STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1959-019

Oplossing van een Matrixvergelijking

P.C. Baayen
en
C.G. Lekkerkerker

1959

ZW 1959-019 . Oplossing van een matrixvergelijking
P.C. Baayen - C.G. Lekkerkerker

18 november 1959

De Heer C.M.E. Dijkshoorn,
Laboratorium voor Elektrotechniek
der Technische Hogeschool,
Kanaalweg 2b,
D E L F T.

afd.ZW

Hooggeachte Heer Dijkshoorn,

In Uw brief d.d. 5 november 1959 legde U ons de volgende matrixvergelijking voor:

(1) $\alpha(A-\bar{A}) + \bar{A}(B-\bar{B})A + \bar{A}(X-\bar{X})A - (X-\bar{X}) = 0,$

waarbij α een scalar is, det $A=1$, $\bar{P}$ de geadjungeerde is van P, en B een infinitesimale matrix van A. U stelde ons daarbij de vraag of

(2) $$X = \frac{\bar{A}(AB-BA)}{(A-\bar{A})^2}$$

een oplossing was van (1).

In de eerste plaats is aan (1) alleen te voldoen voor een speciale van A en B afhankelijke waarde van α. Bij die keuze van α voldoet dan inderdaad de matrix (2) aan (1), aangenomen, dat $(A-\bar{A})^2 \neq 0$. De volledige oplossing bestaat dan uit de schaar matrices, met 2 parameters, van de vorm

(3) $$X = \frac{\bar{A}(AB-BA)}{(A-\bar{A})^2} + \lambda A + \mu I.$$

Wij geven nu een gedetailleerde afleiding van dit resultaat.

Uit
$$\det A = \det(A+\varepsilon B) = \det A + \varepsilon \,\mathrm{sp}\, A\bar{B} + O(\varepsilon^2)$$

volgt sp $A\bar{B} = 0$. Verder geldt algemeen: sp $P=P+\bar{P}$; $\overline{PQ}=\bar{Q}\bar{P}$; sp PQ = sp QP. Dus geldt:

(4) $\mathrm{sp}\, A\bar{B} = A\bar{B}+B\bar{A} = 0$; $\mathrm{sp}\, \bar{B}A = \bar{B}A+\bar{A}B = 0$;

(5) $\mathrm{sp}\, AB = AB+\bar{B}\bar{A} = AB+A\bar{B}+B\bar{A}+\bar{B}\bar{A} = (A+\bar{A})(B+\bar{B}) = \mathrm{sp}\, A.\mathrm{sp}.B.$

Na voorvermenigvuldiging met A volgt uit (1)

$$\alpha\,\mathrm{sp}(A^2-I) + \mathrm{sp}(B-\bar{B})A = \mathrm{sp}\ A(X-\bar{X})-(X-\bar{X})A = 0;$$

en, wegens
$$\mathrm{sp}(A^2-I) = \mathrm{sp}(A^2)-2 = A^2+\bar{A}^2-2 = (A-\bar{A})^2,$$

volgt dus:

$$(6)\qquad \alpha = -\frac{sp(B-\bar{B})A}{sp(A^2-I)} = -\frac{sp\ BA}{(A-\bar{A})^2} = -\frac{sp\ A\ sp\ B}{(A-\bar{A})^2} = -\frac{(A+\bar{A})(B+\bar{B})}{(A-\bar{A})^2}\ .$$

Als wij deze waarde voor α in (1) substitueren, en daarna met $(A-\bar{A})^2$ vermenigvuldigen, vinden wij

$$-(A-\bar{A})(A+\bar{A})(B+\bar{B})+(A-\bar{A})^2\bar{A}(B-\bar{B})A+(A-\bar{A})^2\bar{A}(X-\bar{X})A-(A-\bar{A})^2(X-\bar{X})=0.$$

Na voorvermenigvuldigen met A, en navermenigvuldigen met $\bar{A}$, volgt hieruit:

$$(7)\qquad \begin{aligned}(A-\bar{A})^2(X-\bar{X})-A(A-\bar{A})^2(X-\bar{X})\bar{A} &= (A^2-\bar{A}^2)(B+\bar{B})-(A-\bar{A})^2(B-\bar{B})=\\ &= (A^2-\bar{A}^2)(B+\bar{B})-(A^2+\bar{A}^2-2)(B-\bar{B})=\\ &= 2A^2\bar{B}-2\bar{A}^2B+2(B-\bar{B}).\end{aligned}$$

Stellen wij $(A-\bar{A})^2X=Y$, en merken wij op dat $Y-\bar{Y}=2Y-(Y+\bar{Y})=2Y-sp\ Y$, dan volgt dat (7) gelijkwaardig is met

$$Y-AY\bar{A} = A^2\bar{B} - \bar{A}^2B + B - \bar{B}\ .$$

Op grond van (4) kunnen wij hiervoor schrijven:

$$Y-AY\bar{A} = -A\bar{B}\bar{A} + \bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{A} + B - \bar{B}.$$

Daar $\bar{A}\bar{B}\bar{\bar{A}}-\bar{B}$ spoor 0 heeft, geldt: $\bar{A}\bar{B}\bar{\bar{A}}-\bar{B} = -(\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{\bar{A}}-\bar{B}})=-(\bar{A}BA-B)$; dus wij vinden:

$$(8)\qquad Y-AY\bar{A} = B-\bar{A}BA-AB\bar{A}+B = (B-\bar{A}BA)-A(B-\bar{A}BA)\bar{A}.$$

Onmiddellijk vinden wij dus als particuliere oplossing voor (8)

$$(9)\qquad Y = B - \bar{A}BA = \bar{A}(AB-BA)\ .$$

Omdat is aangenomen dat $(A-\bar{A})^2\neq 0$, volgt dus dat (2) aan (1) voldoet.

Het is duidelijk dat met X_0 ook $X_0+\lambda A+\mu I$ aan (1) voldoet. Omgekeerd is het zeer eenvoudig te bewijzen, dat indien X_0 en X_1 aan (1) voldoet, er geldt: $X_0-X_1=\lambda A+\mu I$. De algemene oplossing van (1) - onder de aanname $(A-\bar{A})^2\neq 0$ - is dus

$$(10)\qquad X = \frac{\bar{A}(AB-BA)}{(A-\bar{A})^2} + \lambda A + \mu I.$$

Wij hopen, dat wij hiermede Uw vraag bevredigend hebben beantwoord.

Met de meeste hoogachting,

(Dr C.G. Lekkerkerker)

(P.C. Baayen)