

Gleichverteilte Folgen in lokal kompakten Räumen

Herrn J. F. KOKSMA zum 60. Geburtstag gewidmet

Von

GILBERT HELMBERG

Einleitung

Für eine gegebene Folge $\xi = \{x_n\}$ in $[0, \infty[$ und beliebige nichtnegative Zahlen a, b ($0 \leq a < b \leq \infty$) sei $\chi_{[a, b]}$ die charakteristische Funktion des Intervalles $[a, b]$ und $A(\xi; a, b; N)$ definiert durch

$$A(\xi; a, b; N) = \sum_{n=1}^N \chi_{[a, b]}(x_n).$$

Bekanntlich heißt eine Folge ξ in $[0, 1[$ in diesem Intervall *gleichverteilt* (glv.), wenn

$$(1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(\xi; a, b; N)}{N} = b - a \quad \text{für alle } a, b \quad (0 \leq a < b \leq 1)$$

gilt.

Es seien für ein beliebiges abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ($0 \leq a < b \leq \infty$) mit $C([a, b])$, $R([a, b])$ und $R^+([a, b])$ beziehungsweise die Mengen aller komplexwertigen, reellwertigen, und nichtnegativen reellwertigen stetigen Funktionen auf $[a, b]$ bezeichnet. Für $b = \infty$ verlangen wir dabei für eine Funktion f aus einer dieser Mengen die Existenz des endlichen Grenzwertes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Eine Folge ξ in $[0, 1[$ ist genau dann glv. in diesem Intervall, wenn

$$(2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{für alle } f \in C([0, 1])$$

gilt. Dies erklärt gleichzeitig die – zumindest theoretische – Bedeutung gleichverteilter Folgen für die Approximation von Integralen.

Bei gegebener Folge ξ in $[0, \infty[$ kann (1) schon deshalb nicht für alle a, b ($0 \leq a < b < \infty$) gelten, weil stets $A(\xi; a, b; N) \leq N$ ist. Ist jedoch $\xi = \{x_n\}$ glv. in $[0, 1[$ und ist bei gegebenem $c > 0$ die Folge $\{y_n\} = \{cx_n\}$, dann gilt, wie man leicht einsieht,

$$(1') \quad \lim_{N \rightarrow \infty} c \frac{A(\eta; a, b; N)}{N} = b - a \quad \text{für alle } a, b \quad (0 \leq a < b \leq c).$$

Diese Beziehung ist wieder gleichwertig mit

$$(2') \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N c f(y_n) = \int_0^c f(x) dx \quad \text{für alle } f \in C([0, c]).$$

Diese Überlegungen sind aber offenbar unzureichend, wenn die Integration nicht auf ein festes Intervall $[0, c]$ beschränkt bleiben soll, d.h. wenn mit Hilfe einer einzigen Folge $\{x_n\}$ für beliebiges $c > 0$ und jede beliebige Funktion $f \in C([0, c])$ das Integral

$$\int_0^c f(x) dx$$

aus den Funktionswerten $f(x_n)$ in ähnlicher Weise wie in (2') berechnet werden soll. Dieses Ziel läßt sich jedoch bei geeigneter Abänderung des in (2') verwendeten Summationsverfahrens tatsächlich erreichen, und zwar durch Einführung eines neuen, mit dem Lebesgueschen Maß dx äquivalenten normierten Maßes $d\varphi$ auf $[0, \infty[$ mit positiver und stetiger Radon-Nikodym-Ableitung $d\varphi/dx$. Im ersten Teil der vorliegenden Notiz werden Verteilungseigenschaften einer Folge in $[0, \infty[$ bezüglich der neu eingeführten Summationsmethode untersucht, die wie im Falle der Gleichverteilung in $[0, 1[$ auf die spezielle Struktur der Zahlengeraden Bezug nehmen. Auf Fragestellungen, die auch für Folgen in allgemeinen lokal kompakten Räumen sinnvoll bleiben, wird im zweiten Teil eingegangen.

I. Folgen in $[0, \infty[$

1. Gleichverteilung bezüglich stetiger Verteilungsfunktionen

Unter einer *Verteilungsfunktion* auf dem Intervall $[a, b]$ ($0 \leq a < b \leq \infty$) verstehen wir im folgenden immer eine nichtnegativwertige, monoton im engeren Sinn steigende stetige Funktion φ auf $[a, b]$, für die $\varphi(a) = 0$ und $\varphi(b) = 1$ gilt (für $b = +\infty$ verlangen wir $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 1$). Mit φ^{-1} bezeichnen wir die auf $[0, 1]$ (bzw. $[0, 1[$) definierte Umkehrfunktion von φ , d.h.

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) = x \quad \text{für } a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Für $\varphi(x) = 1 - e^{-x}$ auf $[0, \infty[$ ist also φ^{-1} auf $[0, 1[$ definiert durch $\varphi^{-1}(y) = -\log(1 - y)$.

Bereits SCHOENBERG [12] hat Gleichverteilung von Folgen bezüglich einer Verteilungsfunktion auf $[0, 1]$ definiert. VAN DER CORPUT [2] untersucht Verteilungseigenschaften von Folgen in $[0, \infty[$ und HLAWKA [7] behandelte ähnliche Fragen in kompakten topologischen Räumen. Die folgenden, allerdings nur einige spezielle Fragen betreffenden Überlegungen beziehen ihre Anregungen aus diesen und noch zu erwähnenden Arbeiten. Wir beschränken uns dabei auf Folgen in $[0, \infty[$; Folgen in $] -\infty, +\infty[$ können in analoger Weise behandelt werden.

Definition 1. Es sei φ eine Verteilungsfunktion auf $[0, \infty[$. Eine Folge ξ in $[0, \infty[$ heißt $d\varphi$ -glv. in $[0, \infty[$, wenn

$$(3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(\xi; a, b; N)}{N} = \varphi(b) - \varphi(a) \quad \text{für alle } a, b \ (0 \leq a < b \leq \infty)$$

gilt.

Das Differential $d\varphi$ soll hierbei das durch φ auf $[0, \infty[$ definierte Lebesgue-Stieltjes-Maß andeuten (vgl. [5] §15 (9)). $d\varphi$ -Gleichverteilung der Folge ξ kann wieder mit Hilfe des Riemann-Stieltjes-Integrales bezüglich φ auf $C([0, \infty])$ charakterisiert werden. Der Beweis verläuft in den üblichen Bahnen und soll der Vollständigkeit halber kurz angeführt werden. Das Integral

$$\int_0^\infty f(x) d\varphi(x)$$

einer Funktion $f \in C([0, \infty])$ kann hierbei sowohl als uneigentliches Riemann-Stieltjes-Integral als auch (mit gleichem Recht) als eigentliches Riemann-Stieltjes-Integral über $[0, \infty]$ aufgefaßt werden. Dabei wird $+\infty$ als Zerlegungspunkt zugelassen, $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\varphi(\infty) = 1$ definiert und von den Zerlegungsfolgen $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = \infty$ verlangt, daß $\max\{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i); 1 \leq i \leq n-1\}$ gegen 0 geht.

Satz 1. Die Folge $\xi = \{x_n\}$ ist dann und nur dann $d\varphi$ -glv. in $[0, \infty[$, wenn

$$(4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^\infty f(x) d\varphi(x) \quad \text{für alle } f \in C([0, \infty])$$

gilt.

Beweis. Es sei (3) erfüllt und $f \in R^+([0, \infty])$ (es genügt, solche Funktionen zu betrachten) sowie $\varepsilon > 0$ gegeben. Die Funktion f kann durch eine endliche Linearkombination g von charakteristischen Funktionen $\chi_{[a_i, a_{i+1}[}$ ($0 = a_1 < a_2 < \dots < a_{k-1} < a_k = \infty$) bis auf ε gleichmäßig approximiert werden. Dann folgt (4) aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_0^\infty f(x) d\varphi(x) \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(x_n) - g(x_n)| + \\ &+ \left| \int_0^\infty |g(x) - f(x)| d\varphi(x) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x_n) - \int_0^\infty g(x) d\varphi(x) \right| \end{aligned}$$

und der Tatsache, daß der letzte Term rechts wegen (3) für wachsendes N beliebig klein wird.

Ist umgekehrt (4) erfüllt und a, b ($0 \leq a < b \leq \infty$) sowie $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existieren Funktionen $f_1, f_2 \in R^+([0, \infty])$ derart, daß

$$f_1 \leq \chi_{[a, b[} \leq f_2 \quad \text{und} \quad \int_0^\infty [f_2(x) - f_1(x)] d\varphi(x) < \varepsilon$$

gilt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\varphi(b) - \varphi(a) - \varepsilon &= \int_0^{\infty} \chi_{[a, b[}(x) d\varphi(x) - \varepsilon \leq \int_0^{\infty} f_1(x) d\varphi(x) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_1(x_n) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{A(\xi; a, b; N)}{N} \\ \varphi(b) - \varphi(a) + \varepsilon &= \int_0^{\infty} \chi_{[a, b[}(x) d\varphi(x) + \varepsilon \geq \int_0^{\infty} f_2(x) d\varphi(x) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_2(x_n) \geq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{A(\xi; a, b; N)}{N}\end{aligned}$$

und somit (3).

Wir schließen an den Beweis von Satz 1 folgende einfache Bemerkungen an:

1. In (3) kann „für alle a, b ($0 \leq a < b \leq \infty$)“ ersetzt werden durch „für alle a, b ($0 \leq a < b < \infty$)“ oder „für $a=0$ und alle b ($0 < b < \infty$)“.

2. In (4) kann $C([0, \infty])$ ersetzt werden durch $R([0, \infty])$, $R^+([0, \infty])$, durch die Menge $L([0, \infty])$ aller Funktionen in $C([0, \infty])$ mit kompaktem Träger, oder durch $L^+([0, \infty]) = R^+([0, \infty]) \cap L([0, \infty])$.

3. Eine reellwertige Funktion f auf $[0, \infty[$ heiße *R-integrierbar* auf $[0, \infty[$, wenn sie auf $[0, \infty[$ beschränkt ist und die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen das Lebesguesche Maß 0 besitzt (es ist für unsere Zwecke einfacher, wenn wir die Integrierbarkeit von f über $[0, \infty[$ im üblichen Lebesgueschen Sinne dabei außer Betracht lassen). Die Funktion f ist dann auf $[0, \infty]$ bezüglich φ Riemann-Stieltjes-integrierbar, falls φ absolut stetig ist. Ist auch φ^{-1} absolut stetig, dann ist eine gleichwertige Definition die folgende: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es zwei Funktionen $f_1, f_2 \in R([0, \infty])$ derart, daß

$$f_1 \leq f \leq f_2 \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} [f_2(x) - f_1(x)] d\varphi(x) < \varepsilon$$

gilt. In (4) kann dann „für alle $f \in C([0, \infty])$ “ ersetzt werden durch „für alle auf $[0, \infty[$ *R-integrierbaren* Funktionen f “.

Zwischen $d\varphi$ -glv. Folgen in $[0, \infty[$ und glv. Folgen in $[0, 1[$ besteht ein einfacher Zusammenhang (vgl. [12] 15.):

Satz 2. *Es sei φ eine Verteilungsfunktion auf $[0, \infty[$. Die Folge $\xi = \{x_n\}$ ist genau dann $d\varphi$ -glv. in $[0, \infty[$, wenn die Folge $\eta = \varphi \circ \xi = \{\varphi(x_n)\}$ in $[0, 1[$ glv. ist.*

Beweis. Es sei ξ $d\varphi$ -glv. in $[0, \infty[$ und $g \in C([0, 1])$. Dann gilt $f = g \circ \varphi \in C([0, \infty])$ und

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(y) dy &= \int_0^1 f \circ \varphi^{-1}(y) dy = \int_0^{\infty} f(x) d\varphi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\varphi(x_n)).\end{aligned}$$

Ist umgekehrt η glv. in $[0, 1[$ und $f \in C([0, \infty])$, dann gilt $g = f \circ \varphi^{-1} \in C([0, 1])$ und

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) d\varphi(x) &= \int_0^\infty g \circ \varphi(x) d\varphi(x) = \int_0^1 g(y) dy \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\varphi(x_n)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n). \end{aligned}$$

Ist also $\eta = \{y_n\}$ eine glv. Folge in $[0, 1[$, dann ist $\xi = \varphi^{-1} \circ \eta = \{\varphi^{-1}(y_n)\}$ $d\varphi$ -glv. in $[0, \infty[$ und der Übergang von η zu $\varphi^{-1} \circ \eta$ liefert sämtliche $d\varphi$ -glv. Folgen in $[0, \infty[$.

