

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

ZW 1951 - 023

Voordracht in de serie Actualiteiten

C.G. Lekkerkerker

24 november 1951

Stapelning van bollen



1951

Voordracht door C.G. Lekkerkerker in de serie  
Actualiteiten op 24 November 1951.

Stapelning van bollen.

1. Zij in  $R_n$  een rechthoekig assenstelsel gegeven. Laat  $K(w)$  een of andere kubus zijn, waarvan de ribben evenwijdig lopen aan de coördinaatassen en lengte  $w$  hebben.

Zij voorlopig  $w > 2$ . Wanneer we in het vervolg over bollen spreken, zonder nadere aanduiding, dan bedoelen we daarmee  $n$ -dimensionale hypersferen in  $R_n$  met straal 1. De inhoud van een bol geven we aan met  $\omega_n$ .

Een verzameling bollen, die twee aan twee geen inwendig punt gemeen hebben, terwijl elke bol geheel in  $K(w)$  bevat is, heet een  $K(w)$ -bolstapelning. Het maximale aantal bollen in een  $K(w)$ -bolstapelning is een functie van  $w$  alleen, voor te stellen door  $A(w)$ . We voeren nu in de grootheid

$$t(w) = w^{-n} A(w) \omega_n,$$

aangevende welk gedeelte van  $K(w)$  maximaal bedekt is door bollen uit een  $K(w)$ -bolstapelning. Uiteraard geldt:  $0 \leq t(w) \leq 1$ .

We bewijzen nu allereerst, dat  $t(w)$  een limiet heeft voor  $w \rightarrow \infty$ .

Bewijs

1) Zij  $k$  een natuurlijk getal.

Een kubus met ribbe  $kw$  is samen te stellen uit  $k^n$  kubussen met ribbe  $w$ ; in ieder daarvan kunnen we  $A(w)$  bollen stapelen; in de eerstgenoemde kubus kunnen we dus zeker  $k^n A(w)$  bollen stapelen. Anders gezegd:

$$A(kw) \geq k^n A(w), \text{ ofwel } t(kw) \geq t(w).$$

2) Beschouwen we nu een stapelning van  $A(kw)$  bollen in een kubus met ribbe  $kw$ ; verdelen we de kubus weer in  $k^n$  kubussen  $K_i$  met ribbe  $w$ .

We beschouwen de bollen in de stapelning, die met een bepaalde kubus  $K_i$  althans een punt gemeen hebben. Ze zijn bevat in de met  $K_i$  concentrische kubus met ribbe  $w+4$ . Zij hun aantal  $A_i$ .

Het aantal  $A_i^1$  van de bollen, die geheel in  $K_i$  bevat zijn, is hoogstens gelijk aan  $A(w)$ . De bollen, die een randpunt van  $K_i$  bevatten,  $A_i - A_i^1$  in aantal, zijn bevat in een gebied met inhoud

$$(w+4)^n - (w-4)^n < n \cdot 8(w+4)^{n-1}, \text{ dus is:}$$

$$\{A_i - A(w)\} \omega_n < (A_i - A_i^1) \omega_n < 8n(w+4)^{n-1}.$$

Er is dus ook een constante  $c_1$ , zodat geldt:

$$\begin{aligned} \{A_i - A(w)\} \omega_n &< c_1 w^{n-1}, \\ \sum A_i \omega_n &< \frac{c_1}{w} (kw)^n + k^n A(w) \omega_n, \\ t(kw) = (kw)^{-n} \sum A_i \omega_n &< \frac{c_1}{w} + t(w). \end{aligned}$$

3) Met de methode, onder 2) uiteengezet, kunnen we ook bewijzen: er is een constante  $c_2$ , zodat geldt:

$$0 < t(w) - t(kw) < \frac{c_2}{w} \text{ voor } 0 < k < 1.$$

4) Zij  $\varepsilon > 0$  gegeven. Bepaal  $w_0$ , zodat geldt:

$$\frac{c_1}{w}, \frac{c_2}{w} < \frac{\varepsilon}{4} \text{ voor } w > w_0.$$

We beschouwen nu twee willekeurige getallen  $w_1, w_2$ , beiden groter dan  $w_0$ . Zij  $k_1$  ( $k_2$ ) het kleinste gehele getal, dat minstens gelijk is aan  $w_1$  ( $w_2$ ). Dan hebben we:

$$\begin{aligned} |t(w_1) - t(k_1)| &< \frac{\varepsilon}{4}, \quad |t(w_2) - t(k_2)| < \frac{\varepsilon}{4}, \\ |t(k_1) - t(k_1 k_2)| &< \frac{\varepsilon}{4}, \quad |t(k_2) - t(k_1 k_2)| < \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

dus  $|t(w_1) - t(w_2)| < \varepsilon$ .

