STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1962 - 021

Colloquium Stochastische Tijdfuncties

Hilbert ruimte

door

P. van der Laan

December 1962

Colloquium Stochastische Tijdfuncties

Hilbert ruimte

door

P.van der Laan

1. Von Neumann ruimte

Definitie 1.1

Een lineaire ruimte R is een additieve Abelse groep (elementen: x,y,...) waarbij de complexe getallen (notatie: α, β, ...) als operatoren ($\alpha x \in R$) werken, met de volgende wetten:

1. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ (distributieve wet t.a.v. de elementen van R)
2. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ (distributieve wet t.a.v. de complexe getallen)
3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (associatieve wet van de vermenigvuldiging)
4. $1.x = x$.

[Een additieve Abelse groep G is een verzameling elementen waarvoor geldt:

1. $x \in G,\ y \in G \Longrightarrow x+y \in G$.
2. $x+y = y+x$ (commutativiteit van de optelling)
3. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (associativiteit van de optelling)
4. $\exists$ een eenduidig bepaald nulelement $0 \in G$ met: $x+0=x$.
5. Bij iedere $x \in G$ bestaat een eenduidig bepaald tegengestelde: $-x$ met: $x+(-x)=0$.

Eenvoudig is aan te tonen dat:

a. $0+x=x$
b. $\alpha.0=0$ $(\alpha x = \alpha(0+x) = \alpha.0 + \alpha.x \Longrightarrow \alpha.0=0)$
c. $0.x=0$ $(\alpha x = (\alpha+0)x = \alpha x + 0.x \Longrightarrow 0.x=0)$
d. $(-1).x = -x$ $(x+(-1)x = 1.x+(-1)x = (1+(-1))x = 0.x = 0 \Longrightarrow (-1).x = -x)$.

$\therefore$ $-(x+y) = (-x)+(-y)$. Voor $x+(-y)$ schrijven we $x-y$. Men kan zonder meer aantonen dat alle rekenregels uit de lineaire vectorrekening hier geldig zijn.]

Definitie 1.2

Op R zij een inwendig product gedefinieerd, d.w.z. aan ieder tweetal elementen $x,y \in R$ is een complex getal (notatie: (x,y)) toegevoegd met de eigenschappen:

1. $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$ (associatieve wet t.a.v. de eerste component)
2. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ (distributieve wet t.a.v. de eerste component)
3. $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (Hermitiaanse symmetrie)
4. $(x,x) > 0$ voor $x \neq 0$.

Hieruit volgt:

1' $(x,\beta y)=\overline{(\beta y,x)}=\overline{\beta(y,x)}=\bar{\beta}\,\overline{(y,x)}=\bar{\beta}(x,y)$.

2' $(x,y+z)=\overline{(y+z,x)}=\overline{(y,x)+(z,x)}=\overline{(y,x)}+\overline{(z,x)}=(x,y)+(x,z)$

3' $(x,x)=\overline{(x,x)}$, dus (x,x) is reëel (zie punt 4 van def. 1.2)

4' $(0,y)=(x-x,y)=(x,y)-(x,y)=0$. In het bijzonder: $(0,0)=0$.

Een lineaire ruimte R met op R een inwendig product gedefinieerd, wordt vaak een algemene Euclidische ruimte genoemd.

Notatie

Hierbij wordt dan $\|x\| \equiv \sqrt{(x,x)}$ de lengte van het element x genoemd. Met als afstand $d(x,y) \equiv \|x-y\|$ is R een metrische ruimte. (Voor de gewone n-dimensionale Euclidische ruimte geldt dat de lengte van de vector x is:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad x=(x_1,x_2,\dots,x_n).\ )$$

Dat $d(x,y)$ een afstand (zie hoofdstuk I van Robinson) is, volgt uit:

1. $d(x,y) \geq 0$ en is eenduidig bepaald.
2. $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow \sqrt{(x-y,x-y)}=0 \Longleftrightarrow x-y=0 \Longleftrightarrow x=y$.
3. $d(x,y)=\sqrt{(x-y,x-y)}=\sqrt{(y-x,y-x)}=d(y,x)$.
4. $d(x,y)+d(y,z)=\|x-y\|+\|y-z\|\geq\|x-z\|=d(x,z)$.

Het bewijs van de ongelijkheid in punt 4 berust op de volgende twee ongelijkheden:

Stelling 1.1

De ongelijkheid van Schwarz:
Voor elk tweetal elementen $x,y \in R$ geldt: $|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Bewijs: Als $(x,y)=0$ dan zeker goed. Stel dus $(x,y)\neq 0$ d.w.z. zeker $x\neq 0$.
$0 \leq (x-\alpha y,x-\alpha y)=(x,x)-(\alpha y,x)-(x,\alpha y)+(\alpha y,\alpha y)$
$= (x,x)-\alpha(y,x)-\bar{\alpha}(x,y)+|\alpha|^2(y,y)$.

Kies nu: $\alpha=\frac{(x,x)}{(y,x)}$, dan $0\leq -(x,x)+\frac{(x,x)^2(y,y)}{|(x,y)|^2}$.
Deling door $(x,x)>0$ geeft: $0\leq -1+\frac{(x,x)(y,y)}{|(x,y)|^2}$

$\Longrightarrow |(x,y)|^2\leq (x,x)(y,y) \Longrightarrow |(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
Het gelijkteken geldt, indien $\alpha x+\beta y=0$ (α,β willekeurige complexe getallen).

Opm: Uit deze ongelijkheid volgt dat (x,y) een continue functie van beide variabelen is. Stel $y\neq 0$ (anders $(x,y)=0$).

