STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 017

Voordracht in de serie Actualiteiten

A. Nijenhuis

29 september 1951

Een toepassing van anholonome coördinaten

1951

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam - O.

Rapport ZW 1951 - 017.

Voordracht door A. Nijenhuis in de serie
Actualiteiten op 29 September 1951.

Een toepassing van anholonome coördinaten.

I. Uitgangspunt van de beschouwingen is een X_n ; d.i. een n-dimensionale ruimte (topologisch equivalent van een n-dimensionale kubus) waarin de toegelaten coördinatenstelsels verkregen worden uit een gegeven stelsel door omkeerbare analytische transformaties. Begrippen als "rechte lijn", "plat vlak", etc. kunnen niet gedefinieerd worden zolang er verder niets gegeven wordt, omdat begrippen als "lineaire functie van de coördinaten" e.d. geen betekenis hebben, onafhankelijk van het gebruikte coördinatenstelsel.

Zijn ξ^κ $(\kappa = 1,..,n)$ b.v. oude coördinaten, en $\xi^{\kappa'}$ $(\kappa' = 1',..,n')$ nieuwe, (merk op dat we het accent aan de index hangen), dan geldt dus:

$$\xi^{\kappa'} = f^{\kappa'}(\xi^\kappa) \quad ; \quad \xi^\kappa = \varphi^\kappa(\xi^{\kappa'}) \tag{1}$$

voor de transformatie van het stelsel (κ) naar het stelsel (κ') en omgekeerd. De differentialen $d\xi^\kappa$ transformeren dan als volgt:

$$\begin{aligned} d\xi^{\kappa'} &= A^{\kappa'}_\kappa \, d\xi^\kappa \;, \quad A^{\kappa'}_\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^{\kappa'}}{\partial \xi^\kappa}, \\ d\xi^\kappa &= A^\kappa_{\kappa'} \, d\xi^{\kappa'} \;, \quad A^\kappa_{\kappa'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^\kappa}{\partial \xi^{\kappa'}}, \end{aligned} \tag{2}$$

dus homogeen lineair (merk op dat over een paar ongelijkstandige gelijke indices automatisch gesommeerd wordt; Einstein-conventie). In de infinitesimale omgeving van een punt zijn de transformaties dus wèl lineair. Voegen we aan elk punt ξ^κ een E_n (gecentreerde vlakke affine ruimte) toe, dan kunnen de $d\xi^\kappa$ beschouwd worden als te liggen in deze z.g. locale E_n. De $d\xi^\kappa$ behoeven dan niet meer infinitesimaal gedacht te worden, reden waarom we definieren dat getallen v^κ een contravariante vector voorstellen als ze bij coördinatentransformaties getransformeerd worden als $d\xi^\kappa$:

(3) $$v^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa}\, v^{\kappa}.$$

Evenzo definieren we een <u>covariante</u> <u>vector</u> w_λ door de transformatiewijze

(4) $$w_{\lambda'} = A^{\lambda}_{\lambda'}\, w_\lambda ,$$

en als generalisatie van bovengenoemde transformeert een <u>affinor</u> $P^{\kappa}_{\cdot\mu\lambda}$ als volgt:

(5) $$P^{\kappa'}_{\cdot\lambda'\mu'} = A^{\kappa'}_{\kappa} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\mu}_{\mu'} P^{\kappa}_{\cdot\lambda\mu} .$$

We merken op dat de transformaties (3, 4, 5) een <u>groep</u> vormen. Dit volgt uit:

(6) $$A^{\kappa''}_{\kappa} = \frac{\partial\xi^{\kappa''}}{\partial\xi^{\kappa}} = \frac{\partial\xi^{\kappa''}}{\partial\xi^{\kappa'}} \cdot \frac{\partial\xi^{\kappa'}}{\partial\xi^{\kappa}} = A^{\kappa''}_{\kappa'} A^{\kappa'}_{\kappa},$$

en de aanwezigheid van een <u>invers</u> element

(7) $$A^{\kappa'}_{\lambda} A^{\kappa}_{\kappa'} = \frac{\partial\xi^{\kappa'}}{\partial\xi^{\lambda}} \cdot \frac{\partial\xi^{\kappa}}{\partial\xi^{\kappa'}} = \frac{\partial\xi^{\kappa}}{\partial\xi^{\lambda}} = A^{\kappa}_{\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{als } \kappa = \lambda, \\ 0 & \text{als } \kappa \neq \lambda . \end{cases}$$

