

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1952 - 018

Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit

Prof.Dr. J. Korevaar

5 november

De algemene Tauberstellingen van Wiener
vanuit een vereenvoudigend hoger standpunt bezien.



1952

Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

5 November: voordracht door

Prof. Dr J.Korevaar

over:

De algemene Tauberstellingen van Wiener vanuit een vereenvoudigend hoger standpunt bezien.

Inhoud.

1. Wat is een Tauberstelling?
2. Grepen uit de geschiedenis.
3. Onze centrale stelling.
4. Zeer eenvoudig bewijs van Littlewood's stelling via de centrale stelling.
5. Wiener's stellingen via de centrale stelling en de theorie van Beurling.

1. Wat is een Tauberstelling? Laat gegeven zijn twee sommatiethoden P en Q zodanig, dat uit de P-s (ommeerbaarheid) van een reeks steeds zijn Q-s volgt, en wel tot dezelfde som. Laat bovendien de methode Q tenminste één reeks sommeren die methode P niet sommeert. Voorbeeld: P-s zij gewone convergentie, Q-s zij Cesàro- of Abelsommeerbaarheid.

Uit " $\sum a_n$ is Q-s" zal niet voor alle reeksen $\sum a_n$ volgen " $\sum a_n$ is P-s". De conclusie geldt misschien wel voor die reeksen $\sum a_n$ waarvan de termen a_n voldoen aan een zekere voorwaarde, die bv. hun grootte-orde beperkt. Zo'n voorwaarde $T\{a_n\}$ heet een Taubervoorwaarde en een Tauberstelling voor reeksen heeft de gedaante:

Uit " $\sum a_n$ is Q-s" en " $T\{a_n\}$ " volgt " $\sum a_n$ is P-s".

De kunst is natuurlijk om de voorwaarde T zo licht mogelijk te maken.

A.Tauber bewees in 1897 (zie [4], p. 149) dat uit

" $\sum a_n x^n$ convergeert voor $|x| < 1$ terwijl $\sum a_n x^n \rightarrow s$ als $x \uparrow 1$ " en " $na_n \rightarrow 0$ " volgt " $s_n \rightarrow s$ ".

Bewijs. Laat $|na_n| < K_N$ voor alle $n > N$. Kies N en x zo dat $(1-x)^N = 1$.

Dan geldt

$$\begin{aligned}
 |s_N - \sum_0^{\infty} a_n x^n| &= \left| \sum_0^N a_n (1-x^n) + \sum_{N+1}^{\infty} a_n x^n \right| \leq \\
 &\leq \sum_0^N |na_n| (1-x) + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{K_N}{n} x^n \leq \\
 &\leq N(1-x) \frac{\sum_1^N |na_n|}{N} + \frac{K_N}{N(1-x)} = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_1^N |na_n| + K_N.
 \end{aligned}$$

Als $K_N \rightarrow 0$, dus $na_n \rightarrow 0$, dan zal $s_N \rightarrow \lim \sum a_n x^n = s$.

Ook al geldt niet $na_n \rightarrow 0$, steeds is $K_N \leq K_0$ dus

$$|s_N| \leq 2K_0 + \sup_{0 < x < 1} \left| \sum a_n x^n \right| = M.$$

2. Grepen uit de geschiedenis. De eigenlijke geschiedenis der Tauberstellingen begint als Littlewood in 1910 bewijst dat

Uit " $\sum a_n x^n$ convergeert voor $|x| < 1$ terwijl $\sum a_n x^n \rightarrow s$ als $x \uparrow 1$ " en " $|na_n| < K$ " volgt " $s_n \rightarrow s$ ". (Zie [8]).

Tussen 1910 en 1930 bewijzen Hardy en Littlewood nog vele andere Tauberstellingen, onder andere de volgende voor Lambertreeksen:

Uit " $\sum a_n \frac{nx^n}{1-x^n}$ convergeert voor $|x| < 1$ terwijl $(1-x) \sum a_n \frac{nx^n}{1-x^n} \rightarrow s$ als

$x \uparrow 1$ " en " $|na_n| < K$ " volgt " $s_n \rightarrow s$ ". (Zie [5]).