Als: $\|x_2-x_1\| < \frac{\varepsilon}{\|y\|} \Longrightarrow |(x_2,y)-(x_1,y)|=|(x_1+x_2-x_1,y)-(x_1,y)|=$
$=|(x_2-x_1,y)| \leq \|x_2-x_1\|\ \|y\|< \varepsilon$.

Stelling 1.2

De driehoeksongelijkheid

Voor elk tweetal elementen $x,y \in R$ geldt: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Bewijs: Als $\|x+y\| = 0$ is de bewering triviaal. Stel dus $\|x+y\| > 0$.

$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = |(x,x+y)+(y,x+y)| \leq |(x,x+y)| + |(y,x+y)|$
$\leq \|x\| \cdot \|x+y\| + \|y\| \cdot \|x+y\|$.

Deling door $\|x+y\| > 0$ geeft het verlangde resultaat.
Het gelijkteken geldt indien $\lambda x + \mu y = 0$ (λ, μ willekeurige reële getallen).

Verder kan men bewijzen de zgn. parallellogram eigenschap:

Stelling 1.3

Voor ieder tweetal elementen $x,y \in R$ geldt:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Bewijs: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y,x+y)+(x-y,x-y) = (x,x)+(y,x)+(x,y)+$
$+(y,y)+(x,x)-(y,x)-(x,y)+(y,y) = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Algemeen geldt: Als in een lineaire ruimte R aan elk element $x \in R$ een niet-negatief getal $\|x\|$ toegevoegd kan worden, zodanig dat:

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x=0$
2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (driehoeksongelijkheid)
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$. (homogeniteitseigenschap van de norm)

dan heet R een genormeerde lineaire ruimte, en $\|x\|$ heet de norm van x.

Als in een genormeerde lineaire ruimte voor ieder tweetal elementen x,y de parallellogram eigenschap geldt, dan kan een inwendig product ingevoerd worden, zodat de aanwezige norm $\|x\|$

juist gelijk aan $\sqrt{(x,x)}$ is. Neem namelijk

$$4(x,y)= \|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2.$$

Met enig rekenwerk is aan te tonen dat de aldus gedefinieerde (x,y) inderdaad alle eigenschappen van een inwendig product heeft en dat $\sqrt{(x,x)}=\|x\|$. Dit gaat als volgt:

a. $$\begin{aligned}(x,y) &= \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(\|y+x\|^2-\|y-x\|^2+i\|y-ix\|^2-i\|y+ix\|^2\right)\\ &= \overline{(y,x)}.\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}(x,x) &= \tfrac{1}{4}\left(4\|x\|^2+i\|x+ix\|^2-i\|x-ix\|^2\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(4\|x\|^2+2i\|x\|^2-2i\|x\|^2\right)=\|x\|^2 > 0 \quad \text{voor } x\neq 0\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{en } = 0 \quad \text{voor } x=0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sqrt{(x,x)} = \|x\|.$$

c. $$\begin{aligned}\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2 &= 2\|x+z\|^2+2\|y\|^2-\|x+z-y\|^2-\|x+y-z\|^2\\ &= 2\|x+z\|^2+2\|y\|^2-2\|x\|^2-2\|y-z\|^2.\end{aligned}$$

In dit resultaat mogen x en y verwisseld worden:

$$\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2=2\|y+z\|^2+2\|x\|^2-2\|y\|^2-2\|x-z\|^2.$$

Optelling van beide resultaten en deling door 8 geeft:

$$\tfrac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2\right)=\tfrac{1}{4}\left(\|x+z\|^2+\|y+z\|^2-\|x-z\|^2-\|y-z\|^2\right).$$

Analoog: $$\tfrac{i}{4}\left(\|x+y+iz\|^2-\|x+y-iz\|^2\right)=\tfrac{i}{4}\left(\|x+iz\|^2+\|y+iz\|^2-\|x-iz\|^2-\|y-iz\|^2\right).$$

Optellen geeft: $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

d. Het bewijs van $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$ gaat wat moeizamer.
Uit de driehoeksongelijkheid volgt: $\big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x-y\|$.

$$\Longrightarrow \big| \|\alpha x \pm y\| - \|\beta x \pm y\| \big| \leq \|(\alpha-\beta)x\| = |\alpha-\beta| \, \|x\| .$$

$\Longrightarrow$ voor $\alpha \longrightarrow \beta : \|\alpha x \pm y\| \longrightarrow \|\beta x \pm y\|$. Dus $\|\alpha x \pm y\|$ is een continue functie van α . $\Longrightarrow (\alpha x,y)$ is een continue functie van α .

Stel S is de verzameling van alle α waarvoor geldt: $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$. S is niet leeg, daar $1 \in S$.

$$4(-x,y)= \|-x+y\|^2- \|-x-y\|^2+i\|-x+iy\|^2-i\|-x-iy\|^2$$

$$= -(-\|x-y\|^2+\|x+y\|^2-i\|x-iy\|^2+i\|x+iy\|^2)=-4(x,y) \text{ dus } -1 \in S.$$

Analoog te bewijzen: $i \in S$.

$(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$. Neem $x= \alpha x'$ en $y=\pm\beta x'$ dan volgt hieruit:

$\alpha, \beta \in S \Longrightarrow \alpha \pm \beta \in S$.

Dus: $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \in S$.

Indien $\alpha, \beta \in S$, $\beta \neq 0$, dan $\frac{\alpha}{\beta} \in S$. Immers:

$$\alpha(x,y)=(\frac{\alpha\beta}{\beta} x,y)= \beta(\frac{\alpha}{\beta} x,y) \Longrightarrow (\frac{\alpha}{\beta} x,y)= \frac{\alpha}{\beta} (x,y).$$

Dus alle rationale getallen behoren tot S.

