STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-018

Toepassingen van interpolatie in de theorie der functies van het exponentiële type

J. Korevaar

1948

Toepassingen van interpolatie in de theorie der functies van het exponentiële type

Voordracht van J. Korevaar in het Mathematisch Instituut der Technische Hogeschool te Delft, 13 December 1948.

(Interpolatory methods applied to functions of exponential type).

§ 1. Introduction. Summary of results.

A function f(z) defined on a set E is said to be of exponential type if there are constants A and B such that

(1.1) $$|f(z)| < B\, e^{A|z|}$$

for all $z \in E$. An entire function f(z) is said to be of exponential type if an inequality (1.1) is valid for all z. We say that f(z) is of type α on E if to every $\varepsilon > 0$ there exists a $B(\varepsilon)$ such that

(1.2) $$|f(z)| < B(\varepsilon)\, e^{(\alpha+\varepsilon)|z|}$$

for all $z \in E$. An entire function f(z) is of type α if an inequality (1.2) holds for (every $\varepsilon > 0$ and) all z. In this sense

$$e^{az},\ \sin az,\ \cos az,\ z^2 e^{az},\ z \sin a z$$

are all of type $|a|$, while

$$\cos \sqrt{z} = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \ldots,\quad \sin z^2$$

are of type 0, and not of exponential type, respectively. $\sin z^2$ might however be called "of order 2 and exponential type" ($|f(z)| < B\, e^{A|z|^2}$).

By a theorem of S. Bernstein [1] (see § 2) an entire function of type 0 can not be bounded along a line, if it is not a constant. In 1931 G. Pólya [14] set the problem to prove that an entire function of type 0 can not be bounded on the set of the integers, except if it is a constant. Several proofs have been given. See for example G. Szegö [18], L. Tschakaloff [20], R.E.A.C. Paley and N. Wiener [11] p. 81-83, N. Levinson [9] p. 127-129 and J. Korevaar [6]. The proof which will be given in § 3 reduces Pólya's problem to the theorem of S. Bernstein mentioned above: it is shown that "f(n) bounded" implies "f(x) bounded" (x real).

The conclusion "f(n) bounded" $\rightarrow$ "f(x) bounded" is valid not only for entire functions of type 0, but for all entire functions of type $< \pi$. This was proved by Miss M.L. Cartwright [4]. Other proofs were given by A. Pfluger [12], A.J. Macintyre [10] and R.P. Boas Jr [3].

In § 4 we prove a somewhat better result (type $<\pi$ only on the imaginary axis) by means of an interpolation formula due to Boas [3]. This interpolation formula is proved in a new and much simpler way (see § 4, we start from the "cardinal series" (3.2)). The most important result of §4 is, however, that we could prove the following theorem of Miss Cartwright [4] in a similar way: if f(z) is analytic and of exponential type $<\pi$ in $R(z) \geq 0$, then "f(n) bounded" implies "f(x) bounded" ($n = 1,2,\dots;\ x \geq 0$). It is sufficient here also to suppose that f(z) is of type $<\pi$ on the imaginary axis. This theorem further leads to an improvement of a theorem of V. Bernstein [2] (see § 4). In § 5 we prove the following extension of Miss Cartwright's first theorem: if f(z) is an entire function of exponential type, of type $< k\pi$ on $z = iy$ (y real), if $f(n), f'(n), \dots, f^{(k-1)}(n)$ are bounded (n integer) then f(x) is bounded (x real). (Compare $f(z) = z \sin^k \pi z$, however).

V. Ganapa thy Iyer [5] and N. Levinson [8], [9] p. 122-126, have proved some results on entire functions bounded on two "orthogonal" sequences. For example, if f(z) is of type $<\pi\sqrt{2}$, bounded on $\{n\}$ and $\{im\}$ (n,m integers), then f(z) is a constant. Several generalizations are given in § 5. One is as follows. Let $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ $(k \geq 2)$ be complex numbers of different arguments (mod π). Let $\mu_j = 1/\lambda_j$. Let $\sin \pi\mu_1 z, \dots\dots \sin \pi\mu_k z$ be of type t on the line p.
If f(z) is an entire function of exponential type, of type $\beta < t$ on p, and if $|f(\lambda_j n)| \leq C$ ($j = 1,2,\dots k$; n integer) then f(z) is a constant. An interesting result for a half-plane is also given.

In § 6 we finally mention a result of Pólya [15] and Pfluger [12] on functions of order 2 and exponential type.

Our proofs depend on theorems of E. Phragmén and E. Lindelöf [13] combined with interpolation formulae which are partly new. More details will be given in a Leyden thesis.

§ 2. Stellingen van E. Phragmén en E. Lindelöf met enkele toepassingen: een stelling van S. Bernstein en enkele ongelijkheden voor functies van het exponentiële type.

Iedereen kent het maximum - modulus principe: als f(z) analytisch is in een eindig samenhangend gebied G, en continu in $\overline{G} = G + \Gamma$ (Γ de rand van G), dan volgt uit

(2.1) $$\max_{z \text{ op } \Gamma} |f(z)| = C$$

dat $|f(z)| < C$ overal in G, tenzij f(z) een constante is. Steeds volgt uit (2.1) echter

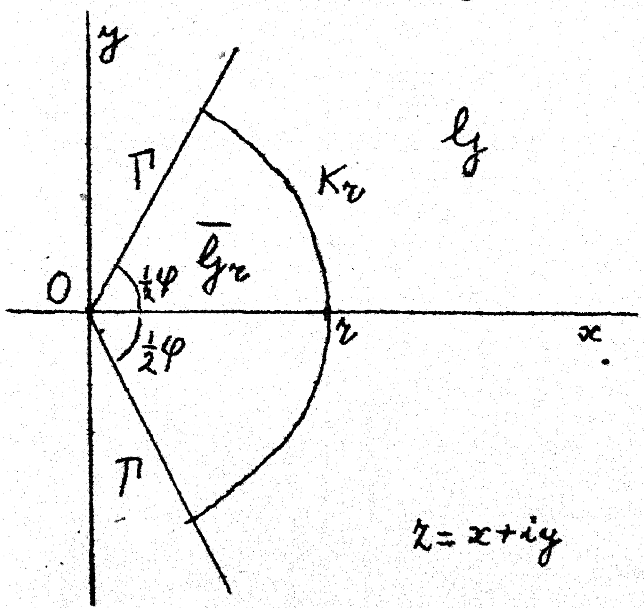
(2.2) $$|f(z)| \leqslant C$$

voor alle punten z van $\overline{G}$. De volgende stellingen van Phragmén en Lindelöf zijn uitbreidingen van de maximum-modulus stelling tot zekere oneindige gebieden.