2. Diskrepanz bezüglich einer Verteilungsfunktion auf $[0, \infty[$

In der Theorie der Gleichverteilung wird die *Diskrepanz* $D(\eta, N)$ einer Folge $\eta = \{y_n\}$ in $[0, 1[$ folgendermaßen definiert:

$$(5) \quad D(\eta, N) = \sup_{0 \leq a < b \leq 1} \left| \frac{A(\eta; a, b; N)}{N} - (b - a) \right|.$$

Bekanntlich ist η genau dann glv. in $[0, 1[$, wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D(\eta, N) = 0$$

gilt. (WEYL [13]).

Ist φ eine Verteilungsfunktion auf $[0, \infty[$ und setzen wir für $0 \leq a < b \leq 1$ $a' = \varphi^{-1}(a)$, $b' = \varphi^{-1}(b)$ ($= \infty$ für $b = 1$) und $\xi = \varphi^{-1} \circ \eta = \{\varphi^{-1}(y_n)\}$, dann gilt

$$A(\eta; a, b; N) = A(\xi; a', b'; N).$$

Definieren wir also

$$(6) \quad D_\varphi(\xi, N) = \sup_{0 \leq a < b \leq \infty} \left| \frac{A(\xi; a, b; N)}{N} - [\varphi(b) - \varphi(a)] \right|,$$

so folgt

$$(7) \quad D(\eta, N) = D_\varphi(\varphi^{-1} \circ \eta, N)$$

(vgl. [8] Satz 7). Damit erhalten wir das folgende, natürlich auch leicht direkt zu beweisende Ergebnis, das auch zum Beweis von Satz 2 hätte verwendet werden können.

Satz 3. Die Folge $\xi = \{x_n\}$ ist genau dann $d\varphi$ -glv. in $[0, \infty[$, wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_\varphi(\xi, N) = 0.$$

Die Bedeutung der Diskrepanz wird auch durch einen Satz von KOKSMA [11] aufgezeigt (s. auch [9], [10]), den wir in einer etwas verallgemeinerten Formulierung wiedergeben. Wir folgen dabei einer von Prof. KOKSMA im Januar 1964 am Mathematischen Zentrum in Amsterdam vorgetragenen Fassung des Beweises.

Satz 4. Es sei φ eine Verteilungsfunktion und f eine reellwertige Funktion mit beschränkter Schwankung $V(f)$ auf dem festen Intervall $[a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$). Es sei $\xi = \{x_n\}$ eine Folge in $[a, b[$ und

$$D_\varphi(\xi, N) = \sup_{a \leq x < y \leq b} \left| \frac{A(\xi; x, y; N)}{N} - [\varphi(y) - \varphi(x)] \right|.$$

Dann gilt

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_a^b f(x) d\varphi(x) \right| \leq V(f) \cdot D_\varphi(\xi, N) \quad \text{für alle } N \geq 1.$$

Beweis. Bei gegebenem, festen N können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a = x_0$, $b = x_{N+1}$ setzen und die ersten N Folgenglieder so umnumerieren, daß $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq b = x_{N+1}$ gilt. Dann gilt weiter

$$\begin{aligned} N \int_a^b f(x) d\varphi(x) - \sum_{n=1}^N f(x_n) &= N f(x) \varphi(x) \Big|_a^b - N \int_a^b \varphi(x) df(x) - \sum_{n=1}^N f(x_n) \\ &= N f(b) - \sum_{n=1}^N f(x_n) - N \int_a^b \varphi(x) df(x) \\ &= \sum_{n=0}^N n [f(x_{n+1}) - f(x_n)] - \sum_{n=0}^N N \int_{x_n}^{x_{n+1}} \varphi(x) df(x) \\ &= \sum_{n=0}^N \int_{x_n}^{x_{n+1}} [n - N \varphi(x)] df(x). \end{aligned}$$

Im Intervall $[x_n, x_{n+1}]$ gilt

$$|n - N \varphi(x)| = |A(\xi; a, x; N) - N \varphi(x)| \leq N \cdot D_\varphi(\xi, N)$$

(hierbei können „Intervalle“ mit $x_n = x_{n+1}$ außer Betracht bleiben). Da φ stetig ist, gilt die Ungleichung $|n - N \varphi(x)| \leq N \cdot D_\varphi(\xi, N)$ im abgeschlossenen Intervall $[x_n, x_{n+1}]$. Bezeichnen wir die Schwankung von f in diesem Intervall mit $V_{[x_n, x_{n+1}]}(f)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| N \int_a^b f(x) d\varphi(x) - \sum_{n=1}^N f(x_n) \right| &\leq N \cdot D_\varphi(\xi, N) \sum_{n=0}^N V_{[x_n, x_{n+1}]}(f) \\ &= N \cdot D_\varphi(\xi, N) \cdot V(f). \end{aligned}$$

3. Verteilungsfunktionen mit positiver stetiger Ableitung

Es sei eine Funktion $h \in R^+([0, \infty])$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

$$(8) \quad \begin{cases} h(x) > 0 & \text{für alle } x \in [0, \infty[, \\ \int_0^\infty h(x) dx = 1. \end{cases}$$

Dann ist

$$\varphi(x) = \int_0^x h(t) dt$$

eine Verteilungsfunktion auf $[0, \infty[$ und $d\varphi = h dx$. Umgekehrt läßt sich jede stetig differenzierbare Verteilungsfunktion φ mit positiver Ableitung auf $[0, \infty[$ in dieser Weise erhalten. Beispielsweise führt die Funktion $h(x) = e^{-x}$ auf die Verteilungsfunktion $\varphi(x) = 1 - e^{-x}$.

Ist also eine Folge $\xi = \{x_n\}$ $h dx$ -glv. in $[0, \infty[$, dann gilt

$$(9) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x_n) = \int_0^{\infty} g(x) h(x) dx$$

für alle R -integrierbaren Funktionen g auf $[0, \infty[$. Ist eine reellwertige Funktion f auf $[0, \infty[$ R -integrierbar und $0(h(x))$ für $x \rightarrow \infty$ (also auch Lebesgue-integrierbar auf $[0, \infty[$), dann ist wegen der Stetigkeit der nirgends verschwindenden Funktion h die Funktion $g = f/h$ auf $[0, \infty[$ R -integrierbar. Aus (9) folgt daher

$$(10) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

für alle R -integrierbaren Funktionen f auf $[0, \infty[$, die $0(h(x))$ sind. Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir künftig mit $S(h(x))$.

Andrerseits gilt $f \in L([0, \infty[)$ genau dann, wenn $g = f/h \in L([0, \infty[)$. Bereits aus der Gültigkeit von (10) für alle $f \in L([0, \infty[)$ folgt also die Gültigkeit von (9) für alle $g \in L([0, \infty[)$ und nach Satz 1, Bemerkung 2, die $h dx$ -Gleichverteilung der Folge ξ . Wir erhalten also folgenden Satz:

Satz 5. *Es sei $h \in R^+([0, \infty[)$ wie in (8). Eine Folge $\xi = \{x_n\}$ ist genau dann $h dx$ -glv. in $[0, \infty[$, wenn*

$$(11) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_0^{\infty} f(x) dx \quad \text{für alle } f \in S(h(x)).$$

Hierbei kann $S(h(x))$ ersetzt werden durch $L([0, \infty[)$ oder $L^+([0, \infty[)$.

Wir wenden dies auf die Funktion $h(x) = e^{-x}$ und $\varphi(x) = 1 - e^{-x}$ an. Um eine in $[0, \infty[$ $h dx$ -glv. Folge $\xi = \{x_n\}$ zu erhalten, gehen wir von einer in $[0, 1]$ glv. Folge $\eta = \{y_n\}$ aus. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $y_n \neq 0$ für alle n gilt (andernfalls können wir durch Streichung aller Nullen in η stets eine glv. Folge dieser Art erhalten). Dann ist auch die Folge $\eta' = \{1 - y_n\}$ glv. in $[0, 1[$ und $1 - y_n \neq 1$ für alle n . Nach der auf Satz 2 folgenden Bemerkung ist die Folge $\xi = \varphi^{-1}(\eta') = \{-\log y_n\}$ $h dx$ -glv. in $[0, \infty[$. Wegen $h(x_n) = y_n$ und der Umkehrbarkeit aller Schritte erhalten wir folgendes Ergebnis:

Korollar 5.1. *Ist die Folge $\eta = \{y_n\}$ glv. in $]0, 1]$, dann gilt*

$$(12) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(-\log y_n)}{y_n} = \int_0^{\infty} f(x) dx \quad \text{für alle } f \in S(e^{-x}).$$

Ist $\eta = \{y_n\}$ eine Folge in $]0, 1]$ und gilt (12) für alle $f \in L([0, \infty[)$, dann ist η glv. in $]0, 1]$.

Setzen wir in (10) $f = \chi_{[a, b[}$ ($0 \leq a < b < \infty$), dann erhalten wir für eine in $[0, \infty[$ h dx -glv. Folge $\xi = \{x_n\}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\chi_{[a, b[}(x_n)}{h(x_n)} = b - a \quad \text{für alle } a, b \text{ } (0 \leq a < b < \infty).$$

Dies führt zu einer Charakterisierung h dx -gleichverteilter Folgen in $[0, \infty[$ analog zu Definition 1:

Satz 6. Es sei $\xi = \{x_n\}$ eine Folge in $[0, \infty[$ und $h \in R^+([0, \infty])$ wie in (8). Für $0 \leq a < b < \infty$ sei $B_h(\xi; a, b; N)$ definiert durch

$$B_h(\xi; a, b; N) = \sum_{n=1}^N \frac{\chi_{[a, b[}(x_n)}{h(x_n)}.$$

Die Folge ξ ist genau dann h dx -glv. in $[0, \infty[$, wenn

$$(13) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B_h(\xi; a, b; N)}{N} = b - a \quad \text{für alle } a, b \text{ } (0 \leq a < b < \infty)$$

gilt.

Beweis. Nach Satz 5 brauchen wir nur nachzuweisen, daß (10) für alle $f \in L^+([0, \infty])$ gilt. Ist $f(x) = 0$ für alle $x \geq c \geq 1$ und $m = \inf\{h(x) : 0 \leq x \leq c\}$, dann gibt es bei gegebenem $\varepsilon > 0$ eine endliche (nichtnegative) Linearkombination g charakteristischer Funktionen $\chi_{[a_i, a_{i+1}[}$ ($0 = a_1 < a_2 < \dots < a_{k-1} < a_k = c$) derart, daß

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{c} \min(1, m)$$

gilt. Wie im Beweis von Satz 1 folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} - \int_0^\infty f(x) dx \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{h(x_n)} + \\ &+ \int_0^c |f(x) - g(x)| dx + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{g(x_n)}{h(x_n)} - \int_0^\infty g(x) dx \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n=1}^N \frac{m \chi_{[0, c[}(x_n)}{h(x_n)} + \frac{\varepsilon}{c} \cdot c + \varepsilon \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

für hinreichend großes N .

4. Diskrepanz-Sätze

Die Güte der Approximation in (11) kann für bestimmte Funktionen f mittels der Diskrepanz der Folge $\{x_n\}$ abgeschätzt werden. Der folgende Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 4.

