STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 022

Voordracht in de serie
Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit

Dr. J.J. Seidel

14 november

Euclidische en niet-Euclidische meetkunde, van metrisch standpunt beschouwd

1951

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam-O.

Rapport Z.W. 1951-022

Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

14 November; voordracht over

Euclidische en niet-Euclidische meetkunde, van metrisch standpunt beschouwd.

door
Dr J.J. Seidel.

Men kan Euclidische vlakke meetkunde opbouwen op synthetische (Euclides, Hilbert) en op analytische wijze (Descartes). Wij bespreken een derde manier, een metrische opbouw, die het begrip afstand centraal stelt.

§1. Metrische stellingen in het Euclidische vlak R_2.

De eenvoudigste metrische stelling is de driehoeksongelijkheid. Als a,b en c de zijden van een driehoek zijn, is deze stelling wegens

$$-(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = -16 \text{ Opp.}^2$$

gelijkwaardig met : genoemde determinant $\leqslant 0$.

Notatie: Punten: 1,2,3,4 etc. $[\text{afstand } i \text{ tot } j]^2 = (ij)$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12) & (13) \\ 1 & (12) & 0 & (23) \\ 1 & (13) & (23) & 0 \end{vmatrix} = D(123); \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12) & (13) & (14) \\ 1 & (12) & 0 & (23) & (24) \\ 1 & (13) & (23) & 0 & (34) \\ 1 & (14) & (24) & (34) & 0 \end{vmatrix} = D(1234);$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12) & (14) \\ 1 & (12) & 0 & (24) \\ 1 & (13) & (13) & (34) \end{vmatrix} = D(123,124)$$

Voor de punten 1,2,3,4 in de Euclidische ruimte R_3 is $D(1234) = 288$ $[\text{Inh. tetraëder } 1,2,3,4]^2$.

De volgende metrische eigenschappen gelden: In R_1 is elke $D(12) \geqslant 0$ $D(123) = 0$. In R_2 is elke $D(12) \geqslant 0$, $D(123) \leqslant 0$, $D(1234) = 0$. Met deze eigenschappen in gedachten zullen wij een abstracte ruimte definiëren, die aan de axioma's der R_2 blijkt te voldoen.

§ 2. Drie hulpstellingen omtrent determinanten.

I. Uit $D(123) \leqslant 0$, $(12) \geqslant 0$, $(13) \geqslant 0$ volgt $(23) \geqslant 0$.

II. $D(1\ldots r)D(1\ldots rij) = D(1\ldots ri)D(1\ldots rj) - D^2(1\ldots ri, 1\ldots rj)$.

III. Een symmetrische matrix heeft de rang r, als hij een niet nul zijnde hoofdminor van de orde r bevat, zodat alle hoofdminoren van de orde r+1 en van de orde r+2, die hieruit door randen verkregen worden, nul zijn.

§ 3. De ruimte R.

Wij gaan uit van drie positieve getallen (12),(23),(13) met $D(123) < 0$ en definiëren:
Een punt $r \in R$ is een greep $[(1r),(2r),(3r)]$, zodat alle $(ir) \geqslant 0$ en $D(123r) = 0$.
Voorbeeld: $[0,(12),(13)]$ = punt 1; $[(12),0,(23)]$ = punt 2.

Met $D(12)\ D(123r) = D(123)\ D(12r) - D^2(123,12r)$ volgt $D(12r) \leqslant 0$.

Afstand van $r,s \in R$ is het getal $\sqrt{(rs)}$ met (rs) uit $D(123rs) = 0$. Deze definitie is zinvol en eenduidig en maakt R tot metrische ruimte, d.w. afstand $\geqslant 0$ en dan en slechts dan = 0 als de punten samenvallen; de driehoeksongelijkheid geldt.

I. Als $r_i \in R$ dan is $D(r_1\ldots r_n)$ van de rang 4.

II. Als $1,2,3,4 \in R$, $(ix) \geqslant 0$ $(i=1\ldots 4)$ en $D(1234x)$ is van de rang ≤ 4, dan is er een punt $x \in R$ met $[\text{afstand } i \text{ tot } x]^2 = (ix)$.