Stelling 1. (Zie [13] of [19] pag. 177). Laat f(z) analytisch zijn in, en op de rand Γ van, een sector G met opening $\varphi < \pi$. Laat f(z) van het exponentiële type zijn in $\overline{G} = G + \Gamma$, d.w.z.

(2.3) $$|f(z)| < B\, e^{A|z|}$$

voor zekere constanten A en B, voor alle z van $\overline{G}$. Dan volgt uit (2.2) voor z op Γ dat (2.2) geldt voor alle z van $\overline{G}$.



Bewijs. Laat G zijn de sector $|\arg z| < \frac{1}{2}\varphi$. Laat

(2.4) $g_\delta(z) = e^{-\delta z^\lambda}$, $h_\delta(z) = f(z)\, g_\delta(z)$.

Hierin is $\delta > 0$, $1 < \lambda < \pi/\varphi$ ondersteld. z^λ zal die tak zijn van de functie, die 1 is in z=1. $h_\delta(z)$ is analytisch in G, continu in $\overline{G}$. Op K_r ($z = r\, e^{i\psi}$, $|\psi| \leqslant \frac{1}{2}\varphi$) geldt

$$|g_\delta(z)| = e^{-\Re(\delta r^\lambda e^{i\lambda\psi})} = e^{-\delta r^\lambda \cos\lambda\psi} \leqslant e^{-\delta r^\lambda \cos\frac{1}{2}\lambda\varphi}.$$

$\cos\frac{1}{2}\lambda\varphi > 0$ daar $\frac{1}{2}\lambda\varphi < \frac{1}{2}\pi$. We hebben dus wegens (2.3) op K_r

(2.5) $$|h_\delta(z)| \leq B\, e^{-(\delta\cos\frac{1}{2}\lambda\varphi) r^\lambda + A r} = \mu(r),$$

waarin $\mu(r) \to 0$ $(r \to \infty)$. Op Γ geldt (zie het ondersteelde)

(2.6) $$|h_\delta(z)| \leqslant C\, e^{-\delta r^\lambda \cos\frac{1}{2}\lambda\varphi} \leq C.$$

Pas nu de maximum-modulus stelling toe op $h_\delta(z)$ in $\overline{G}_r$ $(|z| \leqslant r, |\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\varphi)$. We vinden

(2.7) $\qquad |h_\delta(z)| \leqslant \max\{\mu(r), C\}$, z in $\overline{G}_r$.

Laten we in (2.7) bij vaste z $r \to \infty$, dan krijgen we $|h_\delta(z)| \leqslant C$ (z in $\overline{G}$), ofwel

(2.8) $\qquad |f(z)| \leqslant C\,|e^{\delta z^\lambda}|$, z in $\overline{G}$.

Laten we tenslotte bij vaste z $\delta \to 0$, dan geeft (2.8) $|f(z)| \leqslant C$, overal in $\overline{G}$.

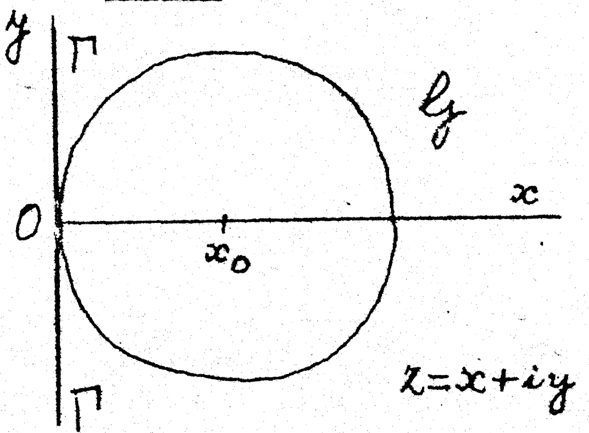
Opmerking. De voorwaarde dat f(z) van het exponentiële type is in $\overline{G}$ kan door een zwakkere vervangen worden ([13] of [19]). De voorwaarde $\varphi < \pi$ is essentiëel: $e^{\alpha z}$ $(\alpha > 0)$ is begrensd op de imaginaire as, maar niet in het halfvlak $\Re(z) \geqslant 0$. We zullen wel een stelling voor een halfvlak bewijzen, maar dan moeten we de grootte van f(z) sterker beperken dan in (2.3).

Stelling 2. (Zie [13] of [19] p. 178). Laat f(z) analytisch zijn in, en op de rand Γ van een halfvlak G. Laat f(z) van het exponentiële type 0 zijn in $\overline{G} = G + \Gamma$, d.w.z. bij elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een constante $B(\varepsilon)$ zó, dat

(2.9) $\qquad |f(z)| < B(\varepsilon)\, e^{\varepsilon |z|}$

voor alle z van $\overline{G}$. Dan volgt uit (2.2) voor z op Γ dat (2.2) geldt voor alle z van $\overline{G}$.

Bewijs. Laat G zijn het halfvlak $x > 0$. We beschouwen de hulpfunctie



(2.10) $\qquad k_\delta(z) = f(z)\, e^{-\delta z}$,

$\delta > 0$. Daar we in (2.9) $\varepsilon = \frac{1}{2}\delta$ mogen nemen zien we dat $k_\delta(x) \to 0$ $(x \to \infty)$. $|k_\delta(x)|$ heeft dus een maximum op $0 \leq x < \infty$:

(2.11) $|k_\delta(x)| \leqslant |k_\delta(x_0)| = D$,

zeg. Op de imaginaire as geldt $|k_\delta(z)| = |f(z)| \leqslant C$. Hieruit, uit (2.11) en uit het feit dat $k_\delta(z)$ zowel in het eerste als in het vierde kwadrant van het exponentiële type is volgt wegens stelling 1

(2.12) $\qquad |k_\delta(z)| \leqslant \max.\{C, D\}$, z in $\overline{G}$.

Rest te bewijzen $D \leqslant C$. Stel $D > C$. Dan kan x_0 niet op Γ liggen, dus $x_0 > 0$. Op de cirkel $|z - x_0| = x_0$ geldt $|k_\delta(z)| \leq D = |k_\delta(x_0)|$. Maar dan moet volgens het maximum-modulus principe $k_\delta(z)$ een constante zijn: $|k_\delta(z)| = D$ voor alle z, ook op Γ, in strijd met $|k_\delta(z)| \leqslant C$ voor z op Γ.