Stel: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \longrightarrow \alpha$ α_i, voor $i=1,2,\ldots$, zijn rationale getallen.

$$(\alpha x,y)= \lim_{i\to\infty} (\alpha_i x,y)= \lim_{i\to\infty} \alpha_i(x,y)= \alpha(x,y) \Longrightarrow \alpha \in S'.$$

Dus alle reële getallen behoren tot S.

Voor complexe α geldt: $\alpha = \alpha_1 + i\,\alpha_2$ (α_1,α_2 reële getallen)
$(\alpha x,y)=((\alpha_1+i\alpha_2)x,y)= \alpha_1(x,y)+i\,\alpha_2(x,y)= \alpha(x,y)$, daar ook $i \in S$.

<u>Definitie 1.3</u>

Indien een lineaire ruimte R, met op R een inwendig product gedefinieerd, volledig is, d.w.z. dat iedere fundamentaalrij een limiet ($\in$ R) heeft, dan heet R een <u>von Neumann ruimte</u>.

<u>Voorbeeld</u>:

R zij een willekeurige complexe k-dimensionale vectorruimte. Kies een basis en laat t.o.v. deze basis:

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_k)$$
$$y=(y_1,y_2,\dots,y_k)\quad .$$

Definieer: $(x,y)=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\dots+x_k\bar{y}_k$.
Met dit inwendig product is R een von Neumann ruimte.
Speciaal dus:

Als $\|x_m-x_n\|\longrightarrow 0$ voor $m,n\longrightarrow\infty$, dan bestaat er een $x\in R$ zodat $\|x-x_n\|\longrightarrow 0$ voor $n\longrightarrow\infty$.

$\|x_m-x_n\|\longrightarrow 0$ wil zeggen: $|x_{m1}-x_{n1}|^2+\dots+|x_{mk}-x_{nk}|^2\longrightarrow 0$ voor $m,n\longrightarrow\infty$. $\Longrightarrow |x_{mi}-x_{ni}|^2\longrightarrow 0$ $(i=1,2,\dots,k)$ voor $m,n\longrightarrow\infty$

$\Longrightarrow \lim\limits_{m\longrightarrow\infty} x_{mi}$ bestaat, stel $\lim\limits_{m\longrightarrow\infty} x_{mi}=x_i$ $\quad(i=1,2,\dots,k)$.
Laat nu in: $|x_{m1}-x_{n1}|^2+\dots+|x_{mk}-x_{nk}|^2<\varepsilon$ voor $m,n\geqslant N_\varepsilon$,
$m\longrightarrow\infty$, dan: $|x_1-x_{n1}|^2+\dots+|x_k-x_{nk}|^2<\varepsilon$ voor $n\geqslant N_\varepsilon$,
dus: $\|x-x_n\|^2\longrightarrow 0$ voor $n\longrightarrow\infty$.

2. De ongelijkheid van Bessel.

R is een von Neumann ruimte met elementen $x,y,\dots$.

Definitie 2.1.

x en y heten onderling loodrecht (orthogonaal) als $(x,y)=0$

$(x,y)=0\Longrightarrow(y,x)=0$ vandaar onderling loodrecht. Onderling loodrecht wordt kort aangegeven met: $x\perp y$.

Stelling 2.1

Als $x\perp y$, dan geldt: $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

Bewijs: $\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=\|x\|^2+\|y\|^2$,

daar $(x,y)=(y,x)=0$.

Definitie 2.2

x en y heten orthonormaal als $(x,y)=0$ en $\|x\| = \|y\| = 1$.

Voor een willekeurige verzameling elementen geldt:

Definitie 2.3

x_i ($i \in$ Index verzameling I) heten orthogonaal resp. orthonormaal indien $(x_{i_1},x_{i_2})=0$ $(i_1,i_2 \in I, i_1 \neq i_2)$ resp. $(x_{i_1},x_{i_2}) = \delta_{i_1 i_2}$ $(i_1,i_2 \in I)$.

Definitie 2.4

Een verzameling orthonormale elementen $x_i (i \in I)$ heet maximaal indien uit $(x_i,z)=0$ $(i \in I)$ volgt. ~~$z=0$ òf $z=x_j$~~ ~~$(j \in I)$~~.

Stel $u_1,u_2,\dots,u_n$ zijn n orthonormale elementen in R. Indien x is te schrijven als $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ dan heet

$(x,u_j) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, u_j) = \alpha_j$ de Fourier coëfficiënt (x,u_j).

Voor een willekeurige x geldt: $(x-x',u_i) = (x,u_i)-(x',u_i)$ $= \alpha_i - \alpha_i = 0$ waarbij: $x' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ met $\alpha_i = (x,u_i)$.

Dus $x-x'$ staat loodrecht op alle u_i $(i=1,2,\dots,n)$.

Stelling 2.2

Stel $u_1,u_2,\dots,u_n$ zijn orthonormale elementen in R.

De afstand $d \equiv \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\|$ is minimaal voor $\alpha_i = (x,u_i)$ en

$0 \leq d^2_{min} = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x,u_i)|^2$.

Bewijs: $d^2 = (x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = (x,x) - 2\,\mathrm{Re}\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{(x,u_i)}\} +$

$+ \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x,u_i)|^2 + \sum_{i=1}^{n} [|(x,u_i)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\{\alpha_i \overline{(x,u_i)}\} +$

$|\alpha_i|^2] = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x,u_i)|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - (x,u_i)|^2$, daar voor twee complexe getallen z_1, z_2: $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)$

$\Longrightarrow$ d^2 is minimaal als $\alpha_i=(x,u_i)$.