4. Meetkundige begrippen in R.

Rechten. Stel $p \neq q$. De rechte $L(p,q)$ is de verzameling van alle $x \in R$ met $D(pqx) = 0$. Een rechte is bepaald door elk verschillend tweetal van zijn punten.
Beschouw $D(pqr,pqs)$. Wegens
$D(pq)\ D(pqrs) = D(pqr)\ D(pqs) - D^2(pqr,pqs)$ is $D(pqr,pqs) = 0$, als r of s op de rechte $L(p,q)$ ligt (Stewart).

Kanten. Noem r en s aan dezelfde kant van $L(p,q)$ als $D(pqr,pqs) < 0$ en aan verschillende kant als $D(pqr,pqs) > 0$. Laat $r \sim s$ betekenen: r en s aan dezelfde kant van $L(p,q)$. Wegens $D(pq)D(pqrs,pqrt) = D(pqr)D(pqs,pqt) - D(pqr,pqs)D(pqr,pqt)$ is dit een aequivalentierelatie. Er zijn twee klassen, dus een rechte L verdeelt de verzameling R-L in twee klassen.

<u>Hoeken</u>. Definiëer hoek qpr $=\varphi$ door:

$$\cos\varphi = \frac{D(pq,pr)}{\sqrt{D(pq)D(pr)}};\ 0 \leq \varphi \leq \pi.\ \text{Dan } \sin\varphi = \sqrt{\frac{-D(pqr)}{D(pq)D(pr)}}.$$

Met deze begrippen is het mogelijk te bewijzen, dat de verzameling voldoet aan de axioma's van Hilbert voor de Euclidische vlakke meetkunde.

5. De stelling van Ptolemaeus.

Wij zoeken eerst een geschikte formulering. Noem

$a = \sqrt{(14)(23)}$, $b = \sqrt{(13)(24)}$, $c = \sqrt{(12)(34)}$, dan is (§1)

$$-(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = \begin{vmatrix} 0 & (12) & (13) & (14) \\ (12) & 0 & (23) & (24) \\ (13) & (23) & 0 & (34) \\ (14) & (24) & (34) & 0 \end{vmatrix} \equiv (ij).$$

I. Als 1,2,3,4 $\in R$ op een cirkel liggen, dan is $|(ij)| = 0$.

Bewijs: Er is een punt 5 $\in R$ met $(i5) = r^2$, dus

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & (ij) & r^2 \\ 1 & r^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & (ij) & 0 \\ 1 & 0 & -2r^2 \end{vmatrix} \text{ heeft de rang 4.}$$

Als voor 1,2,3,4 $\in R$ geldt $|(ij)| = 0$, dan zijn de punten collineair of concyclisch.

Bewijs: Voor vier collineaire punten is $|(ij)| = 0$. Stel nu $D(123) < 0$.

$$P \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & (ij) & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & (ij) & 0 \\ 1 & 0 & -2x \end{vmatrix} = 0 \text{ voor alle x.}$$

Bepaal x zodat $-2xD(123) - 2(12)(23)(13) = 0$, dan is $x > 0$ en heeft (§2,III) P de rang vier. Pas vervolgens §3,II toe.

6. Het sferische vlak S_2 en het hyperbolische vlak H_2.

Twee-dimensionale sferische meetkunde (meetkunde op een bolopervlak) en hyperbolische meetkunde (meetkunde op een oppervlak van constante negatieve kromming) kan men op analoge wijze metrisch opbouwen. De driehoeksongelijkheid in S_2 resp. in H_2 laat zich wegens

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 1 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix} = 4 \sin\frac{a+b+c}{2} \sin\frac{a+b-c}{2} \sin\frac{a-b+c}{2} \sin\frac{-a+b+c}{2} \text{ en}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cosh a & \cosh b \\ \cosh a & 1 & \cosh c \\ \cosh b & \cosh c & 1 \end{vmatrix} = 4\operatorname{sh}\frac{a+b+c}{2} \operatorname{sh}\frac{a+b-c}{2} \operatorname{sh}\frac{a-b+c}{2} \operatorname{sh}\frac{-a+b+c}{2}$$

weer in determinant vorm schrijven.