TOEPASSINGEN. We bewijzen eerst de volgende stelling van S. Bernstein [1] :

Stelling 3. Als f(z) een gehele functie is van het exponentiële type 0, en als $|f(z)| \leq C$ op een zekere lijn, dan is f(z) een constante.

Bewijs. Pas stelling 2 toe op de beide halfvlakken, waarin de lijn het vlak verdeelt. Een begrensde gehele functie is een constante.

De volgende ongelijkheid levert een schatting voor gehele functies van het exponentiële type α, begrensd op een lijn (Zie [16] deel II p. 35, 36 (nrs. 201, 202) en [17], vgl. [7].)

Stelling 4. Als f(z) analytisch is in $\mathfrak{I}(z) \geq 0$ en daar van het exponentiële type $\alpha \geq 0$, d.w.z. $f(z) = O(e^{(\alpha+\varepsilon)|z|})$ voor elke $\varepsilon > 0$, z in $I(z) \geq 0$, en als $|f(x)| \leq A (-\infty < x < \infty)$ dan geldt

(2.13)
$$|f(z)| \leq A e^{\alpha y}, \quad (y = \mathfrak{I}(z) \geq 0).$$

Bewijs. $f(z)\, e^{i(\alpha+\varepsilon)z}$ $(\varepsilon > 0)$ is begrensd op de reële as en op de + y-as, dus begrensd in $\mathfrak{I}(z) \geq 0$ (stelling 1), dus (stelling2)

$$|f(z)\, e^{i(\alpha+\varepsilon)z}| \leq A \qquad (y \geq 0)$$

ofwel
$$|f(z)| \leq A\, e^{(\alpha+\varepsilon)y} \qquad (y \geq 0).$$

Door $\varepsilon \to 0$ volgt hieruit (2.13)

De volgende stelling blijkt ook vaak nuttig.

Stelling 5. Als f(z) analytisch is in $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$ $(0 < \delta \leq \frac{1}{2}\pi)$ en daar van het exponentiële type, en als voor een zekere reële α en voor een $A > 0$

(2.14)
$$|f(r e^{i\delta})| \leq A e^{-\alpha r \sin\delta}, \quad |f(r e^{i(\pi-\delta)})| \leq A e^{-\alpha r \sin\delta} \quad (r \geq 0)$$

dan geldt

(2.15)
$$|f(r e^{i\varphi})| \leq A e^{-\alpha r \sin\varphi} \quad (r \geq 0,\ \delta \leq \varphi \leq \pi - \delta).$$

Bewijs. Pas stelling 1 toe op $f(z) e^{-i\alpha z}$ in $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$.

Tenslotte noemen we de (opzettelijk weinig scherp geformuleerde)

Stelling 6. Als f(z) analytisch is in een sector $(0 \leq)\ \vartheta \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ en daar van het exponentiële type (α), en als f(z) van het type β (≥ 0) is op de +y-as, dan is f(z) op een halflijn in de sector, die een kleine hoek maakt met de +y-as, ook nog "ongeveer" van het type β:

(2.16)
$$|f(z)| \leq C e^{\sec\vartheta.(\alpha+\varepsilon)x + (\beta+\varepsilon)y}, \quad z \text{ in de sector},$$

voor elke $\varepsilon > 0$ en bijpassende C.

Bewijs. De functie
$$e^{\{-\sec\vartheta.(\alpha+\varepsilon) + i(\beta+\varepsilon)\}z} f(z)$$
is begrensd op de randen van de sector. Pas ~~nu~~ stelling 1 toe.

§ 3. Interpolatie in de gehele getallen: enige klassieke formules. Toepassingen: een stelling van G. Pólya en een van S. Bernstein.

De functie $\{\sin \pi(z-n)\}/\{\pi(z-n)\}$ heeft de waarde 1 in z = n en de waarde 0 in alle andere punten z = geheel getal. Wanneer nu f(z) een gehele functie is, waarvoor $f(n) = O(|n|^{-1})$ $(|n| \to \infty)$, dan stelt de in elk eindig gebied uniform convergente reeks van gehele functies

(3.1) $$F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi (z-n)}{\pi (z-n)} = \sin \pi z \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n f(n)}{\pi (z-n)}$$

een gehele functie voor, die in de gehele getallen met f(z) overeenstemt. Als f(z) van het exponentiële type $\alpha < \pi$ is, is F(z) overal gelijk aan f(z). Dit is onder andere een bijzonder geval van een resultaat van J.M. Whittaker (Vgl. [22] p. 68). Wij bewijzen hier

Stelling 7. Als f(z) geheel is, van het exponentiële type $\alpha (\geq 0)$, van het type $\beta < \pi$ op de imaginaire as, en als $f(n) = O(|n|^{-1})(|n| \to \infty)$, dan is

(3.2) $$f(z) = \sin \pi z \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n f(n)}{\pi (z-n)} .$$

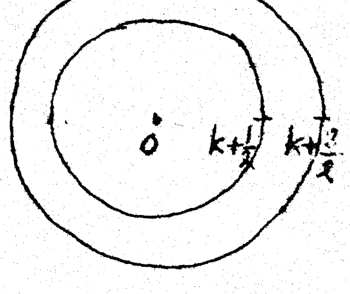
Bewijs. Daar f(n) = F(n) (zie (3.1)) is

(3.3) $$g(z) = \frac{f(z) - F(z)}{\sin \pi z} = \frac{f(z)}{\sin \pi z} - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n f(n)}{\pi (z-n)}$$

geheel. Op de cirkels $|z| = k + \frac{1}{2}$ (k geheel ≥ 0) geldt

(3.4) $$|\sin \pi z|^{-1} \leq 1, \ |f(z)| \leq B e^{(\alpha+\varepsilon)(k+\frac{1}{2})} ,$$

$$\left| \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n f(n)}{\pi (z-n)} \right| < C \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|n|+1)(|z-n|+1)} < D ,$$

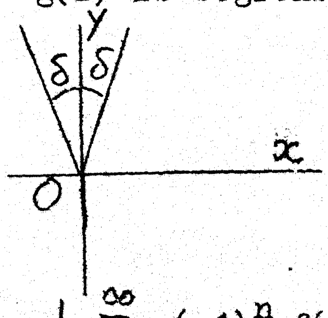


dus

(3.5) $$|g(z)| \leq E \, e^{(\alpha+\varepsilon)(k+\frac{1}{2})} \quad (E \text{ onafh. van } k).$$

Passen we de maximum-modulus stelling toe op g(z) tussen de cirkels met stralen $k + \frac{1}{2}$ en $k + \frac{3}{2}$ (k = 0,1,...) dan vinden we uit (3.5) dat g(z) van het exponentiële type is (en wel van het type α).