Een bijzondere rol spelen de <u>maatvectoren</u> $\underset{\lambda}{e}^{\kappa}$, $\overset{\kappa}{e}_{\lambda}$ van het stelsel (κ). De eerste zijn contravariante vectoren, de tweede covariante. De kentallen zijn 1 of 0 al naar κ en λ gelijk of ongeli zijn. Ten opzichte van een stelsel (κ') geldt deze laatste eigenschap natuurlijk <u>niet</u>: $\underset{\lambda}{e}^{\kappa'}$, $\overset{\kappa}{e}_{\lambda'}$ hebben de waarden

(8) $$\underset{\lambda}{e}^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa}\, \underset{\lambda}{e}^{\kappa} \stackrel{*}{=} A^{\kappa'}_{\lambda} \quad ; \quad \overset{\kappa}{e}_{\lambda'} = A^{\lambda}_{\lambda'}\, \overset{\kappa}{e}_{\lambda} \stackrel{*}{=} A^{\kappa}_{\lambda'} .$$

terwijl er dan bij (κ') een <u>ander</u> stelsel maatvectoren $\underset{\lambda'}{e}^{\kappa'}$, $\overset{\kappa'}{e}_{\lambda'}$ behoort dat dàn eenvoudige kentallen heeft.

Als b.v. w_λ een covariant vectorveld is (d.w.z. w_λ is gedefinieerd in een gebied van X_n), dan is de uitdrukking $\partial_\mu w_\lambda \stackrel{def}{=} \partial w_\lambda / \partial\xi^{\mu}$ géén affinor:

(9) $$\partial_{\mu'} w_{\lambda'} = \partial_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} w_\lambda = (\partial_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'})\, w_\lambda + A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\mu}_{\mu'}\, \partial_\mu w_\lambda ,$$

terwijl dit wel het geval is met $2\,\partial_{[\mu} w_{\lambda]} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu w_\lambda - \partial_\lambda w_\mu$:

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
2\,\partial_{[\mu'} w_{\lambda']} &= 2(\partial_{[\mu'} A^{\lambda}_{\lambda']}) w_\lambda + 2\,A^{\lambda}_{[\lambda'} A^{\mu}_{\mu']}\, \partial_\mu w_\lambda = \\
&= 2(\partial_{[\mu'} \partial_{\lambda']} \xi^\lambda) w_\lambda + 2\,A^{[\lambda}_{\lambda'} A^{\mu]}_{\mu'}\, \partial_\mu w_\lambda = 2\,A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\mu}_{\mu'}\, \partial_{[\mu} w_{\lambda]} .
\end{aligned}
$$

Deze uitdrukking heet de <u>rotatie</u> van w_λ . Het is bekend dat $\partial_{[\mu} w_{\lambda]} = 0$, dan en alleen dan als w_λ een <u>gradient</u> is, d.w.z. als er een functie s is, zodat $w_\lambda = \partial_\lambda s$. Met name zijn de covariante maatvectoren gradienten, omdat

$$
(11)\qquad \partial_{[\mu} \overset{\kappa}{e}_{\lambda]} = 0 .
$$

De scalar s behorende bij $\overset{\kappa}{e}_\lambda$ is numeriek gelijk aan de coördinaat ξ^κ.

II. Voert men in elke locale E_n een nieuw coördinatenstelsel (h) in $(h = 1, .., n)$ door het geven van b.v. n lineair onafhankelijke maatvectoren $\underset{j}{e}^{\kappa}$ (of $\overset{h}{e}_\lambda$), dan is het geenszins zeker dat $\partial_{[\mu} \overset{h}{e}_{\lambda]} = 0$. In het algemeen bestaan er dan ook géén functies ξ^h zodat de gradient van ξ^h gelijk is aan $\overset{h}{e}_\lambda$. Men spreekt dan van een anholonoom coördinatenstelsel (h) . Vectoren e.d. transformeren nu ook als in (3, 4, 5), b.v.

$$
(12)\qquad v^h = A^h_\kappa v^\kappa ; \qquad\qquad v^\kappa = A^\kappa_h v^h .
$$

Met differentiaties moet nu echter voorzichtig omgegaan worden. Definieren we $\partial_j \stackrel{\text{def}}{=} A^\mu_j \partial_\mu$, dan geldt in het algemeen $\partial_j \partial_i \neq \partial_i \partial_j$. Hiertoe voeren we in het <u>anholonomiteitsobject</u>:

$$
(13)\qquad \Omega_{ji}^{\;\;h} \stackrel{\text{def}}{=} A^\mu_j A^\lambda_i\, \partial_{[\mu} A^h_{\lambda]} = -(\partial_{[j} A^\lambda_{i]}) A^h_\lambda
$$

