STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. A. Heyting

12 november 1958

Hoogtelijnen

1958

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr A. Heyting

12 november 1958

Hoogtelijnen

De stelling, dat de hoogtelijnen van een driehoek door een punt gaan, is een onmiddellijk gevolg van de stelling uit de projectieve meetkunde, dat de paren overstaande zijden van een volledige vierhoek door een rechte lijn gesneden worden in puntenparen van een involutie. Voor de snijlijn wordt de oneigenlijke rechte genomen; de involutie is de orthogonale involutie. Hieruit volgt, dat alle kegelsneden door de hoekpunten en het hoogtepunt van een driehoek orthogonale hyperbolen zijn. De meetkundige plaats van de middelpunten van die hyperbolen is de negenpuntscirkel.

Ook in de elliptische meetkunde gaan de hoogtelijnen van een driehoek door een punt; in de hyperbolische meetkunde gaan zij of door een punt, of zij zijn evenwijdig, of zij hebben een gemeenschappelijke loodlijn. Van de bewijzen voor de hoogtelijnstelling in de euclidische meetkunde blijkt datgene, dat van de bissectrices van de voetpuntendriehoek gebruik maakt, het beste voor de niet-euclidische meetkunde geschikt te maken.

Met behulp van het model van Cayley kan de hoogtelijnstelling uit de niet-euclidische meetkunde in een projectieve vorm gebracht worden. Zij luidt dan als volgt: Zijn twee driehoeken elkanders poolfiguur ten opzichte van een kegelsnede, dan gaan de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten door een punt.

De hoogtelijnen van een viervlak gaan in het algemeen niet door een punt, maar zij hebben wel een bijzondere ligging; zij liggen op een hyperboloide. Het bewijs is zeer eenvoudig: men kan onmiddellijk acht transversalen van de vier hoogtelijnen aangeven.

Het feit, dat die transversalen de hoogtelijnen in puntenviertallen met dezelfde dubbelverhouding snijden, leidt tot metrische eigenschappen in het viervlak.

De redeneringen uit de vorige alinea gaan onveranderd door in de niet-euclidische meetkunde. Met het model van Cayley brengen wij de stelling in de projectieve vorm: Zijn twee viervlakken elkanders poolfiguren ten opzichte van een kwadriek, dan liggen de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten op een kwadriek. Deze projectieve stelling kan op overeenkomstige wijze bewezen worden als de stelling over de hoogtelijnen.