g(z) is begrensd (nadert zelfs tot nul) op de halflijnen



$\arg z = \frac{\pi}{2} \pm \delta$, $\arg z = -\frac{\pi}{2}$, als $\delta > 0$ voldoende klein is. Immers, f(z) is daar "ongeveer" van het type $\beta < \pi$ (zie stelling 6), en $(\sin \pi x)^{-1}$ is daar nog "bijna" van het type $-\pi$; tenslotte is daar (voor $|z| > 1$)

(3.6) $$\left| \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n f(n)}{\pi (z-n)} \right| \leq \sum_{|n|<|z|} \frac{C}{(|n|+1)|z| \cos \delta} + \sum_{|n| \geq |z|} \frac{C}{(|n|+1)|n| \cos \delta}$$

$$= O\left(\frac{\log |z|}{|z|} \right),$$

Uit stelling 1 volgt dus, dat g(z) begrensd is in de drie door de halflijnen gevormde sectoren, g(z) is dus een constante, die alleen maar 0 kan zijn.

Verwant met stelling 7 is stelling 8. De daar genoemde interpolatieformule wordt wel naar L. Tschakaloff genoemd (zie [20]). Vgl. echter G. Valiron's "reeksen van Lagrange " [21] .

Stelling 8. Als f(z) geheel is, van het exponentiële type, van het type $\beta < \pi$ op de imaginaire as, en als $f(n) = O(1)$ (n geheel), dan is

$$(3.7) \qquad f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \left\{ \frac{f(0)}{z} + f'(0) + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' (-1)^n f(n) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{z-n} \right) \right\}.$$

Bewijs. Pas stelling 7 toe op $\varphi(z) = \{f(z) - f(0)\}/z$. We vinden

$$(3.8) \qquad f(z) - f(0) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \left[f'(0) + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' (-1)^n \{f(n)-f(0)\} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{z-n} \right) \right]$$

Hieruit volgt het gestelde daar

$$(3.9) \qquad 1 = \frac{\sin \pi z}{\pi} \left[\frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{z-n} \right) \right]$$

We merken nog op, dat ook (3.9) uit stelling 7 afgeleid kan worden. Neem maar voor f(z): $z^{-1}\lambda - z^{-2} \sin \lambda z \, (0 < \lambda < \pi)$. We vinden

$$\frac{\lambda}{\pi} - \frac{\sin \lambda z}{\pi z} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\lambda}{\pi} - \frac{\sin \lambda n}{\pi n} \right) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{z-n} \right).$$

Laat $\lambda \to \pi$. De reeks convergeert bij vaste z uniform in λ , dus

$$1 - \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty}{}' (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{z-n} \right).$$

Toepassingen. We noemen eerst de volgende stelling van Pólya. ([14], vgl. [18], [20], [11] p. 81-83, [9] p. 127-129, [6]) die een uitbreiding is van stelling 3.

Stelling 9. Als f(z) een gehele functie is van het exponentiële type 0, en als $|f(n)| \leq C$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, dan is f(z) een constante.

Bewijs. Pas stelling 7 toe op $\varphi(z) = \{f(z) - f(0)\}/z$. We vinden voor x reëel

$$(3.10) \qquad |\varphi(x)| = \left| \sin \pi x \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi(n)}{\pi(x-n)} \right| \leq C \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|n|+1)(|x-n|+1)} \leq D.$$

Stelling 3 levert nu $\varphi(z)$ = constante. Daar $\varphi(n) \to 0 \, (n \to \infty)$ moet deze constante nul zijn, dus $f(z) = f(0)$.

De volgende stelling is in hoofdzaak afkomstig van S. Bernstein [1] (Vgl. [16] deel II p. 35 (nr. 201).) Ook deze stelling omvat stelling 3.

Stelling 10. Als f(z) een gehele functie is van het type $\alpha \geq 0$. die voldoet aan $|f(x)| \leq C$ (x reëel), dan geldt $|f'(x)| \leq \alpha C$.

Bewijs. Laat $\lambda = \pi/(\alpha+\delta)$, $\delta>0$. Dan is $h(z) = f(\lambda z)$ een gehele functie van het type $\lambda\alpha<\pi$, en $|h(x)|\leq C$. We bewijzen dat $|h'(x)|\leq \pi C$. Volgens stelling 8 geldt, na differentiatie,

$$h'(z) = \cos \pi z\{\ldots\} - \frac{\sin \pi z}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n h(n)}{(z-n)^2}$$

of

(3.11) $$h'(z)\sin\pi z - \pi h(z)\cos\pi z = -\sin^2\pi z\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n h(n)}{\pi(z-n)^2}.$$

In het bijzonder geldt

(3.12) $$\left|h'\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \leq C\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(n-\frac{1}{2})^2} = \pi C.$$

Daar $h(z+a)$, a reëel, aan dezelfde voorwaarden voldoet als $h(z)$, moet dus $|h'(x)|\leq\pi C$. Anders geschreven

(3.13) $$|\lambda f'(\lambda x)| \leq \pi C\ ,\ |f'(x)|\leq(\alpha+\delta)C.$$

Daar $\delta>0$ willekeurig was, volgt hieruit $|f'(x)|\leq\alpha C$.

Voorbeeld. Neem $f(z) = C\,e^{i\alpha z}$.

§ 4. Een interpolatieformule van R.P. Boas Jr en een verwante. Toepassingen: een stelling van Miss M.L. Cartwright, een stelling van V. Bernstein en nog een van Miss Cartwright.

Boas [3] heeft een andere nuttige interpolatieformule gegeven voor het geval $f(z)$ aan de voorwaarden van stelling 8 voldoet. Wij zullen van Boas'stelling een heel kort bewijs geven.

Stelling 11. Als $f(z)$ geheel is, van het exponentiële type, van het type $\beta<\pi$ op de imaginaire as, en als $f(n) = O(1)$ (n geheel) dan is

(4.1) $$f(z) = \sin\pi z\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n f(n)\sin\delta(z-n)}{\pi\delta(z-n)^2}$$

voor elke $\delta>0$ zó, dat $\beta+\delta<\pi$.