Satz 7. Es sei $h \in R^+([0, \infty])$ wie in (8) und

$$\varphi(x) = \int_0^x h(t) dt \quad \text{für } x \geq 0.$$

Ferner sei $\xi = \{x_n\}$ eine Folge in $[0, \infty[$, f eine reellwertige Funktion auf $[0, \infty[$ und f/h auf $[0, \infty[$ von beschränkter Schwankung $V(f/h)$. Dann gilt

$$(14) \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} - \int_0^\infty f(x) dx \right| \leq V\left(\frac{f}{h}\right) D_\varphi(\xi, N) \quad \text{für alle } N \geq 1.$$

Wir bemerken, daß unter den angegebenen Voraussetzungen die Funktion f/h bezüglich der Verteilungsfunktion φ über $[0, \infty[$ Riemann-Stieltjes-integrierbar ist; das angeschriebene Integral ist also definiert und endlich.

Für den Spezialfall $h(x) = e^{-x}$ erhalten wir unter Berücksichtigung von (7) folgendes Korollar (die Folgen $\{y_n\}$ und $\{1 - y_n\}$ in $]0, 1[$ haben gleiche Diskrepanz):

Korollar 7.1. *Es sei f eine reellwertige Funktion auf $[0, \infty[$ und $e^x f$ auf $[0, \infty[$ von beschränkter Schwankung $V(e^x f)$. Ist $\eta = \{y_n\}$ eine beliebige Folge in $]0, 1[$, dann gilt*

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(-\log y_n)}{y_n} - \int_0^\infty f(x) dx \right| < V(e^x f) \cdot D(\eta, N) \quad \text{für alle } N \geq 1.$$

Satz 5 und Satz 7 können insbesondere zur Berechnung von Integralen über beliebige endliche Intervalle $[a, b]$ verwendet werden, wenn f durch $f \cdot \chi_{[a, b]}$ ersetzt wird. Es ist aber unbefriedigend, daß in (14) nicht die Schwankung von f sondern die Schwankung von f/h eingeht, und daß die Diskrepanz $D_\varphi(\xi, N)$ mittels der Differenzen

$$\left| \frac{A(\xi; a, b; N)}{N} - [\varphi(b) - \varphi(a)] \right|$$

gebildet wird, nicht aber mittels der nach Satz 6 eigentlich näher liegenden Differenzen

$$(15) \quad \left| \frac{B_h(\xi; a, b; N)}{N} - (b - a) \right|.$$

Allerdings wäre es sinnlos, das supremum der Ausdrücke in (15) über alle a, b ($0 \leq a < b < \infty$) zu nehmen, da dieses wegen der Beschränktheit von $B_h(\xi; a, b; N)$ stets unendlich ist. Wir definieren also zunächst für jedes feste $c > 0$

$$E_h(\xi, N, c) = \sup_{0 \leq a < b \leq c} \left| \frac{B_h(\xi; a, b; N)}{N} - (b - a) \right|.$$

Satz 8. *Es sei $h \in R^+([0, \infty[)$ wie in (8). Die Folge $\xi = \{x_n\}$ ist genau dann h dx-glv. in $[0, \infty[$, wenn*

$$(16) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E_h(\xi, N, c) = 0 \quad \text{für alle } c > 0$$

gilt.

Beweis. Ist (16) erfüllt, dann gilt (13) und nach Satz 6 ist ξ h dx -glv. in $[0, \infty[$. Wir setzen nun umgekehrt die Gültigkeit von (13) voraus, geben $c > 0$ und die natürliche Zahl m vor und wählen N_0 derart, daß

$$\left| \frac{B_h\left(\xi; \frac{kc}{m}, \frac{(k+1)c}{m}; N\right)}{N} - \frac{c}{m} \right| \leq \frac{1}{m^2} \quad \text{für alle } N \geq N_0 \text{ und } 0 \leq k \leq m-1.$$

Es seien a, b ($0 \leq a < b \leq c$) beliebig gegeben und

$$\frac{k_a c}{m} \leq a < \frac{(k_a + 1)c}{m},$$

$$\frac{(k_b - 1)c}{m} < b \leq \frac{k_b c}{m}.$$

Dann folgt (mit trivialen Änderungen für $a = \frac{k_a c}{m}$ oder $b = \frac{k_b c}{m}$)

$$\begin{aligned} \left| \frac{B_h(\xi; a, b; N)}{N} - (b-a) \right| &\leq \left| \frac{B_h\left(\xi; \frac{k_a c}{m}, \frac{k_b c}{m}; N\right)}{N} - \frac{(k_b - k_a)c}{m} \right| + \\ &\quad + \frac{B_h\left(\xi; \frac{k_a c}{m}, a; N\right)}{N} + \frac{B_h\left(\xi; b, \frac{k_b c}{m}; N\right)}{N} + \\ &\quad + \left(a - \frac{k_a c}{m}\right) + \left(\frac{k_b c}{m} - b\right) \\ &\leq \frac{1}{m} + 2 \cdot \left(\frac{1}{m^2} + \frac{c}{m}\right) + 2 \frac{c}{m} \quad \text{für alle } N \geq N_0. \end{aligned}$$

Ist m so groß gewählt worden, daß der letzte Ausdruck kleiner als ε ist, dann gilt $E_h(\xi; N, c) \leq \varepsilon$ für alle $N \geq N_0$. Damit ist (16) bewiesen.

Ist f eine komplexwertige Funktion auf $[0, \infty[$, dann heißt die abgeschlossene Hülle der Menge $\{x \in [0, \infty[: f(x) \neq 0\}$ bekanntlich der Träger von f .

Satz 9. Es sei $h \in R^+([0, \infty])$ wie in (8) und $\xi = \{x_n\}$ eine Folge in $[0, \infty[$. Ferner sei f eine reellwertige Funktion auf $[0, \infty[$, deren Träger in $[0, c[$ enthalten ist und die auf $[0, c[$ von beschränkter Schwankung $V(f)$ ist. Dann gilt

$$(17) \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} - \int_0^c f(x) dx \right| \leq V(f) E_h(\xi, N, c) \quad \text{für alle } N \geq 1.$$

Beweis. Durch Umbenennung der $N' = A(\xi; 0, c; N)$ in $[0, c[$ liegenden Folgenglieder x_n ($1 \leq n \leq N$) setzen wir wie im Beweis von Satz 4 $0 = x'_0 \leq x'_1 \leq$

$x'_2 \leq \dots \leq x'_{N'} < x'_{N'+1} = c$ und schließen unter Berücksichtigung von $f(c) = 0$

$$\begin{aligned} N \int_0^c f(x) dx - \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} &= N f(x) \Big|_0^c - N \int_0^c x df(x) - \sum_{n=1}^{N'} \frac{f(x'_n)}{h(x'_n)} \\ &= \sum_{n=1}^{N'} \sum_{m=1}^n \frac{1}{h(x'_m)} [f(x'_{n+1}) - f(x'_n)] - \sum_{n=0}^{N'} \int_{x'_n}^{x'_{n+1}} N x df(x) \\ &= \sum_{n=0}^{N'} \int_{x'_n}^{x'_{n+1}} \left[\sum_{m=1}^n \frac{1}{h(x'_m)} - N x \right] df(x) \end{aligned}$$

(wobei wir formal $\sum_{m=1}^0 \frac{1}{h(x'_m)} = 0$ setzen). Wieder gilt

$$\left| \sum_{m=1}^n \frac{1}{h(x'_m)} - N x \right| = |B_h(\xi; 0, x; N) - N x| \leq N \cdot E_h(\xi, N, c)$$

für alle $x \in]x'_n, x'_{n+1}]$, wobei die Abschätzung sogar im abgeschlossenen Intervall $[x'_n, x'_{n+1}]$ gilt. Wir erhalten somit

$$\left| N \int_0^c f(x) dx - \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} \right| \leq N \cdot E_h(\xi, N, c) \sum_{n=0}^{N'} V_{[x'_n, x'_{n+1}]}(f) = N \cdot E_h(\xi, N, c) \cdot V(f).$$

Ist die reellwertige Funktion f auf dem Intervall $[0, c]$ von beschränkter Variation $V(f, c)$, dann ist die Schwankung der Funktion $f \cdot \chi_{[0, c]}$ auf jedem Intervall $[0, c + \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) nach oben beschränkt durch $V(f, c) + |f(c)|$. Setzen wir

$$E_h^+(\xi, N, c) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_h(\xi, N, c + \varepsilon),$$

dann erhalten wir durch Anwendung von Satz 9 folgendes Korollar:

Korollar 9.1. *Es sei $h \in R^+([0, \infty])$ wie in (8) und $\xi = \{x_n\}$ eine Folge in $[0, \infty[$. Ferner sei f eine reellwertige Funktion auf $[0, \infty[$, die in jedem Intervall $[0, c]$ von beschränkter Schwankung $V(f, c)$ ist. Dann gilt*

$$(18) \quad \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} \chi_{[0, c]}(x_n) - \int_0^c f(x) dx \right| \leq [V(f, c) + |f(c)|] \cdot E_h^+(\xi, N, c) \right. \\ \left. \text{für alle } c > 0 \text{ und alle } N \geq 1. \right.$$

Während die Diskrepanz (6) bei gegebener Folge ξ nur von N abhängt, geht in $E_h(\xi, N, c)$ noch der Parameter c ein. Unter der zusätzlichen Voraussetzung der Monotonie von h (wie sie beispielsweise für $h(x) = e^{-x}$ gegeben ist) können wir beide Diskrepanzbegriffe auf einfache Weise miteinander in Verbindung bringen. Die Notwendigkeit einer zusätzlichen Annahme über h wird klar, wenn wir bedenken, daß bei festem N die Diskrepanz $E_h(\xi, N, c)$ nur von den Werten von h an den endlich vielen Stellen x_1, \dots, x_N abhängt, zur Bildung der

Diskrepanz $D_\varphi(\xi, N)$ aber wegen

$$\varphi(x) = \int_0^x h(t) dt$$

die Gesamtheit aller Werte von h herangezogen wird.

Satz 10. *Es sei $h \in R^+([0, \infty])$ wie in (8) und monoton fallend, sowie*

$$\varphi(x) = \int_0^x h(t) dt \quad \text{für } x \geq 0$$

und ξ eine Folge in $[0, \infty[$. Dann gilt

$$E_h(\xi, N, c) \leq \frac{2}{h(c)} D_\varphi(\xi, N) \quad \text{für alle } c > 0 \text{ und alle } N \geq 1.$$

Beweis. Für $0 \leq a < b \leq c$ gilt

$$\left| \frac{B_h(\xi; a, b; N)}{N} - (b-a) \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\chi_{[a, b]}(x_n)}{h(x_n)} - \int_0^\infty \chi_{[a, b]}(x) dx \right|.$$

Die Funktion $\chi_{[a, b]}/h$ ist auf $[0, \infty[$ von beschränkter Schwankung und zwar hat ihre Schwankung dort den Wert

$$\frac{2}{h(b)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2}{h(b)} - \frac{1}{h(a)} \quad \text{für } a=0.$$

Nach Satz 7 gilt wegen $\frac{2}{h(b)} \leq \frac{2}{h(c)}$

$$\left| \frac{B_h(\xi; a, b; N)}{N} - (b-a) \right| \leq \frac{2}{h(c)} D_\varphi(\xi, N),$$

woraus die Behauptung folgt.