Noteren we in H_2 : cosh (afstand van punt i tot punt j) = (ij) en in S_2 : cos (afstand i tot j) = (ij), en noemen we

$$\begin{vmatrix} 1 & (12) & (13) \\ (12) & 1 & (23) \\ (13) & (23) & 1 \end{vmatrix} = C(123).$$

dan is in H_2 elke $C(12) = 1-(12)^2 \leqslant 0$, $C(123) \geqslant 0$, $C(1234) = 0$ en in S_2 elke $C(12) = 1-(12)^2 \geqslant 0$, $C(123) \geqslant 0$, $C(1234) = 0$.

7. De ruimten H en S.

Ruimte H. Ga uit van (12),(13),(23), alle > 1 met $C(123) > 0$. Een punt $r \in H$ is een groep $[(1r),(2r),(3r)]$ waarbij alle $(ir) \geqslant 1$ en $C(123r) = 0$.

Ruimte S. Ga uit van (12),(13),(23), alle in absolute waarde < 1, met $C(123) > 0$. Een punt $r \in S$ is een groep $[(1r),(2r),(3r)]$, waarbij alle $|(ir)| \leq 1$ en $C(123r) = 0$. Als $r \in S$, dan is ook $[-(1r),-(2r),-(3r)]$ een punt van S, genaamd het diametrale punt van r.

Afstand van r en $s \in H$ (resp. $\in S$) is het getal arccosh (rs)(resp. arccos (rs)) met (rs) uit $C(123rs) = 0$.

Het begrip rechte $L(p,q)$, de verzameling van alle x met $C(pqx) = 0$. kan in H gedefiniëerd worden voor elk tweetal verschillende punten p en q. In S worden bovendien p en q niet diametraal verondersteld daar anders $C(pq) = 0$ zou zijn.

Hoek qpr $= \psi$ wordt in H (neem $\varepsilon = -1$) en in S(neem $\varepsilon = +1$) gedefiniëerd door

$$\cos \psi = \varepsilon \frac{C(pq,pr)}{\sqrt{C(pq)C(pr)}} ; \; 0 \leq \psi \leq \pi. \text{ Dan } \sin \psi = \sqrt{\frac{C(pqr)}{C(pq)C(pr)}}.$$

De hyperbolische en sferische eerste cosinus regel en sinusregel zijn hierin te herkennen. Het afwijkende teken in H vindt zijn oorzaak in het feit, dat in H geldt $\sqrt{C^2(pq)} = -C(pq)$.

8. De som der hoeken van een driehoek.

Beschouw drie punten a,b,c met $C(abc) > 0$. Noem de gevormde hoeken α, β en γ. Nu is:

$$(ab)\, C(abc) = C(ab)\, C(ac,bc) - C(ab,bc)\, C(ab,ac)$$

$$\frac{C(ca,cb)}{\sqrt{C(ca)C(cb)}} \frac{C(ab)}{\sqrt{C^2(ab)}} = \frac{C(ba,bc)}{\sqrt{C(ba)C(bc)}} \frac{C(ab,ac)}{\sqrt{C(ab)C(ac)}} - (ab) \frac{C(abc)}{\sqrt{C(ba)C(bc)}\sqrt{C(ab)C(ac}}$$

$$-\cos\gamma = \cos\beta\cos\alpha - (ab)\sin\beta\sin\alpha$$

Deze formule (de tweede cosinusregel), die geldig is zowel in H als in S, met dien verstande dat in H $(ab) = \cosh d_{ab} > 1$ en in S $-1 < (ab) = \cos d_{ab} < 1$ is, levert na specialisatie:

in H: $\cos(\alpha+\beta) + \cos\gamma > 0$, waaruit $\alpha+\beta+\gamma < \pi$

in S: $\cos(\alpha+\beta) + \cos\gamma < 0$, waaruit $\pi < \alpha+\beta+\gamma < 3\pi$.