D.w.z.  $\lim t(w)$  bestaat.

We noemen die limiet de bedekkingsgraad  $\beta_n$ . Uit

$$t(w) \leq t(kw) \text{ volgt nog: } t(w) \leq \beta_n.$$

2. We willen  $\beta_n$  naar boven schatten. Triviaal is:  $\beta_n \leq 1$ .

We beschouwen een  $K(w)$ -bolstapeling, bestaande uit bollen  $B_1, \dots, B_s$ . Elke bol  $B_i$  daaruit vervangen we door een concentrische bol  $P_i^*$ , aan elk punt  $P$  waarvan we een gewicht  $\sigma(r_i)$  toekennen, alleen afhankelijk van de afstand  $r_i = PP_i$  van  $P$  tot het middelpunt  $P_i$  ( $i=1, \dots, s$ ). De functie  $\sigma(r)$  wordt zo gekozen, dat voor elk punt  $P$  van de kubus  $K(w)$  geldt:  $\sum_{i=1}^s \sigma(r_i) \leq 1$ .

Hulpstelling 1.

Laten  $P_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn})$  de middelpunten van enige bollen uit een bolstapeling zijn ( $j = 1, \dots, m$ ). Zij  $P$  een willekeurig punt van  $R_n$  en  $r_j$  de afstand van  $P_j$  tot  $P$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Dan geldt:

$$\sum_{j=1}^m r_j^2 \geq 2(m-1).$$

Bewijs:

Omdat afstanden invariant zijn voor translatie, mogen we onderstellen dat  $P$  de oorsprong is. Nu is voor  $j \neq k$  de afstand van de punten  $P_j$  en  $P_k$  tenminste 2.

Dus: 
$$\sum_{i=1}^n (x_{ji} - x_{ki})^2 \geq 4. \quad (j \neq k, 1 \leq j, k \leq m).$$

Voor  $j = k$  is het linkerlid van de laatste ongelijkheid 0. We sommeren nu over alle  $j$  en  $k$ , en krijgen dan:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ji}^2 + x_{ki}^2) - 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ji} x_{ki} &\geq 4m(m-1), \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (r_j^2 + r_k^2) - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_{ji} x_{ki} &\geq 4m(m-1), \\ 2m \sum_{j=1}^m r_j^2 &\geq 4m(m-1), \end{aligned}$$

waaruit de hulpstelling volgt.

We kiezen nu de functie  $\sigma(r)$  als volgt:

$$\sigma(r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}r^2 & r \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{voor } r > \sqrt{2} \end{cases}$$

Beschouw een punt  $P$  van  $K(w)$ . Laten  $B_1, \dots, B_m$  de bollen zijn, met de eigenschap dat de bijbehorende functiewaarden  $\sigma(r_i)$  in het punt  $P$  positief zijn. Dan is:

$$\sum_{i=1}^m \sigma(r_i) = \sum_{i=1}^m (1 - \frac{1}{2}r_i^2) = m - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i^2 \leq m - (m-1) = 1.$$

Elke bol  $B_i^*$  heeft straal  $\sqrt{2}$ . De bollen  $B_i^*$  zijn dus bevat in een kubus met ribbe  $w + 2(\sqrt{2}-1)$ . Voor één bol is

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} \sigma(r) dx_1 \dots dx_n &= \int_0^{\sqrt{2}} \sigma(r) d(\omega_n r^n) = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{2}r^2) d(\omega_n r^n) = \omega_n \left\{ 2 \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \frac{n}{n+2} 2^{\frac{n+2}{2}} \right\} = \frac{2\omega_n}{n+2} 2^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Er geldt derhalve:

$$\begin{aligned} (w+1)^n &> \int_{K(w)} \sum \sigma(r_i) dx_1 \dots dx_n = \\ &= A(w) \int_0^{\sqrt{2}} \sigma(r) dx_1 \dots dx_n = A(w) \omega_n \frac{2}{n+2} 2^{n/2}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$t(w) = w^{-n} A(w) \omega_n < (1 + \frac{1}{w})^n \frac{n+2}{2} 2^{-n/2},$$

$$\text{dus } \rho_n = \lim t(w) \leq \frac{n+2}{2} 2^{-n/2}, \text{ en ook } t(w) \leq \frac{n+2}{2} 2^{-n/2}.$$