Deze laatste stelling kan worden gebruikt om de priemgetalstelling te bewijzen, maar Hardy en Littlewood gebruikten in het bewijs van hun Lambert-Tauberstelling een getaltheoretisch resultaat dat de priemgetalstelling omvat.

Littlewood's stelling werd in 1930 op verrassend eenvoudige wijze bewezen door Karamata. (Zie [6]; vgl. [7]). Nog onlangs werd dit bewijs opnieuw vereenvoudigd, en wel door Wielandt in 1952 (zie [10]). Wielandt weet Karamata's omweg over Cesàro-sommeerbaarheid te vermijden.

Wiener zocht en vond in de jaren 1928-1930 een bewijs van de Lambert-Tauberstelling onafhankelijk van getaltheoretische resultaten in zijn zeer algemene Tauberstellingen, die de bovengenoemde stellingen over machtreksen en Lambert-reeksen omvatten. Wiener's bewijzen (zie [11], [12]) zijn vooral vereenvoudigd door Pitt (zie [9] p. 202-222); Wiener's resultaten zijn onder andere gegeneraliseerd door Beurling [1] en Godement [3]. Voor we een van Wiener's stellingen formuleren enige definities.

$\varphi(t) \in B$ betekent: $\varphi(t)$ begrensd op $-\infty < t < \infty$, d.w.z. er is een constante M zó dat $|\varphi(t)| < M$ voor alle t .

$\varphi(t) \in C$ betekent: $\varphi(t)$ gelijkmatig continu op $-\infty < t < \infty$, d.w.z. bij elke $\varepsilon > 0$ behoort een $\delta > 0$ zó dat $|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| < \varepsilon$ voor alle τ waarvoor $|\tau| < \delta$ en voor alle t .

$\varphi(t) \in S$ betekent: $\varphi(t)$ is langzaam schommelerd op $-\infty < t < \infty$, d.w.z. bij elke $\varepsilon > 0$ behoren een $\delta > 0$ en een A zó dat $|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| < \varepsilon$ voor alle τ met $|\tau| < \delta$ en voor alle $t > A$.

Blijkbaar geldt $S \supset C$.

$\varphi(t) \in L$ betekent: $\varphi(t)$ is integreerbaar over elk eindig vak, en $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt$ bestaat.

Een van Wiener's algemene stellingen in een vorm gegeven door Pitt is:

Uit " $K(t) \in L$, $g(t) \in SB$ en $\int_{-\infty}^{\infty} K(t) g(\tau-t) dt \rightarrow 0$ als $\tau \rightarrow \infty$ " en

" $\int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{i\lambda t} dt \neq 0$ voor $-\infty < \lambda < \infty$ " volgt " $g(\tau) \rightarrow 0$ als $\tau \rightarrow \infty$ ".

3. Onze centrale stelling. We beschouwen in het volgende functionaal-transformaties $L(\varphi) = L\{\varphi(t); u\}$ die aan elke functie $\varphi(t) \in B$ toevoegen een functie van u . $L(\varphi)$ moet de volgende eigenschap hebben: als $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ gelijkmatig op elk eindig interval, terwijl de getallen $M_n = \sup |\varphi_n(t)|$ een begrensde rij vormen, dan geldt $L(\varphi_n) \rightarrow L(\varphi)$ voor elke vaste u .

Voorbeeld: Laat $K(t) \in L$, en definieer $L(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \varphi(u-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} K(u-t) \varphi(t) dt$.

S T E L L I N G. Uit

" $g(t) \in SB$ en $L\{g(t+\tau); u\} \rightarrow 0$ als $\tau \rightarrow \infty$ voor elke vaste u " en

" $L\{\varphi(t); u\} \equiv 0$ heeft geen oplossing $\varphi(t) \not\equiv 0$ in CB "

volgt

" $g(\tau) \rightarrow 0$ als $\tau \rightarrow \infty$ ".

Dit resultaat komt in minder scherpe vorm voor bij Beurling [1] en dient bij ons om de afleidingen in § 4 en § 5 mogelijk te maken.