Bewijs. Een bewijs als bij stelling 7 gaat niet, omdat $\sin\delta(z-n)$ de zaak in de buurt van de imaginaire as bederft. Laat $0<\varepsilon<\pi-\beta-\delta$. De gehele functies

(4.2) $$g_1(z) = f(z)\cdot\frac{\sin\varepsilon z}{\varepsilon z}\cdot\sin\lambda z\ ,\ g_2(z)=f(z)\frac{\sin\varepsilon z}{\varepsilon z}\cos\lambda z$$

voldoen voor $0\leq\lambda\leq\delta$ aan de voorwaarden van stelling 7. We vinden dus

(4.3) $$f(z)\frac{\sin\varepsilon z}{\varepsilon z} = g_1(z)\sin\lambda z + g_2(z)\cos\lambda z$$
$$= \sin\pi z\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n f(n)\sin\varepsilon n\cos\lambda(z-n)}{\pi(z-n)\varepsilon n}.$$

Integratie over λ van 0 tot δ geeft (de reeks convergeert uniform in λ)

$$(4.4)\qquad \delta f(z)\frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon z} = \sin \pi z \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n f(n)\ \sin \varepsilon n\ \sin \delta\ (z-n)}{\pi (z-n)^2\ \varepsilon n}$$

Deze reeks convergeert uniform in ε. Laat $\varepsilon \to 0$: we vinden (4.1)

<u>Toepassing</u>. We bewijzen de volgende stelling van <u>Miss Cartwright</u> ([4] , vgl. [12] , [10] , [3]) zoals <u>Boas</u> het deed.

<u>Stelling 12</u>. Als f(z) voldoet aan de voorwaarden van stelling 11, dan is f(x) begrensd (x reëel).

<u>Bewijs</u>. Als $|f(n)| \leq C$ geeft (4.1)

$$(4.5)\qquad |f(x)| \leq \frac{C}{\pi\delta}\left\{\sum_{-\infty}^{[x]-1} + \sum_{[x]+2}^{\infty}\right\}\frac{1}{(x-n)^2} + 2C \leqslant \left(\frac{\pi}{3\delta}+2\right)C.$$

<u>Opmerkingen</u>. 1) $\beta < \pi$ is essentieel: z sin πz is van het type π op de imaginaire as, f(n) = 0 (n geheel). Maar f(x) is niet begrensd.
2) Stelling 9 volgt uit stelling 12 en stelling 3.
3) De f(z) van stelling 11 is van het type β . Ja, zelfs geldt (zie stelling 4) $|f(z)| \leqslant K e^{\beta|y|}$ (y = I(z)).
4) Het bewijs van <u>A. Pfluger</u> [12] is ook heel eenvoudig; het berust op stelling 8. <u>Pfluger</u> merkt nog op, dat f(x) bijna-periodiek is, als f(n) het is, en dat f(x) $\to \ell$ als f(n) $\to \ell$ (x resp. n $\to \infty$).

Wat blijft er van stelling 12 over, als we alleen weten dat f(z) analytisch is in $R(z) \geqslant 0$, aldaar van het exponentiële type, en van het type $\beta < \pi$ op de imaginaire as ? Dan geldt de volgende oudere stelling van <u>V. Bernstein</u> ([2] p. 230).

<u>Stelling 13</u>. Als voor een zekere reële α

$$(4.6)\qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |f(n)| = \alpha$$

dan is

$$(4.7)\qquad \limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} \log |f(x)| = \alpha .$$

(De "groei" van f(z) op de positieve x-as wordt bepaald door zijn groei op de natuurlijke getallen).

Het is minder bekend, dat uit een stelling van <u>Miss Cartwright</u> ([4], vgl. [10]) het volgende scherpere resultaat volgt, waarvoor nog geen "eenvoudig" bewijs bekend scheen te zijn.

<u>Stelling 14</u>. Als voor een zekere reële α

$$(4.8)\qquad f(n) = O(e^{\alpha n}),\ (\ n \text{ geheel} \geqslant 0),$$

dan is

(4.9) $$f(x) = O(e^{\alpha x}), \quad (x \geqslant 0).$$

Bewijs. We mogen wel $\alpha = 0$ nemen (beschouw anders $f(z)\, e^{-\alpha z}$).
Laat nu

(4.10) $$|f(iy)| \leqslant A\, e^{B|y|}, \quad |f(n)| \leqslant C \quad (B < \pi,\ y \text{ reëel},\ n \text{ geheel} \geqslant 0)$$

We beschouwen

(4.11) $$\frac{f(z)}{\sqrt{z+1}} - \sin \pi z \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n f(n)}{\pi \sqrt{n+1}\,(z-n)} = \frac{\sin \pi z}{\sqrt{z+1}}\, g(z).$$

$g(z)$ is analytisch in $R(z) \geqslant 0$ en daar van het exponentiële type (vgl. het bewijs van stelling 7), en wel van het type 0. Immers, $g(z)$ is begrensd op de drie halflijnen $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ voldoende klein. (Vgl. (3.6)). Volgens stelling 2 is dus in $R(z) \geqslant 0$ $|g(z)| \leqslant$ bov.gr. $|g(iy)|$. De laatste hangt alleen af van A,B,C. In het bijzonder hebben we

(4.12) $$|g(x)| \leqslant K\,(A,B,C), \quad (x \geqslant 0).$$

Laat nu $0 < \delta < \pi - B$, en laat $0 \leqslant \lambda \leqslant \delta$. Beschouw (4.11) met $f(z) \cos \lambda z$ resp. $f(z) \sin \lambda z$ in plaats van $f(z)$; de bijbehorende functies $g(z)$ mogen zijn $g_1(\lambda, z)$, $g_2(\lambda, z)$. We hebben wegens (4.12)

(4.13) $$|g_i(\lambda, x)| \leqslant K\,(A, B+\delta, C), \quad (i = 1,2;\ x \geqslant 0).$$

We stellen

$$G(\lambda, z) = g_1(\lambda, z) \cos \lambda z + g_2(\lambda, z) \sin \lambda z =$$

(4.14) $$= \frac{f(z)}{\sin \pi z} - \sqrt{z+1} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n f(n) \cos \lambda (z-n)}{\pi \sqrt{n+1}\,(z-n)}.$$

Dan is

(4.15) $$\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} G(\lambda, z)\, d\lambda = \frac{f(z)}{\sin \pi z} - \sqrt{z+1} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n f(n) \sin \delta (z-n)}{\pi \delta \sqrt{n+1}\,(z-n)^2}.$$

Voor $z = x \geqslant 0$ hebben we wegens (4.14) en (4.13)

(4.16) $$\left| \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} G(\lambda, x)\, d\lambda \right| \leqslant 2K\,(A, B+\delta, C).$$

Uit (4.15) en (4.16) volgt na een korte berekening dat $f(x)$ begrensd is ($x \geqslant 0$).