Wir wenden dies wieder speziell auf den Fall $h(x) = e^{-x}$ an und erhalten aus Korollar 9.1 unter Berücksichtigung von (7) folgendes Ergebnis:

Satz 11. *Es sei f eine reellwertige Funktion auf $[0, \infty[$, die in jedem Intervall $[0, c]$ von beschränkter Schwankung $V(f, c)$ ist und $\eta = \{y_n\}$ eine Folge in $]0, 1[$. Dann gilt*

$$(19) \quad \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(-\log y_n)}{y_n} \chi_{[0, c]}(-\log y_n) - \int_0^c f(x) dx \right| \right. \\ \left. \leq 2[V(f, c) + |f(c)|] e^c D(\eta, N) \quad \text{für alle } c > 0 \text{ und } N \geq 1. \right.$$

Aus Satz 9 und 10 geht hervor, daß bei gegebener Folge η und monoton fallender Funktion h die Approximation in (17) um so besser ist, je langsamer h für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Anschaulich ist das auch deshalb klar, weil die Funktion

$$\varphi(x) = \int_0^x h(t) dt$$

dann für $x \rightarrow \infty$ gleichmäßiger gegen 1 konvergiert und die Glieder der Folge $\{\varphi^{-1}(y_n)\}$ sich gleichmäßiger über die positive Halbgerade verteilen. Wählen wir an Stelle der Funktion $h(x) = e^{-x}$ etwa die Funktion

$$h(x) = \frac{\varepsilon}{(x+1)^{1+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0),$$

dann tritt an Stelle von (19) die Formel

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f\left(\frac{1}{y_n^{1/\varepsilon}} - 1\right)}{\varepsilon y_n^{1/\varepsilon}} \chi_{[0, c]} \left(\frac{1}{y_n^{1/\varepsilon}} - 1\right) - \int_0^c f(x) dx \right| \\ \leq 2[V(f, c) + |f(c)|] \cdot \frac{(c+1)^{1+\varepsilon}}{\varepsilon} D(\eta, N),$$

speziell für $\varepsilon = 1$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f\left(\frac{1}{y_n} - 1\right)}{y_n^2} \chi_{[0, c]} \left(\frac{1}{y_n} - 1\right) - \int_0^c f(x) dx \right| \\ \leq 2[V(f, c) + |f(c)|] \cdot (c+1)^2 D(\eta, N),$$

und bei Wahl von

$$h(x) = \frac{1}{(x+e)[\log(x+e)]^2}$$

die Formel

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{e^{1/y_n} f(e^{1/y_n} - e)}{y_n^2} \chi_{[0, c]}(e^{1/y_n} - e) - \int_0^c f(x) dx \right| \\ \leq 2[V(f, c) + |f(c)|] \cdot (c+e)[\log(c+e)]^2 \cdot D(\eta, N).$$

Mit Hilfe von Satz 10 können wir noch eine zu Satz 8 analoge Aussage beweisen, in der der Parameter c nicht mehr erscheint.

Satz 12. Es sei $h \in R^+([0, \infty])$ wie in (8) und monoton fallend. Für eine Folge $\xi = \{x_n\}$ in $[0, \infty[$ sei $E_h(\xi, N)$ definiert durch

$$E_h(\xi, N) = \sup_{0 \leq a < b \leq c < \infty} h(c) \left| \frac{B_h(\xi; a, b; N)}{N} - (b-a) \right|.$$

Dann ist $E_h(\xi, N)$ endlich. Die Folge ξ ist genau dann $h dx$ -glb. in $[0, \infty[$, wenn

$$(20) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E_h(\xi, N) = 0.$$

Beweis. Wir setzen

$$\varphi(x) = \int_0^x h(t) dt \quad \text{für } x \geq 0.$$

Für $0 \leq a < b \leq c < \infty$ gilt

$$h(c) \left| \frac{B_h(\xi; a, b; N)}{N} - (b-a) \right| \leq h(c) E_h(\xi, N, c) \leq 2 D_\varphi(\xi, N),$$

also

$$E_h(\xi, N) \leq 2 D_\varphi(\xi, N)$$

und weiter (20), falls ξ in $[0, \infty[$ $h dx$ -glv. ist.

Andererseits gilt

$$(21) \quad h(c) E_h(\xi, N, c) \leq E_h(\xi, N) \quad \text{für alle } c > 0 \text{ und alle } N \geq 1.$$

Aus (20) folgt also wegen $h(c) \neq 0$ die Gültigkeit von (16) und damit die $h dx$ -Gleichverteilung von ξ in $[0, \infty[$.

Wir bemerken zum Schluß, daß wegen (21) bei monoton fallender Funktion h in (17) die Diskrepanz $E_h(\xi, N, c)$ und in (18) (wegen der Stetigkeit von h) die Diskrepanz $E_h^+(\xi, N, c)$ jeweils durch den Ausdruck

$$\frac{1}{h(c)} E_h(\xi, N)$$

ersetzt werden kann.

II. Folgen in lokal kompakten nicht kompakten Räumen

5. Gleichverteilung bezüglich normierter Borelmaße

Im folgenden sei X ein lokal kompakter nicht kompakter Hausdorffscher Raum mit abzählbarer Umgebungsbasis $\mathfrak{B} = \{V_n : n \geq 1\}$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß alle V_n offen sind und kompakte abgeschlossene Hülle besitzen. Das Komplement einer Menge A in X bezeichnen wir mit A' , ihre abgeschlossene Hülle in X mit \bar{A} .

Es sei $X^* = X \cup \{\infty\}$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von X . Die offenen Umgebungen von ∞ in X^* sind bekanntlich die Vereinigungsmengen von $\{\infty\}$ mit den Komplementen der kompakten Mengen in X . Ist A eine beliebige kompakte Menge in X und

$$A \subset \bigcup_{n=1}^m V_n,$$

dann ist

$$\{\infty\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^m \bar{V}_n \right)'$$

eine in der offenen Menge $\{\infty\} \cup A'$ enthaltene offene Umgebung von ∞ in X^* . Da es nur abzählbar viele Mengen von der Form

$$\left(\bigcup_{n=1}^m \bar{V}_n \right)'$$

gibt, besitzt auch X^* eine abzählbare Umgebungsbasis.

Die Klassen der Borelmengen in X bzw. X^* , d.h. die von allen kompakten Mengen in X bzw. X^* erzeugten σ -Ringe (in diesem speziellen Falle σ -Algebren,

vgl. [5] §5 und §51) seien mit \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B}^* bezeichnet. Offenbar gilt $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} \cup \{E \cup \{\infty\} : E \in \mathfrak{B}\} \subset \mathfrak{B}^*$. Andererseits enthält \mathfrak{B}_1 alle Mengen der eben konstruierten Umgebungsbasis in X^* , also auch alle offenen Mengen in X^* , als ihre Komplemente alle kompakten Mengen in X^* und damit (da \mathfrak{B}_1 offenbar ein σ -Ring ist) alle Borelmengen in X^* . Es gilt also $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} \cup \{E \cup \{\infty\} : E \in \mathfrak{B}\}$.

Infolge der Gültigkeit des zweiten Abzählbarkeitsaxiomes ist jede Borelmenge auch Bairemenge und jedes Borelmaß auch Bairemaß und damit regulär (s. [5] §51 und §52). Ist μ ein Borelmaß auf X und definieren wir $\mu^*(E) = \mu(E)$ und $\mu^*(E \cup \{\infty\}) = \mu(E)$ für alle $E \in \mathfrak{B}$ (also $\mu^*(\{\infty\}) = 0$), dann erhalten wir ein Maß μ^* auf X^* , das eine Erweiterung von μ darstellt und $\mu^*(X^*) = \mu(X)$ erfüllt. Die Menge aller nichttrivialen Borelmaße auf X bezeichnen wir mit \mathfrak{M} , die Untermenge aller normierten Borelmaße ($\mu(X) = 1$) mit \mathfrak{N} . Die Mengen der entsprechenden auf X^* erweiterten Maße seien \mathfrak{M}^* und \mathfrak{N}^* .

Es sei $L(X)$ die Menge aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf X mit kompaktem Träger und $L_\infty(X)$ die Menge aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf X , die im Unendlichen verschwinden (d.h. außerhalb geeigneter kompakter Untermengen von X beliebig klein werden). $L^+(X)$ und $L_\infty^+(X)$ seien die entsprechenden Mengen von nichtnegativen Funktionen. Ferner bezeichnen wir mit $C(X^*)$, $R(X^*)$ und $R^+(X^*)$ beziehungsweise die Mengen aller stetigen komplexwertigen, reellwertigen und nichtnegativen reellwertigen Funktionen auf X^* und mit $C^*(X)$, $R^*(X)$ und $R^{+*}(X)$ ihre Einschränkungen auf X . Schließlich seien $C(X)$, $R(X)$ und $R^+(X)$ beziehungsweise die Mengen aller stetigen komplexwertigen, reellwertigen und nichtnegativen reellwertigen Funktionen auf X . $C^*(X)$ ist die Menge jener Funktionen $f \in C(X)$, für die der endliche Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

existiert. Es gilt $L(X) \subset L_\infty(X) \subset C^*(X) \subset C(X)$, $L_\infty(X)$ ist die Vervollständigung von $L(X)$ in der Norm

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

und $C^*(X) = \{\alpha \cdot 1 + f : \alpha \text{ komplex, } f \in L_\infty(X)\}$. Im folgenden denken wir uns nötigenfalls die Funktionen aus $C^*(X)$ auch ohne Änderung der Bezeichnung stetig auf X^* fortgesetzt. Eine Funktion $f \in R^{+*}(X)$ heiße *Urysohn-Funktion*, wenn $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in X$ gilt.

Es sei $\mu^* \in \mathfrak{N}^*$ gegeben. Eine Folge $\{x_n\}$ in X^* heißt bekanntlich $d\mu^*$ -glv. in X^* , wenn

$$(22) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_{X^*} f(x) d\mu^*(x) \quad \text{für alle } f \in C(X^*)$$

gilt (s. [7] §1; wir verwenden $d\mu^*$ an Stelle von μ^* zur Kennzeichnung des Maßes, um wie in Teil I die Schreibweise bei der Betrachtung absolut stetiger Maße beibehalten zu können). Um eine sinnvolle Verallgemeinerung zu erhalten und Sätze über Gleichverteilung in kompakten Räumen anwenden zu können, verwenden wir folgende Definition.

Definition 2. Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben. Eine Folge $\{x_n\}$ in X heißt $d\mu$ -glv. in X , wenn

$$(23) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_X f(x) d\mu(x) \quad \text{für alle } f \in L(X)$$

gilt.

Der Träger $T(\mu)$ eines Maßes μ ist bekanntlich die abgeschlossene Hülle der Menge aller Punkte in X , für die jede Umgebung positives Maß besitzt. Falls $T(\mu)$ kompakt ist, ist Definition 2 konsistent mit der Definition der $d\mu$ -Gleichverteilung der Folge $\{x_n\}$ im kompakten Raum $T(\mu)$. Von Interesse sind für uns im folgenden allerdings vorwiegend Maße mit nicht kompaktem Träger.

Hilfssatz 1. Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben. Die Folge $\{x_n\}$ in X ist genau dann $d\mu$ -glv. in X , wenn sie $d\mu^*$ -glv. in X^* ist.

Beweis. Ist $\{x_n\}$ $d\mu^*$ -glv. in X^* , dann gilt (22) und damit auch (23). Es sei nun $\{x_n\}$ $d\mu$ -glv. in X . Wegen $\mu(X) = \mu^*(X^*) = 1$ gilt (22) jedenfalls für alle konstanten Funktionen auf X^* . Aus (23) folgt ferner die Gültigkeit dieser Gleichung für alle Funktionen $f \in L_\infty(X)$, da sich jede solche Funktion durch Funktionen aus $L(X)$ gleichmäßig approximieren lassen. Da jede Funktion $f \in C(X^*)$ Summe einer Konstanten und einer Funktion aus $L_\infty(X)$ ist, gilt (22).

Offenbar kann in (23) $L(X)$ durch $L^+(X)$, $C^*(X)$ und $R^{+*}(X)$ ersetzt werden. Außerdem gilt (23) nach Hilfssatz 1 und [7] Satz 6 noch für die in Definition 3 beschriebene größere Klasse von beschränkten, aber nicht notwendigerweise stetigen Funktionen.

Definition 3. Eine reellwertige Borel-meßbare Funktion f auf X heißt bezüglich eines Maßes $\mu \in \mathfrak{M}$ R -integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Funktionen $f_1, f_2 \in R^*(X)$ derart gibt, daß

$$f_1 \leq f \leq f_2 \quad \text{und} \quad \int_X [f_2(x) - f_1(x)] d\mu(x) < \varepsilon$$

gilt.