Bewijs. Onderstel dat niet $g(\tau) \rightarrow 0$. Dan bestaat er een $c > 0$ en een rij $\tau_n \rightarrow \infty$ zo dat $|g(\tau_n)| > c$ voor $n = 1, 2, \dots$. Stel $g(t + \tau_n) = g_n(t)$. Dan is $\sup |g_n(t)| = \sup |g(t)|$ en $|g_n(0)| > c$ voor alle n .

De rij $\{g_n(t)\}$ bevat een deelrij die, gelijkmatig op elk eindig interval, convergeert naar een limietfunctie $\varphi(t) \in CB$. Men kan zo'n deelrij als volgt verkrijgen: kies voor $\{g_{n_k}(t)\}$ een deelrij van $\{g_n(t)\}$ die convergeert voor alle rationale t (pas het diagonaalprocédé toe). Voor irrationale t' convergeert de rij dan ook:

$$(*) \quad |g_{n_k}(t') - g_{n_p}(t')| \leq |g_{n_k}(t') - g_{n_k}(t)| + |g_{n_k}(t) - g_{n_p}(t)| + |g_{n_p}(t) - g_{n_p}(t')|$$

We hebben

$$|g_{n_k}(t') - g_{n_k}(t)| = |g(t' + \tau_{n_k}) - g(t + \tau_{n_k})| < \varepsilon$$

mits $|t' - t| < \delta$ en $\tau_{n_k} > A$. Kies nu t rationaal, $|t' - t| < \delta$. Voor alle voldoende grote n_k en n_p zal

$$|g_{n_k}(t') - g_{n_p}(t')| < 3\varepsilon$$

Dezelfde redenering toegepast op willekeurige t' en op punten t op afstanden $< 2\delta$ over de gehele lengte van een eindig interval bewijst dat $\{g_{n_k}(t')\}$ gelijkmatig convergeert op elk eindig interval.

Voor de limietfunctie $\varphi(t)$ geldt met willekeurige t, t'

$$|\varphi(t') - \varphi(t)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |g_{n_k}(t') - g_{n_k}(t)| \leq \varepsilon$$

mits $|t' - t| < \delta$, dus $\varphi(t) \in C$. Ten slotte geldt

$$\sup |\varphi(t)| \leq \sup |g(t)| ; |\varphi(0)| \geq c,$$

dus $\varphi(t) \in B$ en $\varphi(t) \neq 0$.

Uit de definitie van L volgt nu dat $L\{g_{n_k}(t)\} \rightarrow L\{\varphi(t)\}$ voor elke u .

Maar ook geldt $L\{g_{n_k}(t)\} = L\{g(t + \tau_{n_k})\} \rightarrow 0$ voor elke u . Dus $L\{\varphi(t)\} = 0$, hoewel $\varphi(t) \neq 0$. Dit is een tegenspraak.

4. Zeer eenvoudig bewijs van Littlewood's stelling via de centrale stelling. We voeren gemakshalve eerst een nieuwe veranderlijke in de centrale stelling in. We zeggen dat $\bar{\Phi}(v) \in B'$, resp. C' of S' , op $0 < v < \infty$, als $\bar{\Phi}(e^t) \in B$, resp. C of S . Zo betekent $\bar{\Phi}(v) \in S'$ dat bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ en een A behoren zo dat

$$|\bar{\Phi}(\rho v) - \bar{\Phi}(v)| < \varepsilon$$

voor alle ρ met $|\rho - 1| < \delta$ en alle $v > A$. $L'(\bar{\Phi}) = L'\{\bar{\Phi}(v); u\}$ voegt aan elke $\bar{\Phi}(v) \in B'$ toe een functie van u . L' moet de eigenschap hebben dat $L'(\bar{\Phi}_n) \rightarrow L'(\bar{\Phi})$ voor elke vaste u steeds wanneer $\bar{\Phi}_n(v) \rightarrow \bar{\Phi}(v)$ gelijkmatig op elk interval $v_1 \leq v \leq v_2$ ($v_1 > 0$), terwijl $\sup |\bar{\Phi}_n(v)| < M$. De centrale stelling luidt na deze transformatie (en we hadden deze nieuwe vorm gemakkelijk direct kunnen bewijzen)