Tevens volgt hieruit de <u>ongelijkheid van Bessel</u>:

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} |(x,u_i)|^2 .$$

<u>Opm</u>. Indien $\alpha_i=(x,u_i)$ dan geldt: $x=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ u_i+(x-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ u_i)$

met $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \perp (x-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i)$, daar $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, x-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i)=$

$=\sum \alpha_i\ \overline{\alpha}_i\ -\sum \alpha_i\ \overline{\alpha}_i (u_i,u_i)=0.$

3. <u>Het orthogonalisatie-procédé van Schmidt</u> (of:Gram-Schmidt)

R is een von Neumann ruimte met elementen: $x_1, x_2, \ldots$

<u>Definitie 3.1</u>

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ heten lineair onafhankelijk als uit iedere voorwaarde $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i=0$ volgt $\alpha_i=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Elementen die niet lineair onafhankelijk zijn, heten lineair afhankelijk.

<u>Stelling 3.1</u>

Iedere eindige orthonormale verzameling $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in R is lineair onafhankelijk.

<u>Bewijs</u>: Stel $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i=0$ voor zekere $\alpha_i \Longrightarrow \alpha_i=(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j, u_i)=$

$=(0,u_i)=0$, voor $i=1,2,\ldots,n$.

<u>Stelling 3.2</u>

<u>Het orthogonalisatie-procédé van Schmidt</u>:

Als er n lineair onafhankelijke elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestaan, dan bestaat er een orthonormale verzameling $u_1, u_2, \dots, u_n$ in R.

Bewijs: $$u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

$$u_2 = \frac{x_2 - (x_2, u_1)u_1}{\|x_2 - (x_2, u_1)u_1\|}$$

$$u_3 = \frac{x_3 - (x_3, u_1)u_1 - (x_3, u_2)u_2}{\|x_3 - (x_3, u_1)u_1 - (x_3, u_2)u_2\|} \quad .$$

....

$$u_n = \frac{x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n, u_i)u_i}{\|x_n - \sum_{i=1}^{n} (x_n, u_i)u_i\|} \quad .$$

Uit de wijze van constructie van de u_i volgt zonder meer de orthonormaliteit. (Zie opm. onder st.2.2.)

$\|x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k, u_i)u_i\| \neq 0$ $(k=1,2,\dots,n)$. Want als $\|x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k, u_i)u_i\| = 0$ dan geldt $x_k = \sum_{i=1}^{k-1} (x_k, u_i)u_i \Longrightarrow x_k$ is een lineaire combinatie van: $u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \Longrightarrow x_k$ is een lineaire combinatie van $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ en dit is in strijd met de lineaire onafhankelijkheid van $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Opm. Voor iedere k is x_k een lineaire combinatie van $u_1, \dots, u_k$ en u_k een lineaire combinatie van $x_1, x_2, \dots, x_k$.

4. Unitaire ruimte

Definitie 4.1

Een n-dimensionale *unitaire* ruimte R^n is een van Neumann ruimte waarin het maximaal aantal lineair onafhankelijke elementen n bedraagt, d.w.z. $\exists\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in R^n$ zodat voor ieder n-tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ waarvoor $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ geldt $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, terwijl ieder n+1-tal elementen uit R^n lineair afhankelijk is. We spreken van een oneindig dimensionale unitaire ruimte indien er willekeurig veel lineair onafhankelijke elementen zijn.

Definitie 4.2

C^n is de verzameling van alle n-tupels van complexe getallen (aan te geven met: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ enz.) waarvoor het volgende geldt:

1. $0 \equiv (0, 0, \ldots, 0)$ (Het nulelement)
2. $\alpha + \beta \equiv (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ (De som van α en β)
3. $c\alpha \equiv (c\,\alpha_1, c\,\alpha_2, \ldots, c\,\alpha_n)$ c: willekeurig complex getal.
4. $(\alpha, \beta) \equiv \alpha_1 \overline{\beta}_1 + \alpha_2 \overline{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n \overline{\beta}_n$ (Het inwendig product van α en β)

Eenvoudig is aan te tonen dat C^n een n-dimensionale unitaire ruimte is. C^n wordt wel de unitaire n-tupel ruimte genoemd. Dat C^n n-dimensionaal is, volgt uit het feit dat ieder stelsel van n vergelijkingen met n+1 onbekenden een oplossing ($\neq$ de nuloplossing) heeft.

Stelling 4.1

Theorèma van Weyl:

Als R^n een n-dimensionale unitaire ruimte is, en C^n de unitaire n-tupel ruimte, dan geldt

$$R^n \cong C^n \quad .$$

Bewijs: Uit het voorafgaande volgt dat er in R^n een orthonormale verzameling $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bestaat met, voor iedere $x, y \in R^n$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \qquad \alpha_i = (x, u_i)$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \qquad \beta_i = (y, u_i)$$

We definiëren nu de toevoeging:

$$x \longleftrightarrow \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

$$y \longleftrightarrow \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \;,$$

waarbij de α_i en β_i de Fourier coëfficiënten van x en y zijn t.o.v. $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

De toevoeging van $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ aan $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ is zonder meer mogelijk omdat R^n een lineaire ruimte is. De één-eenduidigheid is juist omdat, indien $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' u_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_i') u_i = 0$ $\Longrightarrow \alpha_i = \alpha_i'$.

Verder geldt:

$$x+y \longleftrightarrow \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = \alpha + \beta$$

daar $\gamma_i = (x+y, u_i) = (x, u_i) + (y, u_i) = \alpha_i + \beta_i$

$$0 \longleftrightarrow 0 \qquad \text{daar } (o, u_i) = 0$$

$$cx \longleftrightarrow \alpha' = (\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n') \text{ met } \alpha_i' = (cx, u_i) = c(x, u_i) = c\,\alpha_i$$

$$(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_j (u_i, u_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_i = (\alpha, \beta).$$

Met behulp van deze isomorfe afbeelding van R^n op C^n is het eenvoudig in te zien dat een orthonormale verzameling $u_1, u_2, \ldots, u_k$ maximaal is dan en slechts dan wanneer k=n.