Opmerkingen. 1) Uit stelling 14 met $\alpha = 0$ volgt stelling 12.
2) De som in (4.11) maal $\sin \pi z$ blijkt op de pos. x-as $O(x^{-\frac{1}{2}})$.
Hieruit volgt iets over de verdeling der $f(n)$'s.

§ 5. Interpolatie in de punten n en im (n, m geheel). Toepassing: een stelling van V. Ganapathy Iyer en N. Levinson. Een vergaande generalisatie, en een generalisatie van een stelling van Miss Cartwright.

Stelling 15. Als f(z) geheel is, van het exponentiële type, van het type $\beta < \pi\sqrt{2}$ op de halflijnen arg z = $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ of op de halflijnen arg z = $\frac{3\pi}{4}$ en $\frac{7\pi}{4}$, en als

(5.1) $$\sum_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{n f(n)}{\sinh \pi n} \right| \quad \text{en} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{m f(im)}{\sinh \pi m} \right|$$

convergeren, dan geldt

(5.2) $$f(z) = \frac{\sin \pi z \sinh \pi z}{z} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n n f(n)}{\sinh \pi n} \frac{1}{\pi(z-n)} + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^m m f(im)}{\sinh \pi m} \cdot \frac{1}{\pi(z-i\ldots} \right.$$

Bewijs. Het rechterlid F(z) van (5.2) is gelijk aan f(z) in de punten n, im (n,m geheel). De functie

(5.3) $$g(z) = \{ f(z) - F(z) \} z / (\sin \pi z \cdot \sinh \pi z)$$

is dus geheel. Door de cirkels $|z| = k + \frac{1}{2}$ (k geheel ≥ 0) te beschouwen vindt men als in stelling 7 dat g(z) van het exponentiële type is. Laat f(z) van het type $\beta < \pi\sqrt{2}$ zijn op arg z = $3\pi/4$, $7\pi/4$. Voor voldoend kleine $\delta > 0$ zal $g(z)$ tot 0 naderen op arg z = $3\pi/4 \pm \delta$, arg z = $7\pi/4$. (Vgl. het bewijs van stelling 7). Hieruit en uit stelling 1 volgt $g(z) \equiv 0$.

Toepassing. We bewijzen eerst de volgende stelling van Ganapathy Iyer en Levinson (Zie [5], [8] en [9] p. 122)

Stelling 16. Als f(z) geheel is, van het exponentiële type, van het type $\beta < \pi\sqrt{2}$ op arg z = $3\pi/4$ en $7\pi/4$, en als

(5.4) $$|f(n)| \leq C \quad , \quad |f(im)| \leq C \qquad \text{(n, m geheel)},$$

dan is f(z) een constante.

Bewijs. We passen (5.2) toe op f(z) sin δz, $0 < \delta < \pi\sqrt{2} - \beta$. We vinden dan, dat f(z) van het type $\pi - \delta$ is op de imaginaire as. Uit $|f(n)| \leq C$ en stelling 12 volgt nu dat f(x) begrensd is. Hieruit en uit $|f(im)| \leq C$ volgt wegens stelling 12 dat f(iy) begrensd is. f(z) moet dus een constante zijn. (Stelling 1).

Opmerkingen. 1) Voor f(z) = sin πz sinh πz is $\beta = \pi\sqrt{2}$ op arg z = $3\pi/4$, $7\pi/4$. (5.4) geldt, maar f(z) is geen constante!
2) Als f(n) = 0, f(im) = 0 moet natuurlijk $f(z) \equiv 0$.

Men kan stelling 16 gemakkelijk generaliseren voor twee puntenrijen, waarvan de dragers een hoek ω met elkaar maken.

Stelling 17. Laat $0 < \omega \leq \pi/2$, $\lambda = e^{i\omega}$. Laat f(z) een gehele functie zijn van het exponentiële type, van het type $\beta < 2\pi \cos \frac{1}{2}\omega$ op de halflijnen arg z = $\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}$, arg z = $-\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\omega$. Als

(5.5) $$|f(n)| \leq C \quad , \quad |f(\lambda m)| \leq C \qquad \text{(n, m geheel)},$$

dan is f(z) een constante.

Ook deze stelling is "scherp": kijk maar naar sin $\pi z \sin \mu z$ ($\mu = e^{-i\omega}$). We leiden stelling 17 af uit een overeenkomstige (diepere) stelling voor een halfvlak.

Stelling 18. Laat $0 < \omega \leq \frac{\pi}{2}$. Laat f(z) analytisch zijn in het halfvlak $\mathcal{I}(z) \geq 0$ en daar van het exponentiële type, van het type $\beta < 2\pi \cos \frac{1}{2}\omega$ op de reële as. Laat

(5.6) $$\lambda_1 = e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2})}, \quad \lambda_2 = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2})}$$

Als

(5.7) $$|f(\lambda_1 n)| \leq C, \quad |f(\lambda_2 n)| \leq C \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

dan is er bij elke $\varepsilon > 0$ een constante D zó, dat

(5.8) $$|f(z)| \leq D, \quad \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} + \varepsilon \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} - \varepsilon\right)$$

Bewijs Met f(z) is ook

(5.9) $$\frac{\varkappa f(z)}{(z+i)^{3/2} \sin \pi\lambda_2 z \sin \pi\lambda_1 z} - \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \lambda_1 n f(\lambda_1 n) e^{\pi i(\lambda_1 - \lambda_2)(z - \lambda_1 n)}}{(\lambda_1 n + i)^{3/2} \pi\lambda_2 (z - \lambda_1 n) \sin \pi\lambda_1^2 n}$$
$$- \sum_1^\infty \frac{(-1)^n \lambda_2 n f(\lambda_2 n) e^{\pi i(\lambda_1 - \lambda_2)(z - \lambda_2 n)}}{(\lambda_2 n + i)^{3/2} \pi\lambda_1 (z - \lambda_2 n) \sin \pi\lambda_2^2 n} = g(z)$$

analytisch in I(z) $\geq$ 0 en van het exponentiële type. We zullen bewijzen dat op de halflijnen arg z = δ, arg z = $\pi - \delta$ voor voldoend kleine $\delta > 0$

(5.10) $$g(z) = \mathcal{O}\left(|z|^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi \sin \frac{1}{2}\omega \sin \delta . |z|}\right).$$

Laten we arg z = δ beschouwen. De j-de term van het linkerlid van (5.9) is daar, voor een zekere $\eta(\delta) > 0$, $\mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}} e^{A_j |z|})$, waarin

$A_1 = \beta - 2\pi \cos\frac{1}{2}\omega + \eta(\delta)$ ($\eta \to 0$ als $\delta \to 0$),

$A_2 = A_3 = \mathcal{R}\{\pi i(\lambda_1 - \lambda_2) e^{i\delta}\} = -2\pi \sin\frac{1}{2}\omega \sin\delta$.