Für unsere Zwecke ist die im folgenden Hilfssatz angeführte Klasse von bezüglich eines Maßes $\mu \in \mathfrak{M}$ R -integrierbaren Funktionen von besonderem Interesse:

Hilfssatz 2. Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben und f eine beschränkte, Borel-meßbare reellwertige Funktion auf X , die in X , abgesehen von einer abgeschlossenen μ -Nullmenge A , stetig ist. Dann ist f bezüglich μ R -integrierbar.

Beweis. Wir setzen wie üblich $f^+ = \max(0, f)$ und $f^- = \max(0, -f)$. Dann gilt $f = f^+ - f^-$ und f^+, f^- besitzen die gleichen Eigenschaften wie f . Da Differenz zweier R -integrierbarer Funktionen wieder R -integrierbar ist, genügt es, die Behauptung für eine nichtnegativwertige Funktion f zu beweisen.

Wir definieren $f(\infty) = 0$ und setzen $A^* = A \cup \{\infty\}$. Dann ist A^* eine kompakte μ^* -Nullmenge in X^* und f ist stetig auf $X^* \setminus A^*$ (\setminus bedeute mengentheoretische Subtraktion). Es sei W_1 eine offene Umgebung von A^* in X^* , für die

$$\mu^*(W_1) < \frac{\varepsilon}{2 \|f\| + 1}$$

gilt. Ferner sei W_2 eine offene Umgebung von A^* in X^* und $\overline{W_2} \subset W_1$. Wir wählen zwei Urysohn-Funktionen $h_1, h_2 \in R^+(X^*)$ derart, daß

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in W_2 \\ 1 & \text{für } x \notin W_1, \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in A^* \\ 1 & \text{für } x \notin W_2 \end{cases}$$

gilt. Wir setzen $f_1 = f \cdot h_1$ und $f_2 = f \cdot h_2 + \|f\| \cdot (1 - h_1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) = f_2(x) && \text{für } x \notin W_1, \\ f_1(x) &= f(x) h_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) = f(x) + \|f\| (1 - h_1(x)) && \text{für } x \in W_1 \setminus W_2, \\ f_1(x) &= 0 \leq f(x) \leq f_2(x) = f(x) h_2(x) + \|f\| && \text{für } x \in W_2, \end{aligned}$$

also $f_1 \leq f \leq f_2$ insbesondere auf X . Wegen $f_1(x) = 0$ und $f_2(x) = \|f\|$ für $x \in A^*$ sind f_1 und f_2 stetig auf X^* . Ferner gilt

$$f_2(x) - f_1(x) \begin{cases} = 0 & \text{für } x \notin W_1 \\ \leq 2 \|f\| & \text{für } x \in W_1. \end{cases}$$

Es folgt

$$\int_X [f_2(x) - f_1(x)] d\mu(x) = \int_{X^*} [f_2(x) - f_1(x)] d\mu^*(x) \leq 2 \|f\| \mu^*(W_1) < \varepsilon.$$

Nach Hilfssatz 2 ist die charakteristische Funktion χ_E jeder Borelmenge E in X , deren Rand das Maß 0 hat, bezüglich μ R -integrierbar. Setzen wir in (23) $f = \chi_E$, dann erhalten wir die Aussage, daß für eine in X $d\mu$ -glv. Folge x_n ihre relative Häufigkeit in E gegen das Maß von E strebt (s. [7], Satz 6, [6], Satz 3). Diese Aussage läßt sich, sogar unter schwächeren Voraussetzungen, auch umkehren. Dies folgt aus bekannten Sätzen über schwache Konvergenz im Raume aller regulären Borelmaße auf X (vgl. [4], S. 192), wenn man Glv. einer Folge als Aussage über schwache Konvergenz einer Folge von Linearkombinationen von Punktmaßen auffaßt (s. [1]). Vollständigkeitshalber geben wir einen Beweis des folgenden Satzes zur Gänze wieder (vgl. [3], § 2.8).

Satz 13. *Es sei $\mu \in \mathfrak{R}$ und eine Folge $\xi = \{x_n\}$ in X gegeben. Für eine Borelmenge $E \in \mathfrak{B}$ und $N \geq 1$ sei $A(\xi; E; N)$ definiert durch*

$$A(\xi; E; N) = \sum_{n=1}^N \chi_E(x_n).$$

Die Folge ξ ist genau dann $d\mu$ -glv. in X , wenn

$$(24) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(\xi; E; N)}{N} = \mu(E)$$

für alle kompakten Borelmengen $E \in \mathfrak{B}$ gilt, deren Rand das Maß 0 besitzt.

Beweis. Nach dem oben gesagten haben wir den Beweis nur mehr in einer Richtung zu führen. Es sei (24) erfüllt und $f \in L^+(X)$ gegeben. Für jede reelle Zahl $\alpha \geq 0$ setzen wir $E_\alpha = \{x: f(x) \geq \alpha\}$. E^0 bezeichne den offenen Kern von E . Für $0 \leq \alpha < \beta$ gilt $E_\alpha = \bar{E}_\alpha \supset E_\alpha^0 \supset \{x: f(x) > \alpha\} \supset E_\beta = \bar{E}_\beta \supset E_\beta^0$. Die Randmengen $E_\alpha \setminus E_\alpha^0$ und $E_\beta \setminus E_\beta^0$ sind daher disjunkt. Wegen $\mu(X) = 1$ können höchstens abzählbar viele Mengen $E_\alpha \setminus E_\alpha^0$ positives Maß haben. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, dann wählen wir $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \|f\| < \alpha_n$ derart, daß $\alpha_i - \alpha_{i-1} < \varepsilon$ und $\mu(E_{\alpha_i} \setminus E_{\alpha_i}^0) = 0$ für $1 \leq i \leq n$ gilt. Für $i = 0$ ist $E_{\alpha_0} = X$, für $i \geq 1$ sind die Mengen E_{α_i} kompakt. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x) - \varepsilon &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \chi_{E_{\alpha_i} \setminus E_{\alpha_{i+1}}}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\chi_{E_{\alpha_i}}(x) - \chi_{E_{\alpha_{i+1}}}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \chi_{E_{\alpha_i}}(x) = f_1(x) \leq f(x), \\ f(x) &\leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_{\alpha_{i-1}} \setminus E_{\alpha_i}}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\chi_{E_{\alpha_{i-1}}}(x) - \chi_{E_{\alpha_i}}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \chi_{E_{\alpha_{i-1}}}(x) = f_2(x) \leq f(x) + \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x \in X$. Wegen (24) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d\mu(x) - \varepsilon &\leq \int_X f_1(x) d\mu(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_1(x_n) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n), \\ \int_X f(x) d\mu(x) + \varepsilon &\geq \int_X f_2(x) d\mu(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_2(x_n) \geq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n). \end{aligned}$$

Da ε beliebig gewählt war, folgt (23).

Ist das Maß $\mu \in \mathfrak{N}$ nicht auf einer abzählbaren Menge in X konzentriert und $\xi = \{x_n\}$ eine beliebige Folge in X , dann gibt es kompakte Mengen E von positivem Maß, für die $A(\xi; E; N) = 0$ für alle $N \geq 1$ gilt. Die Menge $X \setminus \{x_n: n \geq 1\}$ ist nämlich meßbar und von positivem Maß. Aus der Regularität von μ folgt die Behauptung. Die Gl. (24) gilt im allgemeinen also auch bei $d\mu$ -Gleichverteilung der Folge ξ in X nicht für alle kompakten Mengen. Andererseits sieht man wie im Beweis von Satz 14 leicht, daß jede offene Umgebung einer kompakten Menge eine kleinere offene Umgebung dieser Menge enthält, deren Rand das Maß 0 besitzt (vgl. [6], Anmerkung nach Satz 3). Wenden wir das auf die abzählbare Menge jener Paare $V_n, V_m \in \mathfrak{B}$ an, für die $\bar{V}_n \subset V_m$ gilt, dann sehen wir, daß wir bei gegebenem Maß $\mu \in \mathfrak{N}$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß der Rand jeder Menge der Umgebungsbasis \mathfrak{B} das Maß 0 besitzt. Aus (24) folgt dann, daß die abgeschlossene Hülle jeder $d\mu$ -glv. Folge den Träger des Maßes μ enthält.

Ist $\mu \in \mathfrak{N}$ gegeben, dann ist die Existenz $d\mu$ -glv. Folgen in X durch ein bekanntes metrisches Resultat über Folgen in kompakten Räumen gesichert (s. [7] Satz 11), das sich auch auf den Fall eines lokal kompakten nicht kompakten Raumes übertragen läßt. Es sei X_∞ die Menge aller Folgen in X (also

das kartesische Produkt von abzählbar vielen Exemplaren der Menge X) und X_∞^* die Menge aller Folgen in X^* . In X_∞ bzw. X_∞^* führen wir mittels μ bzw. μ^* wie üblich ein normiertes Maß μ_∞ bzw. μ_∞^* ein, indem wir das Produkt von abzählbar vielen Exemplaren der Maßräume (X, \mathfrak{B}, μ) bzw. $(X^*, \mathfrak{B}^*, \mu^*)$ bilden (s. [5] §38). Dabei ist $(X_\infty, \mathfrak{B}_\infty, \mu_\infty)$ die Einschränkung von $(X_\infty^*, \mathfrak{B}_\infty^*, \mu_\infty^*)$ auf die Menge $X_\infty \in \mathfrak{B}_\infty^*$, die wir auch erhalten, wenn wir von X_∞^* die μ_∞^* -Nullmenge aller Folgen in X^* abziehen, für die mindestens ein Glied (d. h. eine Koordinate in X_∞^*) gleich ∞ ist. Da μ_∞^* -fast alle Folgen in X^* $d\mu^*$ -glv. sind, sind μ_∞ -fast alle Folgen in X $d\mu^*$ -glv. in X^* . Aus Hilfssatz 1 schließen wir:

Satz 14. *Es sei $\mu \in \mathfrak{N}$ gegeben und μ_∞ das zugehörige Produktmaß im meßbaren Folgenraum $(X_\infty, \mathfrak{B}_\infty)$. Dann ist μ_∞ -fast jede Folge in X $d\mu$ -glv. in X .*

Da es zu jedem Maß $\mu \in \mathfrak{N}$ $d\mu$ -glv. Folgen gibt, läßt sich auch jede in X überall dichte Folge zu einer $d\mu$ -glv. Folge umordnen (s. [7] Satz 17).

6. Unbeschränkte Funktionen

Es sei wieder $\mu \in \mathfrak{N}$ gegeben. Aus Hilfssatz 2 und der Bemerkung, die Definition 3 vorangeht, folgt, daß für eine $d\mu$ -glv. Folge $\{x_n\}$ in X die Beziehung (23) auch für alle beschränkten (und daher automatisch integrierbaren) stetigen komplexwertigen Funktionen auf X gilt. Wir untersuchen nun in welchem Maße die Beziehung (23) auch für integrierbare, aber unbeschränkte stetige Funktionen auf X zutrifft.

Es sei $f \in R^+(X)$ unbeschränkt und für jedes $k \geq 1$ die beschränkte stetige Funktion f_k definiert durch $f_k(x) = \min\{f(x), k\}$ für alle $x \in X$. Ist die Folge $\{x_n\}$ $d\mu$ -glv. in X , so erhalten wir

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_k(x_n) = \int_X f_k(x) d\mu(x) \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Da die Folge $\{f_k\}$ monoton gegen f konvergiert, gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

und daher jedenfalls

$$(25) \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \geq \int_X f(x) d\mu(x).$$

Also trifft (23) sicher für alle nicht integrierbaren Funktionen aus $R^+(X)$ zu.

Die folgenden Sätze zeigen, daß die Gültigkeit von (23) im allgemeinen nicht auf alle stetigen integrierbaren Funktionen ausgedehnt werden kann, wie auch die $d\mu$ -glv. Folge $\{x_n\}$ in X gewählt wird. Für jede solche Folge gibt es aber sicher unbeschränkte integrierbare stetige Funktionen auf X , für die (23) erfüllt ist.