3. Zij  $x$  een willekeurig punt van  $R_n$ . Liggen  $\nu$  punten van  $R_n$  niet in een  $\nu-1$ -dimensionaal hypervlak door de oorsprong, dan noemen we ze vrij gelegen ( $\nu$  een der getallen  $1, \dots, n$ ). Een verzameling punten van  $R_n$  heet een rooster, als er een punt  $x$  en  $n$  vrij gelegen punten  $a_1, \dots, a_n$  zijn, zodat de verzameling bestaat uit de punten  $z$ , die te schrijven zijn als  $z = u_1 a_1 + \dots + u_n a_n + x$  ( $u_1, \dots, u_n$  gehele getallen). We stellen het rooster voor door  $\Gamma_x$  of  $\Gamma_x [a_1, \dots, a_n]$ ; de punten  $a_1, \dots, a_n$  heten een basis te vormen van het rooster  $\Gamma_0$ .

We beschouwen voortaan een speciaal soort  $K(w)$ -bolstapelingen, nl. zulke, die bestaan uit alle bollen waarvan de middelpunten tot een of ander rooster  $\Gamma_x$  behoren, terwijl de bollen gestapeld zijn in een kubus  $K(w)$ . We spreken van een  $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling en noemen deze maximaal, als het aantal er toe behorende bollen maximaal is. Dit maximale aantal is weer een functie die alleen van  $w$  afhangt; we stellen het voor door  $A^*(w)$ . We voeren nog in de grootheid

$$t^*(w) = w^{-n} A^*(w) \omega_n.$$

Triviale schattingen voor  $t^*(w)$  zijn ( $w > 2$ ):

$$t^*(w) \leq t(w) < 1, \text{ en}$$

$$t^*(w) \geq w^{-n} \left[ \frac{w}{2} \right]^n \omega_n > w^{-n} \left( \frac{w}{4} \right)^n \omega_n = 4^{-n} \omega_n.$$

De eerste volgt uit het feit, dat elke  $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling ook een  $K(w)$ -bolstapeling is, zodat  $A^*(w) \leq A(w)$  is. De tweede volgt, als we voor  $a_1$  het punt nemen, waarvan de  $i^{\text{de}}$  coördinaat 2 is en de overige coördinaten 0 ( $i = 1, \dots, n$ ), en daarmee het rooster opbouwen; bij geschikte keuze van  $x$  bevat dan de bijbehorende  $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling  $\left[ \frac{w}{2} \right]^n$  exemplaren.

Zij  $w$  groter dan een nader te bepalen constante  $c_3$ ,  $K(w)$  een kubus met ribbe  $w$ . We beschouwen een maximale  $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling. Het rooster  $\Gamma_0$  bevat onder meer het punt  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ ; twee verschillende punten uit dit rooster hebben afstand  $\geq 2$ . De afstand van een punt  $z$  tot  $0$  geven we aan met  $|z|$ . Zij nu  $b_1 \neq 0$  een punt van  $\Gamma_0$ , waarvoor  $|b_1|$  minimaal is, en zij  $R_1$  de door  $0$  en  $b_1$  voortgebrachte deelruimte van  $R_n$ . Zij  $b_2$  een punt van  $\Gamma_0$ , zodat  $b_2 \notin R_1$  en  $|b_2|$  minimaal is, en zij  $R_2$  de door  $0, b_1, b_2$  voortgebrachte deelruimte. We definiëren vervolgens  $b_3, R_3, \dots, b_n, R_n$ . Voor  $\nu = 1, \dots, n-1$  geldt dan: van de punten van  $\Gamma_0$  buiten  $R_\nu$  heeft  $b_{\nu+1}$  de kleinste afstand tot  $0$ ; is  $y \in \Gamma_0$  en  $y \notin R_\nu$ , dan is  $|b_{\nu+1} - y| \geq |b_{\nu+1}|$  omdat ook  $b_{\nu+1} - y$  tot  $\Gamma_0$  en niet tot  $R_\nu$  behoort.