Het is duidelijk dat we $\delta > 0$ zo klein kunnen nemen, dat $A_1 \leq A_2$.

Pas nu stelling 5 toe op $(z+i)^{\frac{1}{2}} g(z)$. We vinden dan

(5.11) $$g(z) = \mathcal{O}\left(|z|^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi \sin \frac{1}{2}\omega \sin\varphi . |z|}\right), \quad \delta \leq \varphi = \arg z \leq \pi - \delta,$$

waaruit het gestelde gemakkelijk volgt. Men vindt ook

(5.12) $$f(\lambda_j x) = \mathcal{O}(\log x), \quad (j = 1, 2;\ x > 0)$$

Vermoedelijk geldt (5.8) ook nog voor $\varepsilon = 0$, maar thans ontbreekt mij de tijd om dat na te gaan.

Uit stelling 18 en stelling 1 volgt stelling 17.

Stelling 17 is als volgt tot k puntenrijen te generaliseren.

Stelling 19. Laat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (k $\geq$ 2) complexe getallen zijn met modulus 1 en argumenten, die mod π verschillend zijn. Laat $\mu_j = \frac{1}{\lambda_j}$. Laat sin $\pi\mu_1 z$.... sin $\pi\mu_k z$ op de lijn p zijn van het type t. Laat f(z) geheel zijn, van het exponentiële type, van het type $\beta < t$ op p.

Laat verder

(5.13) $|f(\lambda_j n)| \leq C$, (j = 1, 2,...k; n geheel).

Dan is f(z) een constante.

De stelling is "scherp": sin $\pi\mu_1 z$ ... sin $\pi\mu_k z$ heeft op p het type t, (5.13) geldt voor deze functie, maar het is geen constante.

Bewijs. We mogen wel aannemen dat $f(\lambda_j n) = O(|n|^{-\frac{1}{2}})$ (Beschouw anders $\{f(z)-f(0)\}/z$). Ook wel, dat p (door O laten) geen van de getallen λ_j bevat. (Anders (Schuiven een) draaien we iets; op een lijn nabij p heeft f(z) nog een type < dat van sin $\pi\mu_1 z$ ... sin $\pi\mu_k z$). Definieer nu

$$
(5.14)\quad \left\{ \begin{array}{l}
f(z) = f_1(z) \\
\dfrac{f_1(z)}{\sin \pi\mu_1 z} - \sum_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(-1)^n f_1(\lambda_1 n)}{\pi\mu_1 (z-\lambda_1 n)} = f_2(z) \\
-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\
\dfrac{f_{k-1}(z)}{\sin \pi\mu_{k-1} z} - \sum_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(-1)^n f_{k-1}(\lambda_{k-1} n)}{\pi\mu_{k-1} (z-\lambda_{k-1} n)} = f_k(z) \\
\dfrac{f_k(z)}{\sin \pi\mu_k z} - \sum_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(-1)^n f_k(\lambda_k n)}{\pi\mu_k (z-\lambda_k n)} = f_{k+1}(z)
\end{array} \right.
$$

$f_j(z)$ (j = 1, 2,...k) is geheel, van het exponentiële type, van het type < dat van sin $\pi\mu_j z$... sin $\pi\mu_k z$ op p, terwijl $f_j(\lambda_l n) = O(|n|^{-\frac{1}{2}})$ ($l \geq j$).

Op p en op lijnen die een kleine hoek met p maken nadert $f_{k+1}(z)$ tot 0, dus (stelling 1) $f_{k+1}(z) = 0$. f_k (z) is dus begrensd op de lijn door 0 en λ_k . Op p is het type van $f_k(z)$ < dat van sin $\pi\mu_k z$. Hieruit volgt dat het type van f_k (z) op elke lijn kleiner is dan dat van sin $\vartheta\pi\mu_k z$, voor een zekere ϑ, $0 < \vartheta < 1$. (vgl. het bewijs van stelling 4). Gevolg: $f_{k-1}(z)$ is op elke lijn van het type < dat van sin $\pi\mu_{k-1} z$ sin $\vartheta\pi\mu_k z$. In het bizonder op de lijn, waar sin $\pi\mu_{k-1} z$ sin $\pi\mu_k z$ zijn maximum-type bereikt. $f_{k-1}(\lambda_{k-1} n)$ en $f_{k-1}(\lambda_k n)$ zijn $O(|n|^{-\frac{1}{2}})$. Uit stelling 17 volgt dus dat $f_{k-1}(z) = 0$. Verder is nu $f_{k-2}(z)$ van het type van sin $\pi\mu_{k-2} z$, wat te weinig is ($f_{k-2}(z)$ is begrensd op drie rijen) om aan 0 zijn te ontsnappen enz.

We beschouwden tot nu toe puntenrijen van gelijke dichtheid. Men mag ook nulpunten van sin $\pi\mu z$ toelaten met $|\mu| \neq 1$

Stelling 20. Laat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ($k \geq 2$) complexe getallen zijn van verschillend argument (mod π). Laat $\mu_j = 1/\lambda_j$. Laat sin $\pi\mu_1 z$ ... sin $\pi\mu_k z$ op de lijn p zijn van het type t. Laat f(z) geheel zijn, van het exponentiële type, van het type $\beta < t$ op p. Laat verder

(5.15) $|f(\lambda_j n)| \leq C$ (j = 1, 2,...k; n geheel).

Dan is f(z) een constante.

Ook deze stelling is "scherp". Het bewijs gaat net als dat van stelling 19, alleen moet het geval k = 2 - het analogon van stelling 17 - afzonderlijk bewezen worden.

In plaats van deze "mooie" puntenrijen mogen ook "V. Bernstein"-rijen $\pm z_n$ wordengebruikt:

(5.16) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda n}{z_n} = 1, \quad |z_n - z_m| > |n-m|\, d \qquad (d > 0 \text{ vast}),$$
$$|f(\pm z_n)| \leq C.$$

In de plaats van sin $\pi\mu z$ komt een gehele functie, waarvan de eigenschappen voldoende bekend zijn om de met stelling 20 corresponderende stelling te bewijzen.