Satz 15. *Es sei $\mu \in \mathfrak{N}$ gegeben und $\{x_n: 1 \leq n < \infty\}$ eine abzählbare μ -Nullmenge in X , deren abgeschlossene Hülle nicht kompakt ist. Dann existiert eine integrierbare Funktion $f \in R^+(X)$ derart, daß*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \infty.$$

Beweis. Wir setzen

$$W_k = \bigcup_{m=1}^k V_m$$

und erhalten eine monoton gegen X konvergierende Folge offener Mengen W_k mit kompakter abgeschlossener Hülle. Wir definieren induktiv eine Folge von Funktionen $f_s \in L^+(X)$. Es sei $n_1 = 1$ und m_1 der kleinste Index m mit folgenden Eigenschaften:

$$x_1 \in V_{m_1},$$

$$\mu(V_{m_1}) < \frac{1}{2}.$$

Wir wählen die Urysohn-Funktion $f_1 \in L^+(X)$ so, daß

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_1 \\ 0 & \text{für } x \notin V_{m_1} \end{cases}$$

gilt und erhalten

$$\int_X f_1(x) d\mu(x) \leq \mu(V_{m_1}) < \frac{1}{2}.$$

Es seien die Funktionen $f_1, \dots, f_r \in L^+(X)$ und die Indizes $m_1 < m_2 < \dots < m_r$, $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ bereits so gewählt, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$1) f_s(x) = 0 \quad \text{für alle } x \notin V_{m_s} \quad (1 \leq s \leq r).$$

$$2) \bar{V}_{m_s} \cap \bar{V}_{m_t} = \emptyset \quad (1 \leq s < t \leq r).$$

$$3) x_n \in \bar{W}_{m_s} \quad \text{für } 1 \leq n \leq n_s \quad (1 \leq s \leq r).$$

$$4) \int_X f_s(x) d\mu(x) < \frac{1}{2^s} \quad (1 \leq s \leq r).$$

$$5) \frac{1}{n_s} \sum_{n=1}^{n_s} f_s(x_n) = s \quad (1 \leq s \leq r).$$

Infolge unserer Voraussetzung sind nicht alle x_n in \bar{W}_{m_r} enthalten. Es sei n_{r+1} der kleinste Index n derart, daß $x_n \notin \bar{W}_{m_r}$, sowie m_{r+1} der kleinste Index m mit folgenden Eigenschaften:

$$x_{n_{r+1}} \in V_m,$$

$$\mu(V_m) < \frac{1}{(r+1) n_{r+1} 2^{r+1}},$$

$$\bar{V}_m \cap \bar{W}_{m_r} = \emptyset.$$

Wir wählen die Urysohn-Funktion $f'_{r+1} \in L^+(X)$ so, daß

$$f'_{r+1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_{n_{r+1}} \\ 0 & \text{für } x \notin V_{m_{r+1}} \end{cases}$$

gilt und setzen $f_{r+1} = (r+1) n_{r+1} f'_{r+1}$.

Offenbar gilt $n_{r+1} > n_r$ und $m_{r+1} > m_r$. Die Bedingungen 1)–3) sind auch für $r+1$ an Stelle von r erfüllt. Ferner gilt

$$\int_X f_{r+1}(x) d\mu(x) \leq (r+1) n_{r+1} \mu(V_{m_{r+1}}) < \frac{1}{2^{r+1}}$$

und wegen 3) und der Wahl von n_{r+1}

$$\frac{1}{n_{r+1}} \sum_{n=1}^{n_{r+1}} f_{r+1}(x_n) = \frac{1}{n_{r+1}} f_{r+1}(x_{n_{r+1}}) = r+1.$$

Nun setzen wir

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} f_s.$$

Wegen 1) und 2) ist f nichtnegativ reellwertig. Außerdem gilt

$$f(x) = \sum_{s=1}^r f_s(x) \quad \text{für alle } x \in \bigcup_{m=1}^{m_r} V_m = W_{m_r},$$

also ist f in jedem Punkt $x \in X$ stetig. Aus 4) erhalten wir

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \int_X f_s(x) d\mu(x) < 1.$$

Andrerseits folgt aus 5) für jedes $s \geq 1$

$$\frac{1}{n_s} \sum_{n=1}^{n_s} f(x_n) \geq \frac{1}{n_s} \sum_{n=1}^{n_s} f_s(x_n) = s,$$

also

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \infty.$$

Die Voraussetzungen von Satz 15 sind insbesondere erfüllt, wenn μ nicht atomar ist (d.h. $\mu(\{x\})=0$ für alle $x \in X$ gilt; vgl. [5] §40), nicht kompakten Träger besitzt und die Folge $\{x_n\}$ in X $d\mu$ -glv. ist.

Korollar 15.1. *Es sei ein nicht atomares Maß μ mit nicht kompaktem Träger gegeben und $\{x_n\}$ eine $d\mu$ -glv. Folge in X . Dann existiert eine $d\mu$ -integrierbare Funktion $f \in R^+(X)$ derart, daß*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \infty.$$

Zwecks Vereinfachung der Sprechweise bedienen wir uns folgender Definition:

Definition 4. Es sei $\mu \in \mathfrak{R}$ und eine Folge $\xi = \{x_n\}$ in X gegeben. Eine Borelmeßbare komplexwertige Funktion f auf X heißt $(\xi, d\mu)$ -summierbar, wenn f $d\mu$ -integrierbar ist und

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

gilt.

Die Folge ξ ist also genau dann $d\mu$ -glv. in X , wenn jede Funktion $f \in R^{+*}(X)$ $(\xi, d\mu)$ -summierbar ist. Unter den Voraussetzungen von Korollar 15.1 gibt es aber stets eine integrierbare Funktion $f \in R^+(X)$, die nicht $(\xi, d\mu)$ -summierbar ist.

Besitzt das Maß $\mu \in \mathfrak{N}$ einen kompakten Träger $T(\mu)$ und ist die $d\mu$ -glv. Folge $\xi = \{x_n\}$ in $T(\mu)$ enthalten (solche Folgen gibt es stets), dann trifft die Aussage von Korollar 15.1 sicher nicht mehr zu, da jede Funktion $f \in C(X)$ auf $T(\mu)$ stetig und beschränkt, also auch $(\xi, d\mu)$ -summierbar ist. Daß auch die andere Voraussetzung (μ nicht atomar) in Korollar 15.1 nicht einfach fallen gelassen werden kann, zeigt das folgende Beispiel.

Es sei X die Menge aller natürlichen Zahlen in der diskreten Topologie und $\mu \in \mathfrak{N}$ definiert durch

$$\mu(\{k\}) = \frac{1}{2^k} \quad (1 \leq k < \infty).$$

Die Menge aller integrierbaren komplexwertigen Funktionen ist einfach die Menge aller Folgen f von komplexen Zahlen, für die die Reihe

$$\int_X |f(x)| d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(k)|}{2^k}$$

konvergiert. Beispielsweise ist die durch $f(k) = 2^k/k^2$ definierte Funktion auf X unbeschränkt (es gilt sogar $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \infty$), aber $d\mu$ -integrierbar.

Wir definieren die Folge $\xi = \{x_n\}$ in X folgendermaßen:

$$\begin{aligned} x_{2^m-1} &= 1 && \text{für alle } m \geq 1 \\ x_{2(2^m-1)} &= 2 && \text{für alle } m \geq 1 \\ x_{4(2^m-1)} &= 3 && \text{für alle } m \geq 1 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

allgemein

$$(26) \quad x_{2^{k-1}(2^m-1)} = k \quad \text{für alle } m \geq 1, k \geq 1.$$

Da jede natürliche Zahl n auf genau eine Weise in der Form

$$n = 2^{k-1}(2^m-1) \quad (m \geq 1, k \geq 1)$$

geschrieben werden kann, ist die Folge ξ durch (26) wohldefiniert. Ist $k \geq 1$ gegeben, dann gilt (für die einpunktige Menge $\{k\}$)

$$A(\xi; \{k\}; N) = m \quad \text{für} \quad 2^{k-1}(2^m-1) \leq N < 2^{k-1}(2^{m+1})$$

($m \geq 1$), und für solche N weiter

$$\frac{m}{2^{k-1}(2^m+1)} < \frac{A(\xi; \{k\}; N)}{N} \leq \frac{m}{2^{k-1}(2^m-1)},$$

also

$$\frac{-1}{2^k(2^m+1)} < \frac{A(\xi; \{k\}; N)}{N} - \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^k(2^m-1)},$$

$$(27) \quad \left| \frac{A(\xi; \{k\}; N)}{N} - \frac{1}{2^k} \right| \leq \frac{1}{2^k(2^m-1)} \quad \text{für} \quad 2^{k-1}(2^m-1) \leq N < 2^{k-1}(2^{m+1}).$$

Insbesondere gilt

$$(28) \quad \left| \frac{A(\xi; \{k\}; N)}{N} - \frac{1}{2^k} \right| \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{für alle } N \geq 1.$$

Für $N \geq 2^{k-1}$ folgt dies aus (27), wenn wir m durch 1 ersetzen, für $N < 2^{k-1}$ ist $A(\xi; \{k\}; N) = 0$ und (28) daher ebenfalls erfüllt.

Es sei nun f eine beliebige komplexwertige $d\mu$ -integrierbare Funktion auf X und $\varepsilon > 0$ willkürlich gegeben. Wir wählen erst k_0 so groß, daß

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{|f(k)|}{2^k} < \varepsilon$$

gilt. Da bei gegebenem k in (27) mit N auch m gegen ∞ wächst, können wir einen Index N_0 derart finden, daß

$$\left| \frac{A(\xi; \{k\}; N)}{N} - \frac{1}{2^k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{k_0(1+|f(k)|)} \quad \text{für alle } N \geq N_0 \text{ und für } 1 \leq k \leq k_0$$

gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_X f(x) d\mu(x) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A(\xi; \{k\}; N)}{N} f(k) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{2^k} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} \left| \frac{A(\xi; \{k\}; N)}{N} - \frac{1}{2^k} \right| |f(k)| + \\ &\quad + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left| \frac{A(\xi; \{k\}; N)}{N} - \frac{1}{2^k} \right| |f(k)| \leq \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon |f(k)|}{k_0(1+|f(k)|)} + \\ &\quad + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{|f(k)|}{2^k} \leq 2\varepsilon \quad \text{für } N \geq N_0. \end{aligned}$$

Also ist die Funktion $f(\xi, d\mu)$ -summierbar.

In einem lokal kompakten nicht kompakten Hausdorffschen Raum X gibt es stets eine abzählbare Menge $\{a_k: 1 \leq k < \infty\}$ ohne Häufungspunkte. Identifizieren wir die natürliche Zahl k mit dem Folgenglied a_k und übertragen wir die eben angestellten Überlegungen auf das durch

$$\mu(\{a_k\}) = \frac{1}{2^k} \quad \text{für alle } k \geq 1$$

auf X definierte rein atomare Maß $\mu \in \mathfrak{M}$, dann erhalten wir: *In einem lokal kompakten, nicht kompakten Hausdorffschen Raum X gibt es stets ein rein atomares Maß $\mu \in \mathfrak{M}$ mit nicht kompakten Träger und eine $d\mu$ -glv. Folge $\xi = \{x_n\}$ derart, daß jede $d\mu$ -integrierbare komplexwertige Funktion $(\xi, d\mu)$ -summierbar ist.*

Für eine reellwertige Funktion f auf X schreiben wir wie üblich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

falls f außerhalb geeignet gewählter kompakter Mengen durch beliebig große positive Konstanten nach unten beschränkt ist.

Satz 16. *Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben und $\xi = \{x_n\}$ eine in X $d\mu$ -glv. Folge. Dann gibt es eine $(\xi, d\mu)$ -summierbare Funktion $f \in R^+(X)$ derart, daß $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.*

Beweis. Während es im Beweis von Satz 15 darauf ankam, eine Funktion zu konstruieren, die auf den Gliedern der Folge ξ möglichst häufig hinreichend große Werte annahm, konstruieren wir nun eine Funktion die auf den Gliedern der Folge ξ so selten große Werte annimmt, daß diese die Schwankung der Folge

$$\left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \right\}$$

nicht stark beeinflussen können.