(we zullen <u>Griekse</u> indices reserveren voor <u>holonome</u> stelsels). De $\Omega_{ji}^{\;\;h}$ zijn nul, dan en alléén dan als $\partial_{[\mu} A^h_{\lambda]} = 0$, d.w.z. als er functies ξ^h zijn, zodat $A^h_\lambda = \partial_\lambda \xi^h$; het stelsel (h) is dan <u>holonoo</u>
Er geldt nu:

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
2\,\partial_{[j} \partial_{i]}\, s &= 2\,\partial_{[j} A^\mu_{i]} \partial_\mu s = 2(\partial_{[j} A^\mu_{i]}) \partial_\mu s + 2\,A^\mu_{[i} A^\lambda_{j]}\, \partial_\lambda \partial_\mu s = \\
&= -2\,\Omega_{ji}^{\;\;h} A^\mu_h \partial_\mu s + 2\,A^{[\mu}_j A^{\lambda]}_i\, \partial_\mu \partial_\lambda s = \\
&= -2\,\Omega_{ji}^{\;\;h} \partial_h s + 2\,A^\mu_j A^\lambda_i\, \partial_{[\mu} \partial_{\lambda]} s = -2\,\Omega_{ji}^{\;\;h} \partial_h s .
\end{aligned}
$$

Voor de rotatie van w_λ vinden we nu:

(15) $$2\partial_{[\mu} w_{\lambda]} = 2\partial_{[\mu} A^h_{\lambda]} w_h = 2(\partial_{[\mu} A^h_{\lambda]}) w_h + 2 A^h_{[\lambda} A^i_{\mu]} \partial_i w_h =$$
$$= 2 A^j_\mu A^i_\lambda (\Omega^h_{ji} w_h + \partial_{[j} w_{i]}).$$

dus in anholonome coördinaten is de rotatie van w_i gegeven door:

(16) $$2\partial_{[j} w_{i]} + 2\Omega^h_{ji} w_h.$$

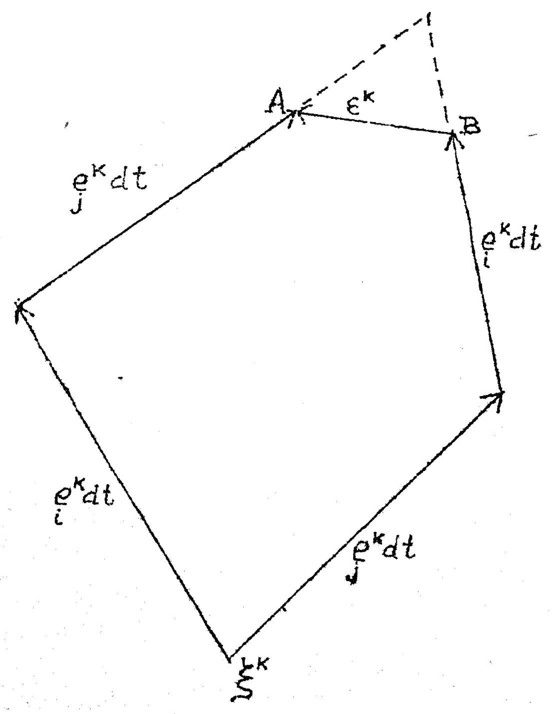
Een speciaal geval van anholonome coördinaten heeft men als de maatvectoren wel-is-waar niet bij een holonoom stelsel behoren, maar als ze door vermenigvuldiging met een geschikte factor dit wèl doen, dus als

(17) $$\partial_{[\mu} \overset{h}{\alpha} \overset{h}{e}_{\lambda]} = 0.$$

voor geschikt gekozen functies $\overset{h}{\alpha}$. Nemen we nu $\overset{h'}{e}_\lambda$ gelijk aan $\overset{h}{\alpha}\overset{h}{e}_\lambda$, dan geldt $A^{h'}_j \neq 0$ voor corresponderende h' en j, en $A^{h'}_j = 0$ voor niet corresponderende h', j. Hieruit, en uit het feit dat (h') holonoom is, kan men bewijzen dat

(18) $$\Omega^h_{ji} = 0 \qquad \text{voor} \quad h, i, j \neq .$$

Ook het omgekeerde geldt. Aanschouwelijk blijkt dit uit de figuur.