Stel $k < n$, m.b.v. de afbeelding op C^n en weer terug op R^n is in te zien dat er een x_{k+1} bestaat die onafhankelijk van $u_1, u_2, \ldots, u_k$ is, dus ook een u_{k+1} (st.3.2) $k > n$ kan niet, daar er in C^n geen n+1 onafhankelijke elementen zijn. Op deze wijze bewijst men ook de stelling van rechts naar links.

De stelling toont dus aan dat alle n-dimensionale unitaire ruimten in wezen identiek zijn (d.w.z. er bestaat een één-eenduidige afbeelding van de ruimten op elkaar).

5. Lineaire deelruimten

Definitie 5.1

Een lineaire deelruimte M van een von Neumann ruimte R is een deelverzameling van R met de eigenschap:

$$x, y \in M \Longrightarrow \alpha x + \beta y \in M \qquad \alpha, \beta \text{ willekeurige complexe getallen}$$

Definitie 5.2

Een lineaire deelruimte M heet gesloten als deze alle verdichtingspunten bevat.

Opm. M is een volledige metrische ruimte $\Longleftrightarrow$ M is gesloten.

Laat A een deelverzameling van R zijn, en beschouw de collectie van alle lineaire deelruimten die A omvatten (R behoort hiertoe, dus de collectie is niet leeg). De doorsnede van deze ruimte is dan weer een lineaire deelruimte, zoals gemakkelijk is aan te tonen, en wordt genoemd de kleinste l. deelruimte die A omvat, of ook wel de lineaire deelruimte opgespannen door A.

Notatie: $\{A\}$.

Evenzo wordt de kleinste gesloten lineaire deelruimte die A omvat, aangegeven door $[A]$.

$A \subset \{A\} \subset [A]$. Indien A slechts een eindig aantal elementen bevat dan geldt: $\{A\} = [A]$.

Eenvoudig is in te zien dat indien A een deelverzameling van een von Neumann ruimte R is, het volgende geldt:

1. A is een lineaire ruimte $\Longleftrightarrow$ A is een lineaire deelruimte van R.
2. We kunnen de definitie van (x,y) onveranderd op A handhaven.
3. A is volledig $\Longleftrightarrow$ A is gesloten.

Dus een gesloten lineaire deelruimte van een von Neumann ruimte R is zelf een von Neumann ruimte.

Een gesloten lineaire deelruimte M van een n-dimensionale unitaire ruimte R^n is zelf een unitaire ruimte met dimensie $k \leq n$. Is de unitaire ruimte zelf niet eindig dimensionaal dan kan M zowel eindig als niet eindig dimensionaal zijn.

Definitie 5.3

$x \in R$ staat loodrecht op een lineaire deelruimte M indien geldt: $x \perp y$ voor iedere $y \in M$.

Definitie 5.4

M_1, M_2 lineaire deelruimten in R.
M_1 staat loodrecht op M_2 indien geldt: $x \perp y$ voor iedere $x \in M_1$ en iedere $y \in M_2$.

Indien M_1 loodrecht staat op M_2, staat ook M_2 loodrecht op M_1. Dit wordt aangegeven met: $M_1 \perp M_2$.

6. Hilbert ruimte

Definitie 6.1

Een Hilbert ruimte R^∞ is een separabele (d.w.z. er bestaat een rij elementen in R^{∞} : $x_1, x_2, \ldots$ welke overal dicht is in R^{∞}) von Neumann ruimte met willekeurig veel lineair onafhankelijke elementen.

Stelling 6.1

V is een gesloten convexe deelverzameling in een ruimte van Hilbert R^{∞}. $V \neq R^{\infty}$. Bij ieder element $x \in R^{\infty} - V$ bestaat er een element $v^* \in V$ met $\|v^* - x^*\|$ is minimaal.

Bewijs: Voor vereenvoudiging van het schrijfwerk nemen we voor x het nulpunt O. Er bestaat een omgeving van O die geen punten van V bevat, dus $\|v\|$, $v \in V$, heeft een positief infimum δ.
Dus $\exists\, v_1, v_2, \ldots \in V$ zodat $\|v_n\| \longrightarrow \delta$ voor $n \longrightarrow \infty$.

$$\tfrac{1}{4} \|v_m - v_n\|^2 = \tfrac{1}{2} \|v_m\|^2 + \tfrac{1}{2} \|v_n\|^2 - \tfrac{1}{4} \|v_m + v_n\|^2$$

Voor $m, n > N_{\varepsilon}$ is: $\tfrac{1}{2} \|v_m\|^2 \leqslant \tfrac{1}{2} \delta^2 + \tfrac{1}{2} \varepsilon$

$$\tfrac{1}{2} \|v_n\|^2 \leqslant \tfrac{1}{2} \delta^2 + \tfrac{1}{2} \varepsilon \;.$$

en dus: $\tfrac{1}{4} \|v_m - v_n\|^2 \leqslant \delta^2 + \varepsilon - \delta^2 = \varepsilon \,. \Longrightarrow v_1, v_2, \ldots$ is een fundamentaalrij. Omdat V gesloten is, bestaat er een element $v^* \in V$ met $\|v_n - v^*\| \longrightarrow 0$ voor $n \longrightarrow \infty$.
Uit de driehoeksongelijkheid volgt:

$$\big| \|v^*\| - \|v_n\| \big| \leqslant \|v^* - v_n\| \Longrightarrow \|v^*\| = \lim_{n \to \infty} \|v_n\| = \delta .$$

Stelling 6.2

A is een gesloten lineaire (dus convexe) deelruimte van R^{∞}. $A \neq R^{\infty}$. Bij iedere $x \in R^{\infty} - A$ bestaat er dus een $a^* \in A$ met $\|a^* - x\|$ is minimaal.
Te bewijzen: $a^* - x \perp A$.