Wir setzen wie im Beweis von Satz 15

$$W_k = \bigcup_{m=1}^k V_m$$

und können ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß der Rand jeder Menge V_m das Maß Null hat. Wegen

$$\overline{W_k} \setminus W_k \subset \bigcup_{m=1}^k (\overline{V_k} \setminus V_k)$$

trifft dasselbe für jede Menge W_k zu. Wir bestimmen wieder induktiv eine Teilfolge $\{W_{k_s}\}$ und eine Folge von Urysohn-Funktionen $f_s \in R^+(X)$ und setzen $k_1 = 1$ und $f_1(x) = 1$ für alle $x \in X$. Außerdem wählen wir $N_1 \geq 1$ so groß, daß

$$\left| \frac{A(\xi; W'_1; N)}{N} - \mu(W'_1) \right| < 1 \quad \text{für alle } N \geq N_1$$

gilt.

Es seien die Indizes $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, die Zahlen $N_1 < N_2 < \dots < N_r$ und die Urysohn-Funktionen $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_r$ in $R^+(X)$ bereits so gewählt, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1) $x_n \in W_{k_s}$ für $1 \leq n \leq N_{s-1}$ ($1 \leq s \leq r$),
- 2) $\overline{W_{k_{s-1}}} \subset W_{k_s}$ ($1 \leq s \leq r$),
- 3) $\mu(W'_{k_s}) \leq \frac{1}{2^{s-1}}$ ($1 \leq s \leq r$),
- 4) $f_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in W_{k_{s-1}} \\ 1 & \text{für } x \notin W_{k_s} \end{cases}$ ($1 \leq s \leq r$),
- 5) $\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_s(x_n) - \int_X f_s(x) d\mu(x) \right| < \frac{1}{r^2}$ für alle $N \geq N_r$ ($1 \leq s \leq r$),
- 6) $\left| \frac{A(\xi; W'_{k_r}; N)}{N} - \mu(W'_{k_r}) \right| < \frac{1}{r}$ für alle $N \geq N_r$.

(für $s=1$ ist Bedingung 1) leer und Bedingung 2) und 4) erfüllt, wenn wir formal $W_{k_0} = \emptyset$ setzen). Wir bestimmen zunächst den Index $k_{r+1} > k_r$ so, daß die Bedingungen 1)–3) für $r+1$ an Stelle von s erfüllt sind und dann die Urysohn-Funktion $f_{r+1} \in R^+(X)$ so, daß Bedingung 4) auch für $r+1$ an Stelle von s

erfüllt ist. Insbesondere gilt dann $f_{r+1} \leq f_r$. Schließlich wählen wir den Index $N_{r+1} > N_r$ so, daß 5) und 6) für $r+1$ an Stelle von r erfüllt sind.

Wir setzen nun

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} f_s(x).$$

Da die Folge $\{W_{k_s}\}$ durch Einschließung vollständig geordnet ist, folgt aus 4)

$$(29) \quad f(x) = \sum_{s=1}^r f_s(x) \quad \text{für alle } x \in W_{k_r}.$$

Wir ersen daraus, daß f auf ganz X nichtnegativ reellwertig und stetig ist. Für alle $x \notin W_{k_r}$ gilt $f(x) \geq r$, woraus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

folgt. Außerdem ist f wegen der Abschätzung

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \int_X f_s(x) d\mu(x) \leq 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \mu(W'_{k_s}) \leq 3$$

integrierbar.

Ist $N \geq 1$ gegeben, dann ist r durch die Ungleichung $N_r \leq N < N_{r+1}$ eindeutig bestimmt. Wir erhalten wegen Bedingung 1) und (29)

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^{r+2} f_s(x_n) \\ &\leq \sum_{s=1}^r \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_s(x_n) + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N f_{r+1}(x_n) \\ &\leq \sum_{s=1}^r \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_s(x_n) + 2 \frac{A(\xi; W'_{k_r}; N)}{N} \\ &\leq \sum_{s=1}^r \left[\int_X f_s(x) d\mu(x) + \frac{1}{r^2} \right] + 2 \left[\mu(W'_{k_r}) + \frac{1}{r} \right] \\ &\leq \int_X f(x) d\mu(x) + \frac{3}{r} + \frac{1}{2^{r-2}}. \end{aligned}$$

Da mit N auch r gegen ∞ strebt, folgt

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \leq \int_X f(x) d\mu(x),$$

und hieraus in Verbindung mit (25) die Behauptung.

Ist eine Funktion $g \in R^+(X)$ gegeben, dann bezeichnen wir in Anlehnung an die für Funktionen einer reellen Veränderlichen gebräuchliche Schreibweise mit $0(g)$ die Menge aller komplexwertigen Funktionen f auf X , für die es eine von f abhängige kompakte Menge A_f und eine ebenfalls von f abhängige

positive Konstante c_f derart gibt, daß

$$|f(x)| \leq c_f g(x) \quad \text{für alle } x \in A'_f$$

gilt.

Satz 17. Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben und $\xi = \{x_n\}$ eine $d\mu$ -glv. Folge in X . Ferner sei die Funktion $g \in R^+(X)$ $(\xi, d\mu)$ -summierbar. Dann ist auch jede Funktion $f \in 0(g) \cap C(X)$ $(\xi, d\mu)$ -summierbar.

Beweis. Es genügt die Behauptung für Funktionen $f \in 0(g) \cap R^+(X)$ nachzuweisen. Es sei solch eine Funktion f und ein $\varepsilon > 0$ gegeben, sowie A eine kompakte Menge in X und c eine positive Konstante mit folgenden Eigenschaften

$$f(x) \leq c g(x) \quad \text{für alle } x \in A',$$

$$\int_{A'} g(x) d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Ferner sei die Urysohn-Funktion $h \in L^+(X)$ so gewählt, daß

$$h(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in A.$$

Dann gilt wegen $g = gh + g(1-h)$ und $gh \in L^+(X)$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_n(x_n) (1-h(x_n)) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x_n) - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x_n) h(x_n) \\ &= \int_X g(x) d\mu(x) - \int_X g(x) h(x) d\mu(x) \\ &= \int_X g(x) (1-h(x)) d\mu(x) \\ &\leq \int_{A'} g(x) d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{c}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) (1-h(x_n)) &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N c g(x_n) (1-h(x_n)) < \varepsilon, \\ \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) h(x_n) + \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) (1-h(x_n)) \\ &\leq \int_X f(x) h(x) d\mu(x) + \varepsilon \\ &\leq \int_X f(x) d\mu(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt hieraus in Verbindung mit (25) die Behauptung.

Sind endlich viele $(\xi, d\mu)$ -summierbare Funktionen f_1, \dots, f_m in $R^+(x)$ gegeben, dann ist auch ihre Summe

$$f = \sum_{k=1}^m f_k$$

$(\xi, d\mu)$ -summierbar und damit auch jede Funktion der Klasse $0(f) \cap C(X)$, die sicher jede der Klassen $0(f_k) \cap C(X)$ ($1 \leq k \leq m$) umfaßt, im allgemeinen aber größer als ihre Vereinigung sein wird. Dieses Resultat läßt sich in folgender Weise auf den Fall einer abzählbaren Menge von $(\xi, d\mu)$ -summierbaren Funktionen $f_k \in R^+(X)$ übertragen:

Satz 18. *Es sei $\mu \in \mathfrak{N}$ gegeben und $\xi = \{x_n\}$ eine $d\mu$ -glv. Folge in X , sowie $\{f_k\}$ eine Folge von $(\xi, d\mu)$ -summierbaren Funktionen in $R^+(X)$. Dann gibt es eine $(\xi, d\mu)$ -summierbare Funktion $f \in R^+(X)$ derart, daß $f_k \in 0(f)$ für alle $k \geq 1$.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 14 setzen wir

$$W_s = \bigcup_{m=1}^s V_m.$$

Für jede Funktion $g \in R^+(X)$ definieren wir

$$\|g\|_s = \sup \{|g(x)| : x \in \overline{W_s}\} \quad (s \geq 1).$$

Ferner sei

$$\sigma_k = \sup_{N \geq 1} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_k(x_n) - \int_X f_k(x) d\mu(x) \right| \quad (k \geq 1).$$

Da jede Funktion f_k $(\xi, d\mu)$ -summierbar ist, ist σ_k endlich.

Wir wählen zunächst eine monoton gegen 0 konvergierende Folge positiver Zahlen c_k derart, daß

$$(30) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_X f_k(x) d\mu(x) < \infty$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_k < \infty$$

gilt. Wir bestimmen nun induktiv eine Teilfolge $\{c_{k_s}\}$ ($k_1 < k_2 < \dots < k_s < \dots$), für die

$$(31) \quad c_{k_s} < \frac{1}{2^s(1 + \|f_s\|_s)} \quad \text{für alle } s \geq 1$$

erfüllt ist und betrachten die Funktion

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} c_{k_s} f_{k_s}.$$

Auf jeder Menge W_s ($s \geq 1$) ist f wegen (31) eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen, also ist f auf ganz X nichtnegativ reellwertig und stetig. Wegen $c_{k_s} \leq c_s$ und (30) ist f integrierbar und

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d\mu(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} c_{k_s} \int_X f_{k_s}(x) d\mu(x) \\ &\leq \sum_{s=1}^{\infty} c_s \int_X f_s(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $r \geq 1$ so bestimmt, daß

$$\sum_{s=r+1}^{\infty} c_{k_s} \sigma_s \leq \sum_{s=r+1}^{\infty} c_s \sigma_s < \varepsilon$$

gilt. Da jede Funktion f_s ($\xi, d\mu$)-summierbar ist, existiert ein $N_0 \geq 1$ derart, daß für jedes $s \leq r$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_s(x_n) - \int_X f_s(x) d\mu(x) \right| < \frac{\varepsilon}{r c_{k_s}} \quad \text{für alle } N \geq N_0$$

gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_X f(x) d\mu(x) \right| \\ &= \left| \sum_{s=1}^{\infty} c_{k_s} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_s(x_n) - \int_X f_s(x) d\mu(x) \right] \right| \\ &\leq \sum_{s=1}^r c_{k_s} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_s(x_n) - \int_X f_s(x) d\mu(x) \right| + \sum_{s=r+1}^{\infty} c_{k_s} \sigma_s \\ &\leq r \cdot \frac{\varepsilon}{r} + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \text{für alle } N \geq N_0. \end{aligned}$$

Also ist f ($\xi, d\mu$)-summierbar. Außerdem gilt

$$f_s \leq \frac{1}{c_{k_s}} f,$$

womit alles bewiesen ist.

7. Unbeschränkte Maße

Wir betrachten nun ein nicht notwendigerweise normiertes nicht triviales Borelmaß μ auf X . Ist μ endlich, dann ist das Maß

$$\mu' = \frac{1}{\mu(X)} \mu$$

normiert. Ist die Folge $\xi = \{x_n\}$ in X $d\mu'$ -glv., dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu(X)}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

für alle $\left(\xi, \frac{d\mu}{\mu(X)} \right)$ -summierbaren Funktionen f , insbesondere für alle bezüglich μ R -integrierbaren reellwertigen Funktionen auf X .

Um die Integration auch im Falle eines unendlichen Maßes μ auf die Durchschnittsbildung über Funktionswerte auf Elementen einer Folge ξ in X zurückführen zu können, gehen wir wie in Abschnitt 3 zu einem mit μ äquivalenten Maß μ' über. Um die Sätze der vorangehenden Abschnitte anwenden

zu können, müssen wir aber sicherstellen, daß die Radon-Nikodym-Ableitung $h = d\mu'/d\mu$ und die zu ihr inverse Funktion $1/h$ stetig sind ([5], §31, §32).