Het is wel aardig het grensgeval van stelling 19 te bekijken als all lijnen waarop we puntenrijen hadden tot de reële as naderen. We krijgen dan de volgende generalisatie van de eerste in § 4 bekeken stelling van Miss Cartwright (de tweede kan ook zo gegeneraliseerd worden):

Stelling 21. Als f(z) geheel is, van het exponentiële type, van het type $< k\pi$ op de imaginaire as, en als

(5.17) $$|f(n)| \leq C, \quad |f'(n)| \leq C, \ldots, |f^{(k-1)}(n)| \leq C, \quad (n \text{ geheel}),$$

dan is f(x) begrensd (x reëel).

Het bewijs gaat als dat van § 4 (zonder veel nieuwe trucjes). In de plaats van sin πz treedt $\sin^k \pi z$ maal z. Uit dit voorbeeld blijkt tevens dat de stelling "scherp" is. Het is misschien aardig op te merken, dat de algemeenste puntenrij op de reële as, tot nu toe in de stelling van Miss Cartwright gebruikt, is van de vorm
$$|x_n - n| < A, \quad |x_m - x_n| > d.$$
(Uit $|f(x_n)| \leq C$, type $f(z) < \pi$
volgt dan f(x) begrensd).

§ 6. Interpolatie in de gehele getallen van Gauss. Toepassing: een stelling van Pólya en Pfluger.

Voor interpolatie in de punten m + in (m, n geheel) hebben we een gehele functie nodig met enkelvoudige nulpunten in die punten. Zo'n functie is de σ-functie van Weierstrass met de perioden 1, i.

J.M. Whittaker (zie [22] p. 72) bewees

Stelling 22. Als f(z) geheel is,

(6.1) $$|f(z)| \leq A e^{B|z|^2}$$

met $B < \frac{1}{2}\pi$, dan is

(6.2) $$f(z) = \sigma(z) \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+mn} f(m+in)\, e^{-\frac{\pi}{2}(m^2+n^2)}}{z-m-in}.$$

Bewijs. $\sigma'(m+in) = (-1)^{m+n+mn} e^{\frac{\pi}{2}(m^2+n^2)}$; laat V_k zijn het vierkant met hoekpunten $(\pm 1 \pm i)(k+\frac{1}{2})$, (k geheel). Als $z \in V_k$, (6.3) $$\frac{f(z)}{\sigma(z)} + \sum_{V_k} \frac{f(m+in)}{\sigma'(m+in)(m+in-z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{V_k} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\sigma(\zeta)(\zeta-z)}.$$

Daar op V_k $|\sigma(\zeta)|$ van de orde $e^{\frac{\pi}{2}|\zeta|^2}$ is, volgt hieruit voor $k\to\infty$ (6.2)

Stelling 23. Als f(z) voldoet aan de voorwaarden van stelling 22, en als

(6.4) $$|f(m+in)| \leqslant C$$

dan is f(z) een constante.

Pólya [15] bewees dit voor het geval dat (6.1) geldt voor elke B > 0 (en een bijbehorende A), Pfluger [12] bewees stelling 23. Pfluger's bewijs is als volgt.

Bewijs van stelling 23. Pas (6.2) toe op $f(z+M+iN)$, M, N geheel, in plaats van f(z). Laat z een punt zijn van het vierkant $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm i)$. Daarop is $|z-m-in| \geqslant \frac{1}{2}$, $|\sigma(z)| \leqslant D$, dus

(6.5) $$|f(z+M+iN)| \leqslant 2CD\sum e^{-\frac{1}{2}\pi(m^2+n^2)} = E,$$

E onafhankelijk van M en N. Ook binnen dit vierkant $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm i)$ geldt (6.5), dus overal.

Opmerking. Stelling 23 is "zo goed mogelijk" in de zin dat de stelling niet juist is met $B = \frac{1}{2}\pi + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Maar als $B = \frac{\pi}{2}$?

Er bestaan ook resultaten voor sectoren analoog aan stelling 23. We gaan daar thans niet op in.

LITERATUUR.

1. S. Bernstein, Sur une propriété des fonctions entières, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Parijs, 176 (1923) 1603-1605.
2. V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Parijs, 1933.
3. R.P. Boas Jr, Entire functions bounded on a line, Duke Math. Journal 6 (1940) 148-169; Correction to "Entire functions bounded on a line", Duke Math. Journal 13 (1946) 483-484.
4. M.L. Cartwright, On certain integral functions of order one, Quarterly Journal of Math., Oxford, 7 (1936) 46-55.
5. V. Ganapathy Iyer, On the order and type of integral functions bounded at a sequence of points, Annals of Math. 38 (1937) 311-320.
6. J. Korevaar, A simple proof of a theorem of Pólya, Simon Stevin 26 (1948-49) 72-80.
7. J. Korevaar, An inequality for entire functions of exponential type, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 23 (1948) 1e stuk.
8. N. Levinson, Integral functions bounded on sequences of points, Duke Math. Journal 4 (1938) 170-...
9. N. Levinson, Gap and density theorems, American Math.Soc. Coll. Publ. nr 26, New York 1940.
10. A.J. Macintyre, Laplace's transformation and integral functions, Proc. London Math. Soc. (2) 45 (1938-39) 1-20.
11. R.E.A.C. Paley en N. Wiener, Fourier transforms in the complex domain, American Math.Soc.Coll. Publ. nr 19, New York 1934.
12. A. Pfluger, On analytic functions bounded at the lattice points, Proc. London Math. Soc. (2) 42 (1936-37) 305-315.
13. E. Phragmén en E. Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse, Acta Mathematica 31 (1908) 381-406.
14. G. Pólya, Aufgabe 105, Jahresber. der deutschen Math. ver. 40 (1931), 2te Abteilung, 80.
15. G. Pólya, Bemerkung zu der Lösung der Aufgabe 105, Jahresber. der deutschen Math. ver. 43 (1934), 2te Abteilung, 67-69.
16. G. Pólya en G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlijn, 1925.
17. A.C. Schaeffer, On the oscillation of differential transforms. III. Oscillations of the derivative of a function, Trans.Am. Math.Soc. 54 (1943) 278-285, bewijs van stelling 4.
18. G. Szegö, Lösung der Aufgabe 105, Jahresber. der deutschen Math.ver. 43 (1934), 2te Abteilung, 10-11.
19. E.C. Titchmarsh, The theory of functions, Londen 1947.
20. L. Tschakaloff, Zweite Lösung der Aufgabe 105, Jahresber. der deutschen Math.ver. 43 (1934), 2te Abteilung, 11-13.
21. G. Valiron, Sur la formule d'interpolation de Lagrange, Bulletin des Sciences Math.(2) 49 (1925) 181-192, 203-224.
22. J.M. Whittaker, Interpolatory function theory, Cambridge, 1935.