Bewijs: Noem $a^* - x = w$. Neem een willekeurig element $a \in A$. Voor reële λ is $\|w - \lambda a\|^2$ minimaal voor $\lambda = 0 \Longrightarrow (w,a) + (a,w) = 0 \Longrightarrow$ $\mathrm{Re}(a,w) = 0$. Hetzelfde voor i a geeft: $\mathrm{Re}\; i(a,w) = 0$.

$\therefore$ $(a,w)=0$. Dit geldt voor iedere $a \in A \Longrightarrow w=a^{*}-x \perp A$.

Iedere $x \in R^{\infty}$ kunnen we dus schrijven als: $x=x_1+x_2$ $x_1 \in A$, $x_2 \in \perp A$. Deze ontbinding is ondubbelzinnig.
Stel $x=x_1'+x_2'$, dan: $x_1-x_1'=x_2'-x_2$ $x_1-x_1' \in A$ $x_2'-x_2 \perp A \longrightarrow x_1-x_1'=$

$= x_2'-x_2=0. \Longrightarrow x_1=x_1'$ en $x_2=x_2'$.

Stelling 6.3

A is een gesloten lineaire deelruimte in R^{∞}. De verzameling A' van elementen van R^{∞}, die loodrecht op A staan, is een gesloten lineaire deelruimte in R^{∞}. (A' heet het orthogonale complement van A).

Bewijs: $x,y \in A' \Longrightarrow (\alpha x+\beta y,a)=\alpha(x,a)+\beta(y,a)=0$ voor iedere

$a \in A \Longrightarrow \alpha x+\beta y \in A'$.
Stel $x_1,x_2,\ldots \in A'$ en $\|x-x_i\| \longrightarrow 0$ voor $i \longrightarrow \infty$. Dan geldt voor iedere $a \in A$ en voor iedere i:
$|(x,a)| = |(x-x_i+x_i,a)| = |(x-x_i,a)| \leq \|x-x_i\| \; \|a\| \Longrightarrow (x,a)=0 \Longrightarrow x \in A'$.

Definitie 6.2

Een lineaire functionaal op R^{∞} is een afbeelding die aan iedere $x \in R^{\infty}$ een complex getal $\lambda(x)$ toevoegt met: $\lambda(\alpha x+\beta y)=$ $\alpha\lambda(x)+\beta\lambda(y)$.

Definitie 6.3

Een lineaire functionaal heet begrensd als: $|\lambda(x)| \leq M \|x\|$ voor iedere $x \in R^{\infty}$.

Definitie 6.4

Een lineaire functionaal heet continu in het punt nul als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zodanig dat uit $\|x\| < \delta$ volgt: $|\lambda(x)| < \varepsilon$.
Het is gemakkelijk aan te tonen dat als een functie continu is

in het punt 0, deze functie continu is in ieder punt in R^{∞}.

De equivalentie van begrensdheid en continuïteit is zeer eenvoudig in te zien.

Stelling 6.4

Stelling van F. Riesz

Elke begrensde lineaire functionaal is van de vorm:

$$\lambda(x) = (x,v).$$

Bewijs: A: de verzameling van alle $x \in R^{\infty}$ met $\lambda(x)=0$
A is niet-leeg, lineair en gesloten.
Indien $A=R^{\infty}$ dan voldoet $v=0$, dus stel $A \neq R^{\infty}$, dan bestaat er een vector $w' \perp A$. $\quad w \equiv \dfrac{w'}{\|w'\|}$.

$\lambda(x-\alpha w) = \lambda(x) - \alpha\lambda(w)$ $\qquad$ Stel $\alpha = \dfrac{\lambda(x)}{\lambda(w)}$

$\Longrightarrow x-\alpha w \in A \Longrightarrow (x-\alpha w, w)=0 \Longrightarrow (x,w) - \dfrac{\lambda(x)}{\lambda(w)}(w,w)=0$

$\Longrightarrow \lambda(x) = \lambda(w)\,(x,w) = (x,v)$ $\qquad$ met $v = \overline{\lambda(w)}w$.

Stelling 6.5

Iedere orthonormale verzameling 0 in R^{∞} is òf eindig òf aftelbaar oneindig.
Indien 0 maximaal is, dan is 0 aftelbaar oneindig.

Bewijs: $u,v \in 0$. Dan $(u-v,u-v)=(u,u)-(u,v)-(v,u)+(v,v)=2 \Rightarrow \|u-v\|=\sqrt{2}$.
R^{∞} is separabel $\Rightarrow \exists\, x_1,x_2,\ldots$ overal dicht in R^{∞}. Bij iedere $u \in 0$ bestaat er dus een x_m met $\|u-x_m\| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ terwijl voor u,v de bijbehorende x_m en x_n verschillend zijn, daar anders:
$\|u-v\| = \|u-x_m+x_m-v\| \leq \|u-x_m\| + \|x_m-v\| < \sqrt{2}$ contradictie.
Hieruit volgt het eerste gedeelte van de stelling.

Stel $u_1,u_2,\ldots,u_m$ is een volledige orthonormale verzameling. In R^{∞} bestaan willekeurig veel lineair onafhankelijke elementen. Er is dus een $x \in R^{\infty}$ te vinden, die onafhankelijk is van $u_1,u_2,\ldots,u_m$. M.b.v. het orthogonalisatie-procédé van Schmidt is er een u_{m+1} te construeren die loodrecht staat op $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Dus $u_1, u_2, \ldots, u_m$ is niet volledig. Dit geldt voor iedere m. Dus een volledig stelsel is oneindig.