Hilfssatz 3. *Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben. Dann existiert eine überall positive Funktion $h \in R^+(X)$ derart, daß*

$$\int_X h(x) d\mu(x) = 1.$$

Beweis. Für jedes $V_n \in \mathfrak{B}$ sei $h_n \in L^+(X)$ eine Urysohn-Funktion, die auf V_n positiv ist. Ferner sei $\{\alpha_n\}$ eine Folge positiver Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_X h_n(x) d\mu(x) < \infty.$$

Die Funktion

$$h' = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n h_n$$

ist überall positiv, integrierbar und als Summe einer gleichmäßig konvergenten Reihe stetiger Funktionen selbst stetig. Das Integral

$$\int_X h'(x) d\mu(x)$$

ist sicher positiv, also besitzt die Funktion

$$h = \frac{1}{\int_X h'(x) d\mu(x)} h'$$

die verlangten Eigenschaften.

Ist μ endlich, dann können wir einfach

$$h = \frac{1}{\mu(X)}$$

setzen. Ist μ unendlich, dann ist die Funktion h sicher nicht konstant. Durch geeignete Wahl der Funktionen h_n können wir stets erreichen, daß h im Unendlichen verschwindet. Beispielsweise können die Funktionen h_n infolge des Zusammenfallens von Borel- und Baire-Mengen in X und X^* so gewählt werden, daß sie außerhalb von V_n verschwinden ([5], §50 C, E, §51 D). Dann gilt

$$h'(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n h_n(x) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \quad \text{für alle } x \notin \bigcup_{n=1}^N \bar{V}_n;$$

also wird auch h außerhalb geeigneter kompakter Mengen beliebig klein.

Ist $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben und h wie in Hilfssatz 3, dann ist das durch

$$\mu'(E) = \int_E h(x) d\mu(x) \quad \text{für alle } E \in \mathfrak{B}$$

definierte Borelmaß μ' normiert. Es existiert nach Satz 14 sicher eine $d\mu'$ -glv. Folge $\xi = \{x_n\}$ in X . Für diese gilt dann

$$(32) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x_n) = \int_X g(x) h(x) d\mu(x) \quad \text{für alle } g \in 0(1) \cap C(X),$$

sogar für alle bezüglich μ' R -integrierbaren reellwertigen Funktionen g auf X . Setzen wir in (32) $f = gh$, dann erhalten wir

$$(33) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f(x) d\mu(x).$$

Satz 19. *Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben und h wie in Hilfssatz 3, sowie $\xi = \{x_n\}$ eine Folge in X . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- a) Die Folge ξ ist $h d\mu$ -glv.
- b) (33) gilt für alle $f \in L(X)$.
- c) (33) gilt für alle $f \in 0(h) \cap C(X)$.
- d) (33) gilt für alle bezüglich μ R -integrierbaren reellwertigen Funktionen $f \in 0(h)$.

Beweis. Ist ξ $h d\mu$ -glv. und $f \in 0(h) \cap C(X)$ gegeben, dann gilt für die Funktion $g = f/h \in 0(1) \cap C(X)$ die Gl. (32), also für $f = gh$ die Gl. (33). Dies zeigt die Implikation a) \Rightarrow c). Wegen $L(X) \subset 0(h) \cap C(X)$ folgt b) aus c). Ist b) erfüllt und $g \in L(X)$ gegeben, dann gilt (33) für die Funktion $f = gh \in L(X)$, was auf die Gl. (32) führt. Also trifft (32) für alle Funktionen $g \in L(X)$ zu und ξ ist $h d\mu$ -glv.

Ist a) erfüllt und die Funktion $f \in 0(h)$ bezüglich μ R -integrierbar (also auch $d\mu$ -integrierbar), dann können die f einschränkenden Funktionen in $R^*(X)$ durch solche in $h \cdot R^*(X)$ ersetzt werden, d.h. die Funktion $g = f/h$ ist bezüglich μ' R -integrierbar. Da (32) für die Funktion g gilt, erhalten wir (33) für die Funktion f . Umgekehrt folgt aus der Gültigkeit von d) die Gültigkeit von b), womit alles bewiesen ist.

Der Träger eines unendlichen Borelmaßes μ ist sicher nicht kompakt. Ist μ nicht atomar, dann gibt es nach Korollar 15.1 zu jeder $h d\mu$ -glv. Folge $\xi = \{x_n\}$ in X stets eine $h d\mu$ -integrierbare Funktion $g \in R^+(X)$ derart, daß

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x_n) = \infty$$

gilt. Setzen wir $f = gh$, dann ist $f \in R^+(X)$ $d\mu$ -integrierbar und

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \infty.$$

Im allgemeinen ist es also nicht möglich, die Folge ξ so zu wählen, daß (33) für alle $d\mu$ -integrierbaren Funktionen in $C(X)$ zutrifft. Ein Gegenstück zu dieser Aussage liefert der folgende Satz.

Satz 20. Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben und $g \in R^+(X)$ $d\mu$ -integrierbar. Dann gibt es eine Funktion h wie in Hilfssatz 3 derart, daß für jede h $d\mu$ -glv. Folge $\{x_n\}$ in X

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f(x) d\mu \quad \text{für alle } f \in 0(g) \cap C(X)$$

gilt.

Beweis. Wir wählen zuerst eine Funktion h_1 wie in Hilfssatz 3 und setzen

$$h = \frac{h_1 + g}{1 + \int_X g(x) d\mu(x)}.$$

Dann ist auch h eine Funktion von der in Hilfssatz 3 beschriebenen Art. Es sei nun die Folge $\{x_n\}$ in X h $d\mu$ -glv. und die Funktion $f \in 0(g) \cap C(X)$ gegeben. Dann ist die Funktion

$$\frac{f}{h_1 + g}$$

beschränkt und

$$\frac{|f|}{h} = \frac{|f|}{h_1 + g} \left(1 + \int_X g(x) d\mu(x) \right) \leq K \left(1 + \int_X g(x) d\mu(x) \right).$$

Also liegt f in $0(h)$ und aus Satz 19 c) folgt die Behauptung.

Für eine $d\mu$ -integrierbare Funktion $f \in C(X)$ gilt (33) genau dann, wenn die Funktion f/h (ξ, h $d\mu$)-summierbar ist. In Ergänzung zu Satz 19 lassen sich daher aus den Sätzen 16, 17 und 18 die folgenden Aussagen ableiten:

Satz 21. Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben, h wie in Hilfssatz 3 und $\{x_n\}$ eine in X h $d\mu$ -glv. Folge.

a) Es gibt stets eine $d\mu$ -integrierbare Funktion $f \in R^+(X)$, für die sowohl

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f(x) d\mu(x)$$

als auch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \infty$$

gilt.

b) Gilt für eine $d\mu$ -integrierbare Funktion $g \in R^+(X)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{g(x_n)}{h(x_n)} = \int_X g(x) d\mu(x),$$

dann gilt auch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f(x) d\mu(x) \quad \text{für alle } f \in 0(g) \cap C(X).$$

c) Es sei $\{f_k\} \subset R^+(X)$ eine Folge $d\mu$ -integrierbarer Funktionen, für die

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f_k(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f_k(x) d\mu(x) \quad \text{für alle } k \geq 1$$

gilt. Dann gibt es eine $d\mu$ -integrierbare Funktion $f \in R^+(X)$ für die

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f(x) d\mu(x)$$

und $f_k \in 0(f)$ für alle $k \geq 1$ gilt.

Von Interesse ist noch der Fall eines auf der σ -Algebra aller Borelmengen gegebenen Maßes μ , das möglicherweise auch auf kompakten Mengen den Wert ∞ annimmt. Ein Beispiel hierfür ist etwa das auf der Zahlengeraden durch

$$\mu(E) = \int_E \frac{1}{|x|} dx \quad \text{für alle } E \in \mathfrak{B}$$

definierte Maß μ oder, im Falle eines unendlichen Borelmaßes μ auf X , das in Abschnitt 5 eingeführte Maß μ^* auf X^* .

Hilfssatz 4. Es sei ein Maß μ auf \mathfrak{B} gegeben und die Menge $Y \subset X$ definiert durch

$$Y = \{y \in X : \mu(V) = \infty \text{ für jede Umgebung } V \text{ von } y\}.$$

Dann ist Y abgeschlossen in X und die Einschränkung μ_1 von μ auf den lokal kompakten Unterraum $X_1 = X \setminus Y$ von X ein Borelmaß auf X_1 .

Beweis. Es sei $\bar{y} \in \bar{Y}$ und V eine beliebige Umgebung von \bar{y} . Dann ist V auch Umgebung mindestens eines Punktes von Y und daher $\mu(V) = \infty$. Es folgt $\bar{y} \in Y$ und $\bar{Y} = Y$. Die Menge $X_1 = X \setminus Y$ ist offen in X und daher lokal kompakt in der relativen Topologie. Offenbar genügt auch X_1 dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom. Eine in X_1 kompakte Menge E ist auch kompakt in X , daher ist μ_1 jedenfalls auf den Borelmengen von X_1 definiert. Jeder Punkt in E besitzt mindestens eine offene Umgebung von endlichem Maß. Da bereits endlich viele hiervon E überdecken, ist auch $\mu_1(E)$ endlich und μ_1 ein Borelmaß auf X_1 .

Für jede $d\mu$ -integrierbare Funktion $f \in C(X)$ gilt notwendigerweise $f(y) = 0$ für alle $y \in Y$, also auch

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_{X_1} f(x) d\mu_1(x).$$

Wir können die Integration $d\mu$ -integrierbarer stetiger Funktionen also auf Integration über den lokal kompakten Raum X_1 zurückführen und hierauf die bisher abgeleiteten Sätze anwenden. Insbesondere können wir die auf X_1 positive und stetige integrierbare Funktion h so konstruieren, daß sie als Funktion auf X_1 im Unendlichen verschwindet, also stetig auf X fortgesetzt werden kann. Unter anderem erhalten wir folgendes Resultat:

Satz 22. Es sei ein Maß μ auf \mathfrak{B} gegeben und Y wie in Hilfssatz 4. Dann gibt es eine nur auf Y verschwindende $d\mu$ -integrierbare Funktion $h \in R^+(X)$ und eine Folge $\{x_n\}$ in $X \setminus Y$ derart, daß

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f(x) d\mu(x) \quad \text{für alle } f \in 0(h) \cap C(X),$$

speziell also für alle $f \in L(X \setminus Y)$ gilt.

Literatur

- [1] CIGLER, J.: Folgen normierter Maße auf kompakten Gruppen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie **1**, 3—13 (1962).
- [2] CORPUT, J. G. VAN DER: Verteilungsfunktionen, 1—8. Proc. Akad. Amsterdam **38**, 813—821, 1058—1066 (1935); **39**, 10—19, 19—26, 149—153, 339—344, 489—494, 579—590 (1936).
- [3] ECKMANN, B.: Über monothetische Gruppen. Commentarii math. Helvet. **16**, 249—263 (1943/44).
- [4] FORTET, R.: Recent advances in probability theory. Surveys in applied mathematics IV. Some aspects of analysis and probability. New York: John Wiley & sons 1958.
- [5] HALMOS, P. R.: Measure Theory. New York: Van Nostrand 1956.
- [6] HARTMAN, S., u. C. RYLL-NARDZEWSKI: Zur Theorie der lokal kompakten abelschen Gruppen. Colloquium Math. **4**, 157—188 (1957).
- [7] HLAWKA, E.: Folgen auf kompakten Räumen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **20**, 223—241 (1956).
- [8] — Über C -Gleichverteilung. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **49**, 311—326 (1960).
- [9] — Funktionen von beschränkter Variation in der Theorie der Gleichverteilung. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **54**, 325—333 (1961).
- [10] — Geordnete Schätzfunktionen und Diskrepanz. Math. Annalen **150**, 259—267 (1963).
- [11] KOKSMA, J. F.: Ein allgemeiner Satz der Theorie der Gleichverteilung mod 1. Mathematica, Zutphen B **11**, 7—11, 49—52 (1942).
- [12] SCHOENBERG, I.: Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1. Math. Z. **28**, 171—199 (1928).
- [13] WEYL, H.: Über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1. Math. Ann. **77**, 313—352 (1916).

Mathematisch Centrum, Amsterdam (Niederlande)

(Eingegangen am 24. April 1964)