STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 021

Bewijs van de identiteit $\sum_{i=0}^{2h} (-1)^i \binom{2h}{i}^3 = (-1)^h \frac{(3h)!}{(h!)^3}$.

Dr. W. Peremans

1951

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestraat 49,
A m s t e r d a m -0.

Rapport ZW 1951-021.

Bewijs van de identiteit $\sum_{i=0}^{2h} (-1)^i \binom{2h}{i}^3 = (-1)^h \frac{(3h)!}{(h!)^3}$.

door
Dr W. Peremans.

Het bewijs wordt geleverd door volledige inductie naar h. Voor h=1 is de identiteit onmiddellijk te verifiëren. Laat de identiteit voor h=n juist zijn. We bewijzen dat zij dan ook voor h=n+1 juist is. Hierbij gebruiken we drie omvormingen:

1°. $\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1}$, als $1 \leq k \leq m-1$; $\binom{m}{o} = \binom{m-1}{o}$; $\binom{m}{m} = \binom{m-1}{m-1}$.

2° Het achterstevoren keren van de sommatievolgorde in een som (dus $\sum_{i=o}^{m} a_i = \sum_{i=o}^{m} a_{m-i}$) gevolgd door de omvorming $\binom{l}{k} = \binom{l}{l-k}$.

We merken op dat als m even is $(-1)^i$ in $(-1)^i$ en als m oneven is $(-1)^i$ in $(-1)^{i+1}$ overgaat.

3° Het uitschrijven van een product van binomiaalcoëfficiënten in faculteiten en het vervolgens op een andere wijze weer samennemen van deze faculteiten tot binomiaalcoëfficiënten. Hierbij kunnen enkele factoren die geen binomiaalcoëfficiënten zijn, overblijven.

Op $\sum_{i=0}^{2n+2} (-1)^i \binom{2n+2}{i}^3$ passen we 1° toe en bedenken dat $(a+b)^3 = a^3+b^3+ + 3ab(a+b)$. Nu geeft toepassing van 2°, dat $\sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i \binom{2n+1}{i}^3 = 0$ en

$$\sum_{i=1}^{2n+2} (-1)^i \binom{2n+1}{i-1}^3 = \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^{i+1} \binom{2n+1}{i}^3 = 0. \text{ Dus}$$

$$\sum_{i=0}^{2n+2} (-1)^i \binom{2n+2}{i}^3 = 3 \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^i \binom{2n+1}{i} \binom{2n+1}{i-1} \binom{2n+2}{i}$$

$$= 3 \sum_{i=0}^{2n} (-1)^{i+1} \binom{2n+1}{i+1} \binom{2n+1}{i} \binom{2n+2}{i+1}$$

We passen nu 3° toe. Dit geeft

$$\binom{2n+1}{i+1} \binom{2n+1}{i} \binom{2n+2}{i+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \binom{2n}{i} \binom{2n+2}{i+1}^2,$$

dus

$$\sum_{i=0}^{2n+2} (-1)^i \binom{2n+2}{i}^3 = \frac{3(2n+1)}{2(n+1)} \sum_{i=0}^{2n} (-1)^{i+1} \binom{2n}{i} \binom{2n+2}{i+1}^2.$$

Op $\binom{2n+2}{i+1}^2$ passen we 1° toe. Dit geeft

$$\sum_{i=0}^{2n+2}(-1)^i\binom{2n+2}{i}^3 = \frac{3(2n+1)}{2(n+1)}\Big(\sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n}{i}\binom{2n+1}{i+1}^2 + \sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n}{i}\binom{2n+1}{i}^2 +$$

$$+\ 2\sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n}{i}\binom{2n+1}{i+1}\binom{2n+1}{i}\Big) = \frac{3(2n+1)}{2(n+1)}\ (\alpha+\beta+2\gamma).$$