Stelling 6.6

$u_1, u_2, \ldots$ orthonormaal stelsel in R^∞. $\Longrightarrow$

1. $\|x\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |(x,u_i)|^2$ voor iedere $x \in R^\infty$. (ongelijkheid van Bessel).

2. $\sum_{i=1}^{\infty} (x,u_i)(\overline{y,u_i})$ is voor ieder paar $x,y \in R^\infty$ absoluut convergent.

Bewijs: 1. Laat in St.2.2.: $n \longrightarrow \infty$. Merk op dat (x,u_i) onafhankelijk is van het afkappen bij n.

2. $\{|(x,u_i)| - |(y,u_i)|\}^2 \geqslant 0 \Longrightarrow |(x,u_i)(\overline{y,u_i})| \leqslant \frac{1}{2}|(x,u_i)|^2 + \frac{1}{2}|(y,u_i)|^2 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}(x,u_i)(\overline{y,u_i})$ is absoluut convergent.

Stelling 6.7

$u_1, u_2, \ldots$ orthonormaal stelsel in R^∞. Dan geldt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i \text{ is convergent} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \text{ is convergent.}$$

Bewijs: Voor het aantonen van de convergentie van een reeks, gebruiken we het convergentie-criterium van Cauchy.

$$\Big\| \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i u_i \Big\|^2 = \Big(\sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i u_i, \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i u_i \Big) = \sum_{i=N_1}^{N_2} |\alpha_i|^2.$$

$\Longrightarrow$ Is de ene reeks convergent dan is de andere het ook.

Opm. Indien $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$ dan heet $\alpha_k = (x, u_k)$ de Fourier coëfficiënt (x,u_k) van x.

Stelling 6.8

$u_1, u_2, \ldots$ orthonormaal stelsel in R^∞ $\qquad x \in R^\infty$.

1. $x' = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$ met $\alpha_i \equiv (x,u_i)$ is convergent.

2. $(x-x') \perp u_i \quad (i=1,2,\ldots)$.

Bewijs: 1. Volgt uit St.6.6 en St.6.7.

2. $(x-x',u_i)=(x,u_i)-(x',u_i)= \alpha_i - \alpha_i=0$.

Stelling 6.9

$u_1,u_2,\ldots$ orthonormaal stelsel in een gesloten lineaire deelruimte $M \subset R^{\infty}$.

a. $u_1,u_2,\ldots$ is een volledig stelsel in $M \Longleftrightarrow \begin{cases} 1.\ [u_1,u_2,\ldots]=M \\ \text{of } 2.\ x=\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i \\ \quad \alpha_i \equiv (x,u_i) \\ \quad \text{voor iedere } x \in M. \\ \text{of } 3.\ (x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} (x,u_i)\overline{(y,u_i)} \\ \quad \text{voor ieder paar } x,y \in M. \end{cases}$

Opm: Uiteraard kan $M=R^{\infty}$ worden genomen.

Bewijs: Bewijsschema: $a \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 1 \Longrightarrow a. \quad 3 \Longrightarrow a \qquad 2 \Longrightarrow 3$

$a \Longrightarrow 2$: Voor iedere $x \in M$ geldt: $(x- \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i) \perp u_j \quad (\alpha_i \equiv (x,u_i);$ $i=1,2,\ldots;\ j=1,2,\ldots)$

$$\Longrightarrow x-\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i=0 \text{ daar } u_1,u_2,\ldots \text{ een volledig stelsel is}$$

$$\Longrightarrow x=\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i.$$

$2 \Longrightarrow 1$: Voor iedere $x \in M$ geldt: $x= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i$

$$\in [u_1,u_2,\ldots] \Longrightarrow [u_1,u_2,\ldots] = M.$$

$1 \Longrightarrow a$: Stel $x \in M$ staat loodrecht op $u_1, u_2, \ldots \Longrightarrow x \perp \sum_{i=1}^{N} b_i\, u_i$

voor alle b_i en alle N.

$\Longrightarrow$ x loodrecht op alle opkopingspunten ((x,y) is continu in beide variabelen. Zie opm. onder St: 1.1))

$\Longrightarrow x \perp [u_1, u_2, \ldots] = M. \Longrightarrow (x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow u_1, u_2, \ldots$ is een volledig stelsel in M.

$3 \Longrightarrow a$: Stel $x \perp u_i$ $(i=1,2,\ldots)$. Neem in 3. $y = x \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow u_1, u_2, \ldots$ is een volledig stelsel.

$2 \Longrightarrow 3$: $$(x,y) = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{N} (x,u_i)u_i, \sum_{i=1}^{N} (y,u_i)u_i \right) =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{i,j=1}^{N} (x,u_i)\overline{(y,u_j)}(u_i,u_j) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} (x,u_i)\overline{(y,u_j)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (x,u_i)\overline{(y,u_i)}.$$

<u>Stelling 6.10</u>

Met iedere rij $x_1, x_2, \ldots$ in R^∞ correspondeert een orthonormale rij $u_1, u_2, \ldots$ (eindig of oneindig) en $\{x_1, x_2, \ldots\} = \{u_1, u_2, \ldots\}$.

