $(n = 1, 2 \ldots)$

dan geldt (C_1) steeds als $f(z)$ op $E \not\equiv 0$. $f(z)$ is dus geheel; hij heeft de gedaante (6.3), waarin

(6.10) $\begin{cases} |\mathcal{I}(z_p)| \leqslant \Delta, \ \sum |z_p|^{-2} < \infty, \ b \text{ reëel} \leqslant 0, \\ 2\Delta b \leqslant \mathcal{I}(a) + \sum \mathcal{I}(z_p^{-1}) \leqslant -2\Delta b. \ m \text{ geheel} \geqslant 0 \end{cases}$

Omgekeerd is elke (gehele) functie van de gedaante (6.3)+(6.10) de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ die aan (Z_{18}) voldoet.

Opmerking. Een bijzonder geval van stelling 18 werd als een vermoeden uitgesproken door N.G. de Bruijn [1]. Dit vermoeden werd de aanleiding tot dit artikel.

Wij laten het bewijs van stelling 18 hier weg. Wij merken alleen nog op, dat men het directe deel van stelling 18 ook kan afleiden door stelling 13 toe te passen zowel voor het halfvlak $I(z) \geqslant -\Delta$ als voor het halfvlak $I(z) \leqslant \Delta$ (het eerst voor het halfvlak dat ζ niet als inwendig punt bevat).

§ 7. Dubbelsector met opening $\frac{1}{2}\pi$ of $> \frac{1}{2}\pi$.

We noemen eerst

Stelling 19. De functie

(7.1) $$f(z) = e^{az+bz^2+cz^3+dz^4}$$

is dan en alleen dan de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ waarvan alle nulpunten $\in \mathcal{U}(\frac{\pi}{2})$ als

(7.2) $\mathcal{R}(b) \leqslant 0$, d reëel $\geqslant 0$.

Met behulp van stelling 19 kan men afleiden

Stelling 20. Als de rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ voldoet aan

(Z_{20}) alle nulpunten van $f_n(z)$ liggen in $U(\frac{1}{2}\pi)$, $(n=1,2,\ldots)$

en aan $(C_{20}) = (C_2)$, dan geldt (C_1) steeds als de limietfunctie $f(z)$ van $\{f_n(z)\}$ in $C(r) \not\equiv 0$ is. $f(z)$ is dus geheel; hij heeft de vorm

(7.3) $$A e^{az+bz^2+cz^3+dz^4} z^m \prod_p \left(1 - \frac{z}{z_p}\right) e^{\frac{z}{z_p} + \frac{z^2}{2z_p^2} + \frac{z^3}{3z_p^3}}$$

waarin

(7.4) $\begin{cases} z_p \in \mathcal{U}(\frac{1}{2}\pi), \text{ d.i. } \mathcal{R}(z_p^2) \geqslant 0, \ \sum \mathcal{R}(z_p^{-2}) \text{ convergeert met som} \\ \leqslant -2\mathcal{R}(b) \quad ; \text{ d reëel} \geqslant 0, \text{ m geheel} \geqslant 0, \sum |z_p|^{-4} < \infty. \end{cases}$

Omgekeerd is elke gehele functie van de gedaante (7.3)+(7.4) de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen die aan (Z_{20}) voldoet.

Voor een dubbelsector met opening $>\frac{1}{2}\pi$ geldt (vgl. § 5).

Stelling 21. Elke gehele functie f(z), waarvan alle nulpunten liggen in een $U(\alpha)$ met $\alpha > \frac{\pi}{2}$, is de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $f_n(z)$ waarvan alle nulpunten liggen in $U(\alpha)$.

§ 8. k halflijnen. We beginnen met

Stelling 22. De functie

$$(8.1) \qquad f(z) = e^{a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k}$$

is dan en alleen dan de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ waarvan alle nulpunten behoren tot het domein D', bestaande uit de k halflijnen $\arg z = j\,(2\pi/k)$, $|z| \geq 0$, ($j = 1,2\dots,k$) als

$$(8.2) \qquad \begin{cases} a_k \text{ reëel } \leq 0 \text{ (k oneven)} \\ a_k \text{ reëel } \leq 0 \ a_{\frac{1}{2}k} \text{ reëel (k even).} \end{cases}$$

Met behulp van stelling 22 kan men afleiden

Stelling 23. Als de rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ voldoet aan (Z_{23}) alle nulpunten van $f_n(z)$ liggen in het domein D' van stelling 22 ($n = 1,2,..$),

en aan $(C_{23}) = (C_2\ )$, dan geldt (C_1) steeds als de limietfunctie f(z) van $\{f_n(z)\}$ in $C(r) \not\equiv 0$ is. f(z) is dus geheel; hij heeft de vorm

$$(8.3) \qquad A e^{a_1 z + \dots + a_k z^k} z^m \prod_p \left(1 - \frac{z}{z_p}\right) e^{\frac{z}{z_p} + \dots + \frac{z^{k-1}}{(k-1) z_p^{k-1}}},$$

waarin

$$(8.4) \qquad a_k \text{ reëel } \leq 0,\ m \text{ geheel } \geq 0,\ z_p \in D',\ \sum z_p^{-k} < \infty.$$

en als k even is bovendien

$$(8.5) \qquad a_{\frac{1}{2}k} \text{ reëel}.$$

Omgekeerd is elke gehele functie van de gedaante (8.3)+(8.4)+(8.5) de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen die aan (Z_{23}) voldoet.

Het geval van een domein D, gevormd door k willekeurige halflijnen, beginnend in O, eist wat omzichtigheid. We noemen hier alleen

Stelling 24. Is de gehele functie f(z) de uniforme limiet, in elk eindig domein, van een rij veeltermen $\{f_n(z)\}$ waarvan alle nulpunten liggen in D, dan is f(z) van eindige orde q.

Laat $w_1, w_2, \dots w_k$ de argumenten zijn van de k halflijnen. Laat s het kleinste natuurlijke getal zijn, waarvoor de halflijnen met argumenten $sw_1, sw_2, \dots sw_k$ tot een sector met opening $< \pi$ behoren.

En laat t het kleinste natuurlijke getal zijn, waarvoor de halflijnen met argumenten tw_1, $tw_2, \ldots tw_k$ tot een sector met opening π behoren. Dan geldt

(8.6) $$q \leq \min(s, 2t) .$$

(Vgl. stelling 10 en 11).

Literatuur.

1. N.G. de Bruijn, On the roots of trigonometric integrals, verschijnt binnenkort in Duke Math. Journal.

2. B. Lindwart en G. Pólya, Über einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 37 (1914) 297-304.

3. N. Obrechkoff, Quelques classes de fonctions entières limites de polynomes et de fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles, Act.Sci.et Ind. 891, Parijs 1941.

4. O. Szász, On sequences of polynomials and the distribution of their zeros, Bull.Am. Math.Soc. 49 (1943) 377-383.

5. E.C. Titchmarsh, The theory of functions, Londen, 1947.