Door toepassing van 2° op β vinden we $\beta=\alpha$. Op γ passen we 3° toe. Dit geeft $\binom{2n}{i}\binom{2n+1}{i+1}\binom{2n+1}{i} = \frac{2n+1}{2n+2}\binom{2n+2}{i+1}\binom{2n}{i}^2$,

$$\gamma = \frac{2n+1}{2(n+1)}\sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n+2}{i+1}\binom{2n}{i}^2.$$

Hierin passen we op $\binom{2n+2}{i+1}$ 1° toe. Dit geeft:

$$\frac{2(n+1)}{2n+1}\gamma = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n+1}{i+1}\binom{2n}{i}^2 + \sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n+1}{i}\binom{2n}{i}^2 = \delta_1 + \delta_2.$$

Door toepassing van 2° op δ_2 vinden we dat $\delta_2 = \delta_1$, dus

(1) $\frac{n+1}{2n+1}\gamma = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n+1}{i+1}\binom{2n}{i}^2.$ Hieruit volgt:

$$\frac{n+1}{2n+1}\gamma - \alpha = \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}\binom{2n+1}{i+1}\binom{2n}{i}\binom{2n}{i+1}.$$

Door op het rechterlid hiervan 2° toe te passen vindt men dat het $=0$ is. Dus

(2) $\gamma = \frac{2n+1}{n+1}\alpha.$

Hieruit en uit $\beta=\alpha$ volgt

$$\sum_{i=0}^{2n+2}(-1)^i\binom{2n+2}{i}^3 = \frac{3(2n+1)(3n+2)}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n}{i}\binom{2n+1}{i+1}^2.$$

Op grond van (1) en (2) volgt hieruit

(3) $$\sum_{i=0}^{2n+2}(-1)^i\binom{2n+2}{i}^3 = \frac{3(2n+1)(3n+2)}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n+1}{i+1}\binom{2n}{i}^2.$$

Op $\binom{2n+1}{i+1}$ passen we 1° toe. Dit geeft:

(4) $$\sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n+1}{i+1}\binom{2n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}\binom{2n}{i+1}\binom{2n}{i}^2 + \sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n}{i}^3.$$

Op de eerste term van het rechterlid passen we 3° toe. Dit geeft:

$$\binom{2n}{i+1}\binom{2n}{i}^2 = \frac{2n}{2n+1}\binom{2n-1}{i}\binom{2n}{i}\binom{2n+1}{i+1},$$

(5) $$\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}\binom{2n}{i+1}\binom{2n}{i}^2 = \frac{2n}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}\binom{2n-1}{i}\binom{2n}{i}\binom{2n+1}{i+1}.$$

Op $\binom{2n+1}{i+1}$ passen we 1° toe. Dit geeft:

(6) $$\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}\binom{2n-1}{i}\binom{2n}{i}\binom{2n+1}{i+1} = \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}\binom{2n-1}{i}\binom{2n}{i}\binom{2n}{i+1} +$$

$$\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}\binom{2n-1}{i}\binom{2n}{i}^2.$$

Op de eerste term van het rechterlid passen we 2^o toe en vinden dat het = 0 is. Op de tweede term, die we ε_1 noemen, passen we ook 2^o toe en vinden:

$$\varepsilon_1 = \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^i\binom{2n-1}{i}\binom{2n}{i+1}^2 = \sum_{i=1}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n-1}{i-1}\binom{2n}{i}^2 = \varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_1 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n}{i}^3.$$

Door dit met (3), (4), (5) en (6) te combineren vinden we

$$\sum_{i=0}^{2n+2}(-1)^i\binom{2n+2}{i}^3 = \frac{3(3n+1)(3n+2)}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}\binom{2n}{i}^3.$$

Volgens de inductieveronderstelling is

$$\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\binom{2n}{i}^3 = (-1)^n\frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

Dus

$$\sum_{i=0}^{2n+2}(-1)^i\binom{2n+2}{i}^3 = -\frac{3(3n+1)(3n+2)}{(n+1)^2}(-1)^n\frac{(3n)!}{(n!)^3} = (-1)^{n+1}\frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3}.$$

Hiermee is de gestelde identiteit door volledige inductie bewezen.