Ten gevolge van de niet-holonomiteit van (h) is het "vierhoekje" niet gesloten. Dit heeft tot gevolg dat men bij toepassing van $\partial_i \partial_j$ in het punt A uitkomt; door toepassing van $\partial_j \partial_i$ in B. De term met Ω in (14) geeft het verschil tussen de twee aan. Kan men (zoals in het beschouwde geval) door verlenging van de maatvectoren het vierhoekje wèl sluiten, dan ligt de defectvector ε^K in het vlak van $\underset{i}{e}^K$ en $\underset{j}{e}^K$, en dus is de correctie die door (14) gegeven wordt, een som van termen $\partial_i s$ en $\partial_j s$. Dan moet echter $\Omega^h_{ji} = 0$ zijn, als h niet een der waarden i of j aanneemt. Dit wordt door (18) aangegeven (Bewezen is hiermee natuurlijk niets; het exacte bewijs zou teveel tijd vragen).

De X_2's, bepaald door de vergelijkingen

(19) $$\xi^{3'} = \text{const.}, \qquad \xi^{4'} = \text{const.}, \ldots \qquad \xi^{n'} = \text{const.}$$

worden omhuld door de vlakken door $e_{1'}^{\kappa}$, $e_{2'}^{\kappa}$. Deze vlakken zijn echter dezelfde als die door e_1^{κ}, e_2^{κ} omdat de betreffende vectoren dezelfde richting hebben. Hieruit volgt dat elk tweetal maatvectoren van een anholonoom coördinatenstelsel waarvoor (18) geldt, de eigenschap heeft, een stelsel X_2's te omhullen.

Dat ook het omgekeerde geldt, blijkt als volgt. Zijn η^{α} coördinaten op een X_2 omhuld door e_1^{κ}, e_2^{κ}, $\xi^{\kappa} = \xi^{\kappa}(\eta^{\alpha})$, dan zijn $\partial_{\alpha}\xi^{\kappa}$ lineaire combinaties van e_1^{κ}, e_2^{κ} en omgekeerd (beide paren liggen in het raakvlak); nemen de indices a, b de waarden $1, 2$ aan, dan zijn er dus getallen B_{β}^{a} en B_{b}^{α} zodat

(20) $$\partial_{\beta}\xi^{\kappa} = B_{\beta}^{b} A_{b}^{\kappa}; \qquad A_{b}^{\kappa} = B_{b}^{\beta}\,\partial_{\beta}\xi^{\kappa}$$

dus: voor een functie $s = f(\xi^{\kappa}(\eta^{\alpha}))$ hebben we:

$$0 = \partial_{[\beta}\partial_{\alpha]} s = \partial_{[\beta} B_{\alpha]}^{a}\,\partial_a s = (\partial_{[\beta} B_{\alpha]}^{a})\,\partial_a s + B_{[\alpha}^{a} B_{\beta]}^{b}\,\partial_b\partial_a s =$$

(21) $$= (\partial_{[\beta} B_{\alpha]}^{a})\,\partial_a s + B_{\alpha}^{a} B_{\beta}^{b}\,\partial_{[b}\partial_{a]} s;$$

$$\partial_{[1}\partial_{2]} s = B_1^{\alpha} B_2^{\beta} B_{\alpha}^{a} B_{\beta}^{b}\,\partial_{[b}\partial_{a]} s = -B_1^{\alpha} B_2^{\beta}(\partial_{[\beta} B_{\alpha]}^{a})\,\partial_a s.$$

Vergelijking met (14) toont aan dat $\Omega_{12}^{\ \ h} = 0$ als $h \neq 1, 2$. Derhalve is (18) de nodig en voldoende voorwaarde dat elk paar e_i^{κ}, e_j^{κ} een stelsel X_2's omhult.

III. Zij gegeven een affinorveld $h_{\mu}^{\cdot\kappa}$ met de eigenschap dat van de seculairvergelijking

(22) $$\det\left(h_{\mu}^{\cdot\kappa} - \lambda A_{\mu}^{\kappa}\right) = 0$$

alle wortels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ <u>verschillend</u> zijn. Er zijn dan in elk punt n eigenvectoren e_i^{κ}, die een anholonoom coördinatenstelsel (h) in X_n vormen. We stellen ons nu de vraag onder welke voorwaarde deze (op een factor na bepaalde) vectoren twee aan twee een stelsel X_2's omhullen. Het blijkt dat deze vraag beantwoord kan worden door gebruikmaking van de volgende affinor:

(23) $$H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} \overset{\text{def}}{=} 2\,h_{[\mu}^{\cdot\rho}\,\partial_{|\rho|} h_{\lambda]}^{\cdot\kappa} - 2\,h_{\rho}^{\cdot\kappa}\,\partial_{[\mu} h_{\lambda]}^{\cdot\rho}.$$

Dat dit een <u>affinor</u> is, volgt uit een berekening analoog aan (10), alleen is het hier wat bewerkelijker. Schrijven we H ten opzichte van <u>anholonome</u> coördinaten (h), dan volgt door een berekening analoog aan (15), maar ook wat ingewikkelder:

$$
\begin{aligned}
H_{ji}^{\cdot\cdot h} &= 2\, h_{[j}^{\cdot\ell}\, \partial_{|\ell|}\, h_{i]}^{\cdot h} - 2\, h_{\ell}^{\cdot h}\, \partial_{[j}\, h_{i]}^{\cdot \ell} + 4\, h_{[j}^{\cdot \ell}\, \Omega_{|\ell|i}^{m}\, h_{m}^{\cdot h} - \\
&\quad - 2\, h_{j}^{\cdot \ell}\, h_{i}^{\cdot m}\, \Omega_{\ell m}^{h} - 2\, h_{\ell}^{\cdot h}\, h_{m}^{\cdot \ell}\, \Omega_{ji}^{m} .
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Nemen we voor (h) het stelsel gevormd door de eigenvectoren $\underset{i}{e}^{\kappa}$, dan geldt $h_{j}^{\cdot h} \overset{*}{=} \underset{j}{\lambda}\, A_{j}^{h}$, d.w.z. $h_{j}^{\cdot h}$ is in diagonaalvorm met $\underset{1}{\lambda}, \ldots, \underset{n}{\lambda}$ in de hoofddiagonaal. Substitutie in (24) leidt tot:

$$
H_{ji}^{\cdot\cdot h} \overset{*}{=} (\underset{j}{\lambda} - \underset{i}{\lambda})(A_{i}^{h}\, \partial_{j} \underset{i}{\lambda} + A_{j}^{h}\, \partial_{i} \underset{j}{\lambda}) - 2\, (\underset{h}{\lambda} - \underset{i}{\lambda})(\underset{h}{\lambda} - \underset{j}{\lambda})\, \Omega_{ji}^{h} .
\tag{25}
$$

De eerste term in het rechterlid is steeds nul voor $h, i, j \neq$; omhult elk tweetal eigenvectoren een stelsel X_2's, dan is ook de tweede term nul. Daar het omgekeerde ook geldt, volgt:

<u>De eigenvectoren $\underset{i}{e}^{\kappa}$ van $h_{\lambda}^{\cdot\kappa}$ omhullen twee aan twee een stelsel X_2's, dan en alleen dan als $H_{ji}^{\cdot\cdot h} = 0$ voor $h, i, j \neq$.</u>

Deze voorwaarde kan geschreven in een vorm die onafhankelijk is van het stelsel (h). Men kan bewijzen dat $H_{ji}^{\cdot\cdot h} = 0$; $h, i, j \neq$, equivalent is met

$$
H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = \underset{0}{p}_{[\mu}\, A_{\lambda]}^{\kappa} + \underset{1}{p}_{[\mu}\, h_{\lambda]}^{\cdot\kappa} + \underset{2}{p}_{[\mu}\, \overset{2}{h}_{\lambda]}^{\cdot\kappa} + \ldots + \underset{n-2}{p}_{[\mu}\, \overset{n-2}{h}_{\lambda]}^{\cdot\kappa}
\tag{26}
$$

voor gunstig gekozen $\underset{0}{p}_{\mu}, \ldots, \underset{n-2}{p}_{\mu}$. $\overset{2}{h}_{\lambda}^{\cdot\kappa}$ staat hier als afkorting voor $h_{\lambda}^{\cdot\rho} h_{\rho}^{\cdot\kappa}$, etc.

De voorwaarde (26) heeft het voordeel dat ze gecontroleerd kan worden, <u>zonder</u> dat men eerst de seculairvergelijking heeft moeten oplossen.

IV. Enkele bewijzen konden niet gegeven worden. Hiervoor zij verwezen naar mijn artikel " X_{n-1}-forming sets of eigenvectors", Proc. Kon. Ac. v. Wet. A <u>14</u>, 200 - 212 (1951), Indag. Math. <u>13</u>, 200 - 212 (1951). Hier vindt men ook nadere bijzonderheden, andere vormen voor de formule (26) en enige opmerkingen over de historische ontwikkeling van dit probleem. Het bewijs, gegeven in III is echter nog niet gepubliceerd.