S T E L L I N G. Uit

" $G(v) \in S'B'$ en $L'\{G(yv); u\} \rightarrow 0$ als $y \rightarrow \infty$ voor elke vaste u "

en

" $L'\{\bar{\Phi}(v); u\} = 0$ heeft geen oplossing $\bar{\Phi}(v) \neq 0$ in $C'B'$ "

volgt

$$"G(y) \rightarrow 0 \text{ als } y \rightarrow \infty".$$

Het gegeven van Littlewood's stelling luidt: $\sum a_n x^n$ convergeert voor $|x| < 1$, $\sum a_n x^n = f(x) \rightarrow s$ als $x \uparrow 1$, en $|a_n| < K$. We mogen hierin voor s wel 0 lezen: verminder maar a_0 met s . Definieer nu $s(v) = \sum_{n \leq v} a_n$. Dan geldt dat $s(v) \in B'$ (zie § 1), terwijl voor $\rho > 1$,

$$|s(\rho v) - s(v)| \leq \sum_{v \leq n < \rho v} |a_n| \leq K \sum_{v \leq n < \rho v} \frac{1}{n} < K \log \rho + \frac{1}{v},$$

dus $s(v) \in S'$.

Men heeft voor $w > 0$, $s_{-1} = 0$ nemend,

$$\begin{aligned} f(e^{-w}) &= \sum_0^{\infty} a_n e^{-nw} = \sum_0^{\infty} (s_n - s_{n-1}) e^{-nw} = \\ &= \sum_0^{\infty} s_n (e^{-nw} - e^{-(n+1)w}) = \sum_0^{\infty} s_n \int_n^{n+1} w e^{-vw} dv = \\ &= \int_0^{\infty} w e^{-vw} s(v) dv \rightarrow 0 \text{ als } w \downarrow 0, \end{aligned}$$

dus

$$\int_0^{\infty} s(yv)e^{-v} dv \rightarrow 0 \text{ als } y \rightarrow \infty.$$

Kiest men nu $L'(\bar{\phi}) = u \int_0^{\infty} \bar{\phi}(v)e^{-uv} dv$ ($u > 0$), en $G(v) = s(v)$,

dan zal

$$L'\{G(yv); u\} = u \int_0^{\infty} s(yv)e^{-uv} dv = \int_0^{\infty} s\left(\frac{y}{u}v\right)e^{-v} dv \rightarrow 0$$

als $y \rightarrow \infty$ voor elke vaste $u > 0$. Aangezien de vergelijking

$$u \int_0^{\infty} \bar{\phi}(v)e^{-uv} dv \equiv 0 \quad (u > 0)$$

geen oplossing $\bar{\phi}(v) \neq 0$ heeft in C'B' (er is zelfs geen begrensde oplossing die continu is voor $v > 0$: momentenstelling!) blijkt uit de centrale stelling dat $s(y) \rightarrow 0$ als $y \rightarrow \infty$, h.t.b.w.

Opmerking. Het aldus verkregen bewijs van Littlewood's stelling lijkt sterk op een bewijs van deze stelling dat onlangs is gegeven door Delange [2].

Men kan de algemenere stellingen van Hardy en Littlewood voor machtreeksen ook uit de centrale stelling afleiden. Voorbeeld: uit " $\sum_1^{\infty} a_n x^n$ convergeert voor $|x| < 1$ terwijl $(1-x)^{\alpha} \sum_1^{\infty} a_n x^n \rightarrow 0$ als $x \uparrow 1$ " en " $|na_n| < Kn^{\alpha}$ " volgt " $n^{-\alpha} s_n \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ ". Als $\alpha > -1$ neme men in de centrale stelling

$$L'(\bar{\phi}) = u \int_0^{\infty} \bar{\phi}(v)(uv)^{\alpha} e^{-uv} dv, \quad G(v) = v^{-\alpha} s(v).$$

Uit het gegeven volgt dat $\int_0^{\infty} G(yv)v^{\alpha} e^{-v} dv \rightarrow 0$ als $y \rightarrow \infty$, waaruit volgt $G(y) \rightarrow 0$ als $y \rightarrow \infty$.