Zij verder  $\Pi_\nu$  het parallelotoop, voortgebracht in  $R_\nu$  door  $0, b_1, \dots, b_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ). De punten  $b_1, \dots, b_\nu$  brengen een deelrooster  $\Gamma_0^\nu$  van  $\Gamma_0$  in  $R_\nu$  voort, en we zien in, dat er bij een willekeurig punt  $y$  van  $R_\nu$  een punt  $z$  te vinden is, zodat geldt:

$$z \in \Gamma_0^\nu, \quad y - z \in \Pi_\nu$$

Willen we een basis van  $\Gamma_0$  hebben, dan mogen we er niet van uitgaan dat  $b_1, \dots, b_n$  een basis vormen (!). We kiezen allereerst  $a_\nu$  in  $R_\nu$ , en wel  $a_1 = b_1$ . Zijn  $a_1, \dots, a_\nu$  gekozen, dan moet voor  $a_{\nu+1}$  in elk geval gelden, dat  $b_{\nu+1}$  te verkrijgen is als een geheel-tallige lineaire combinatie van  $a_1, \dots, a_{\nu+1}$ . Dus kan de afstand van  $a_{\nu+1}$  tot  $R_\nu$  niet groter zijn dan die van  $b_{\nu+1}$  tot  $R_\nu$ . Daar vervanging van  $a_{\nu+1}$  door  $-a_{\nu+1}$  geen verandering in het voortgebrachte rooster geeft, mogen we  $a_{\nu+1}$  aan dezelfde kant van  $R_\nu$  nemen als  $b_{\nu+1}$ .

Evenzo is het geoorloofd bij  $a_{\nu+1}$  een punt uit  $\Gamma_0^\nu$  op te tellen. Krachtens het bovenstaande is het dus in elk geval mogelijk  $a_{\nu+1}$  in het parallelotoop  $\Pi_{\nu+1}$  te kiezen. Anders gezegd: er zijn getallen  $\alpha_{i\nu}$ , zodat  $1 \leq i \leq \nu \leq n$  en  $0 \leq \alpha_{i\nu} \leq 1$  is, terwijl de punten

$$a_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{i\nu} b_i \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

een basis van  $\Gamma_0$  vormen.

Na deze voorbereidingen beschouwen we weer de kubus  $K(w)$ . Zij alvast  $c_3 > 12$ . Indien de concentrische kubus  $K(w-8)$  geen bol uit de stapeling bevat, geldt:

$$A^*(w) \omega_n < w^n - (w-12)^n < 12nw^{n-1},$$

derhalve  $t^*(w) < \frac{12n}{w}$ .

Wegens  $t^*(w) > 4^{-n} \omega_n$  is dit onmogelijk, als  $c_3$  geschikt gekozen is. Dus bevat  $K(w-8)$  een bol.

Stel eens, dat  $|b_n| = |-b_n| > 4$  is. Zij  $l$  een natuurlijk getal, zodat voor het punt  $l^{-1}b_n$ , dat is het punt op het lijnstuk  $Ob_n$  met afstand  $l^{-1}|b_n|$  tot  $O$ , geldt:  $2 \leq |l^{-1}b_n| \leq 4$ . We vormen nu uit  $\Gamma_0$  het rooster  $\Gamma_0'$ , door daarin het basispunt  $a_n$  te vervangen door  $l^{-1}a_n$ . Dan omvat  $\Gamma_0'$  het oorspronkelijke rooster  $\Gamma_0$ , terwijl b.v.  $l^{-1}b_n$  in  $\Gamma_0'$  voorkomt. Het is duidelijk, dat we de gegeven bolstapeling kunnen uitbreiden tot een andere  $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling, die meer bollen in  $K(w)$  heeft.

Conclusie:  $|b_\nu| \leq 4$  voor  $\nu = 1, \dots, n$ . En dan ook:  $|a_\nu| \leq 4\nu$ . Het rooster  $\Gamma_0$  bezit dus een begrensde basis.

Stelling.

Het resultaat van no. 1 geldt ook voor  $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapelingen.

Bewijs.

Zij  $K_0 = K(8n)$  de kubus met ribbe  $8n$  en  $O$  tot middelpunt, zij  $w > c_3$ , en  $k$  een natuurlijk getal. Ons eerste doel is  $A^*(w)$  en  $A^*(kw)$  te vergelijken. Daartoe verdelen we  $K(kw)$  in  $k^n$  kubussen  $K(w)$  en nemen een maximale  $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling bij een van die kubussen. Is  $y$  een willekeurig punt van  $R_n$ , dan kunnen we  $\Gamma_y$  uit  $\Gamma_x$  verkrijgen, door verschuiven over een vector, gelegen in  $K_0$ . Daaruit volgt, dat elke kubus  $K(w)$  uit die verdeling tenminste  $A^*(w-8n)$  bollen bevat, waarvan het middelpunt tot  $\Gamma_x$  behoort. Dus  $A^*(kw) \geq k^n A^*(w-8n)$ .