<u>Bewijs</u>: Vervang $x_1, x_2, \ldots$ door de lineair onafhankelijke verzameling $y_1, y_2, \ldots$ met $\{x_1, x_2, \ldots\} = \{y_1, y_2, \ldots\}$. Met het orthogonalisatie-proces van Schmidt construeren we de rij $u_1, u_2, \ldots$ met $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 0$ $i \neq j$, $=1$ $i = j$).
Daar we de y's in de u's kunnen uitdrukken en omgekeerd geldt $\{y_1, y_2, \ldots\} = \{u_1, u_2, \ldots\}$ en dus ook $\{x_1, x_2, \ldots\} = \{u_1, u_2, \ldots\}$.
Ook geldt: $[x_1, x_2, \ldots] = [u_1, u_2, \ldots]$.

<u>Stelling 6.11</u>

M is een gesloten lineaire deelruimte in R^∞.
Er bestaat een volledig orthonormaal stelsel $u_1, u_2, \ldots$ in M.

Bewijs: R^{∞} is separabel $\Longrightarrow$ M is separabel, dus er bestaat een rij $x_1, x_2, \ldots$ overal dicht in M $\Longrightarrow$ Er bestaat een orthonormaal stelsel $u_1, u_2, \ldots$ in M (St.6.10) en $[u_1, u_2, \ldots] = [x_1, x_2, \ldots] = M$, dus het stelsel is volledig.

Definitie 6.5

l^2: verzameling van rijen complexe getallen (aangegeven met: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots)$ enz.) met $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$.

We definiëren:
1. Nulelement: $0 = (0, 0, \ldots)$
2. Som: $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots)$
3. Vermenigvuldiging met een complex getal c:

$$c\alpha = (c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots)$$

4. Inwendig product: $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i$.

l^2 is een Hilbert ruimte en wordt de authentieke ruimte van Hilbert genoemd en is door Hilbert zelf ontworpen.

Dat l^2 een Hilbert ruimte is, kan men eenvoudig bewijzen, daar de volgende beweringen gemakkelijk in te zien zijn:

1. $|(\alpha, \beta)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \, |\beta_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^2} < \infty$
2. De elementen $u_i = (0, 0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots)$ zijn lineair onafhankelijk en onderling loodrecht.
3. l^2 is volledig. (Zie voorbeeld onder def.1.3.)
4. Er bestaat in l^2 een overal dichte rij (Aftelbare verzameling van aftelbare verzamelingen is zelf weer aftelbaar).

Stelling 6.12

Stelling van von Neumann

R^{∞} is een willekeurige Hilbert ruimte. Dan geldt:

$$R^{\infty} \cong l^2 .$$

D.w.z. indien we definiëren de één-eenduidige afbeeldingen: $x \longleftrightarrow \alpha$ en $y \longleftrightarrow \beta$, dan geldt:

1. $x+y \longleftrightarrow \alpha+\beta$
2. $cx \longleftrightarrow c\alpha$
3. $(x,y) = (\alpha,\beta)$

Bewijs: In R^∞ bestaat een maximaal orthonormaal stelsel: $u_1, u_2, \ldots$

$\Longrightarrow$ Iedere $x \in R^\infty$ is te schrijven als $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i \quad (\alpha_i = (x,u_i)) \Longrightarrow$

Bij iedere x behoort een $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ met $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$

(ongelijkheid van Bessel). Het omgekeerde geldt ook (zie st.6.9). Deze afbeelding is één-eenduidig. Het bewijs van 1. en 2. is triviaal. Met de gelijkheid van Parseval vinden we:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} (x,u_i)\overline{(y,u_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i = (\alpha,\beta)$$

Uit deze stelling van von Neumann volgt dat alle Hilbert ruimten isomorf zijn. D.w.z. formeel zijn alle Hilbert ruimten identiek, verschil krijgen we door de verschillende interpretatie van de elementen.

Tot slot nog een voorbeeld, dat in hoofdstuk V van Robinson nader uitgewerkt wordt.
L^2 is de Hilbert ruimte bestaande uit alle meetbare, complexe functies f(w) gedefinieerd op (Ω, F, μ) en waarvoor geldt:

$$\int_\Omega |f(w)|^2 \mu(dw) < \infty \quad .$$

Twee functies f(w) en g(w) heten identiek, als f(w)=g(w) uitgezonderd op een verzameling van de μ-maat nul. Het nulelement is de klasse van functies die bijna overal nul zijn. Het inwendig product is gedefinieerd door:

$$(f,g) = \int_\Omega f(w)\overline{g(w)}\, \mu(dw).$$

Beschouwen we $\mathbf{L}_2(-\infty,+\infty)$ dan vormen:

$$\varphi_k(t)=(-1)^k e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^k}{dt^k} e^{-t^2} = H_k(t)\ e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

($H_k(t)$ is een polynoom van de graad k en wordt het k^{de} polynoom van Tschebyschew-Hermite genoemd) een volledig orthogonaal stelsel. (Uitgebreide behandeling in [9]).

Literatuur

[1] E.A. Robinson: An introduction to infinitely many variates. Charles Griffin & Co., London.

[2] J.von Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Dover Publications, New York.

[3] P.R. Halmos: Introduction to Hilbert space and the theory of Spectral Multiplicity. Chelsea Publishing Company, New York.

[4] B. v.Sz. Nagy: Ergebnisse der Mathematik III. Springer Verlag, Berlin.

[5] W. Schmeidler: Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum, Teubner, Stuttgart.

[6] A.C. Zaanen: Introduction to the theory of Integration. Noord Hollandse Uitgeversmij. A'dam.

[7] P. Jordan and J.von Neumann: On inner products in linear metric spaces. Annals of Math. 36 (1935), 719-723.

[8] M. Fréchet: Sur la définition axiomatique d'une classe d'espace vectoriels distancié's applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert. Annals of Math. 36 (1935) 705-718.

[9] N.I. Achieser und I.M. Glasmann: Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum. Akademie-Verlag, Berlin.