5. Wiener's stellingen via de centrale stelling en de theorie van Beurling.

Laat $L(\varphi)$ voldoen aan de voorwaarden genoemd in §3; laat $L(\varphi)$ bovendien lineair zijn en zodanig dat uit $L\{\varphi(t); u\} \equiv 0$ volgt $L\{\varphi(t+\tau); u\} \equiv 0$ voor elke reële τ . Als dus $\varphi(t)$ een oplossing is van $L(\varphi) \equiv 0$ dan voldoet ook elke lineaire combinatie $\sum b_k \varphi(t+\tau_k)$.

Beurling [1] bewijst nu dat voor elke functie $\varphi(t) \in CB$ die $\neq 0$ is de lineaire combinaties $\sum b_k \varphi(t+\tau_k)$ een klasse van functies vormen die tenminste één limietfunctie ("limiet" in passende zin) $e^{i\lambda t}$ bezit (λ reëel). Hieruit volgt dat uit $L(\varphi) \equiv 0$ voor een zekere $\varphi(t) \in CB$, $\varphi(t) \neq 0$, volgt dat voor een zekere reële λ , $L(e^{i\lambda t}) \equiv 0$. Uit de centrale stelling volgt dan de volgende verscherping van Beurling's resultaten:

S T E L L I N G. Uit

" $g(t) \in SB$ en $L\{g(t+\tau); u\} \rightarrow 0$ als $\tau \rightarrow \infty$ voor elke vaste u "

(waarbij L nu aan meer voorwaarden moet voldoen dan in §3!) en

" $L\{\varphi(t); u\} \equiv 0$ heeft geen oplossing $e^{i\lambda t}$ "

volgt

$$"g(\tau) \rightarrow 0 \text{ als } \tau \rightarrow \infty".$$

Past men dit resultaat toe op

$$L\{\varphi(t); u\} = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \varphi(u-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} K(u-t) \varphi(t) dt$$

waarin $K(t) \in L$ dan krijgt men: uit

$$"K(t) \in L, g(t) \in SB \text{ en } \int_{-\infty}^{\infty} K(u-t) g(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} K(u+\tau-t) g(t) dt$$

$\rightarrow 0$ als $\tau \rightarrow \infty$ voor elke vaste u "

en

$$" \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{i\lambda(u-t)} dt = e^{i\lambda u} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{-i\lambda t} dt \neq 0$$

voor alle λ "

volgt

$$"g(\tau) \rightarrow 0 \text{ als } \tau \rightarrow \infty".$$

Dit is de stelling van Wiener genoemd in § 2.

Literatuur.

1. A.Beurling, The spectrum of a bounded function and Wiener's Tauberian theorems, Acta Math. 77, 127-136 (1945).
2. H.Delange, The converse of Abel's theorem on power series, Annals of Mathematics (2) 50, 94-109 (1949).
3. R.Godement, Théorèmes taubériens et théorie spectrale, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 64, 119-138 (1948).
4. G.H.Hardy, Divergent series, Oxford 1949.
5. G.H.Hardy en J.E.Littlewood, On a Tauberian theorem for Lambert's series and some fundamental theorems in the analytic theory of numbers, Proc. London Math. Soc. (2) 19, 21-29 (1921).
6. J.Karamata, Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes, Math. Zeitschrift 32, 319-320 (1930).
7. J.Korevaar, Een elementair bewijs van een Tauberstelling voor reeksen van Lambert, Simon Stevin 25, 83-114 (1947).
8. J.E.Littlewood, The converse of Abel's theorem on power series, Proc. London Math. Soc. (2) 9, 434-448 (1911).
9. D.V.Widder, The Laplace transform, Princeton 1941.
10. H.Wielandt, Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes, Math. Zeitschrift 56, 206-207 (1952).
11. N.Wiener, Tauberian theorems, Annals of Mathematics (2) 33, 1-100 (1932).
12. N.Wiener, The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge 1933.