Op dezelfde wijze als in no. 1 zien we in:

$$A^*(kw) \leq k^n A^*(w+4).$$

Met dezelfde redenering als eerst, alleen met andere constanten dan  $c_1$  en  $c_2$ , volgt: ook  $t^*(w)$  heeft een limiet voor  $w \rightarrow \infty$ .

Deze limiet stellen we voor door  $\rho_n^*$ . Er geldt blijkbaar:  $\rho_n^* \leq \rho_n$ .

Opmerking 1. Het probleem, of hier het gelijktteken of het ongelijktteken staat, is voor  $n > 2$  nog onopgelost.

Opmerking 2. Een voorbeeld van een rooster, waarbij de hierboven gevormde "minimumvectoren"  $b_1, \dots, b_n$  geen basis van het rooster vormen, heeft men ( $n \geq 5$ ) in het rooster, voortgebracht door de punten  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ . Het laatste heeft afstand  $\sqrt{\frac{n}{4}} > 1$  tot 0, terwijl er  $n$  vrij gelegen punten zijn met afstand 1 tot 0, n.l. de eerste  $n-1$  van de opgeschreven punten en nog  $(0, 0, \dots, 1)$ .

4. Verband met diophantische approximaties. Zij gegeven een positief definitieve reële kwadratische vorm in  $n$  variabelen:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}).$$

We interesseren ons voor de onderste grens  $M$  van deze vorm voor gehele waarden der variabelen, niet allen nul. Zij  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Eerst tonen we aan, dat de onderste grens  $M$  aangenomen wordt. We merken daartoe op dat  $Q(x)$  continu is en  $\neq 0$  voor  $x \neq 0$ . Dan neemt  $Q$  op de eenheidsbol  $\sum x_i^2 = |x|^2 = 1$  een minimum  $q$  en een maximum  $p$  aan, waarbij  $p \geq q > 0$  is. Het lichaam  $Q(x) \leq q$  is bevat in de bol  $|x|^2 \leq 1$ , dus  $Q(x) < M+1$  in  $|x|^2 \leq \frac{M+1}{2q}$ . Slechts eindig veel punten  $x$  met gehele coördinaten voldoen aan  $|x|^2 \leq \frac{M+1}{q}$ . Daaronder is een punt  $x$  met  $Q(x) = M$ .

Onder de determinant  $d(\Gamma)$  van een rooster  $\Gamma_x$  verstaan we de absolute waarde van de determinant van de coördinaten van  $n$  punten, die een basis van  $\Gamma_0$  vormen. Die determinant is onafhankelijk van de gekozen basis, omdat twee bases van eenzelfde rooster  $\Gamma_0$  door een geheeltallige unimodulaire transformatie in elkaar over te voeren zijn. Er geldt:  $d(\Gamma) > 0$ .

We laten nu zien, dat bij een  $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling de grootheid  $d(\Gamma)$  tenminste gelijk is aan  $\omega_n (\rho_n^*)^{-1}$ . Zij  $\omega_n^{-1} d(\Gamma) = \alpha$ ,  $\Gamma_0$  een rooster, dat bij een bolstapeling behoort en  $K(w)$  een kubus. Beschouw een basis van  $\Gamma$ ; die is bevat in een kubus  $K_1: |x| \leq c_4$  met 0 tot middelpunt. Zij  $\Pi$  het parallelotoop, opgebouwd op die basis. We kunnen de ruimte  $R_n$  opvullen met parallelotopen, die uit  $\Pi$  ontstaan door verschuiven over roostervectoren. We beschouwen nog de kubussen  $K(w-2), K(w-2-4c_4), K(w-2+4c_4)$ , concentrisch met  $K(w)$ ; we onderstellen hierbij  $w > 2+4c_4$ . De parallelotopen, die een punt met  $K(w-2)$  gemeen hebben, zijn bevat in  $K(w-2+4c_4)$ ; bevatten ze een randpunt van  $K(w-2)$ , dan liggen ze buiten  $K(w-2-4c_4)$ . Merken we op, dat de inhoud van  $\Pi$  gelijk is aan  $d(\Gamma)$ , dan volgt, dat het aantal punten van  $\Gamma_0$ , dat tot  $K(w-2)$  behoort, en dus het aantal bollen uit de  $\Gamma_0 - K(w)$ -bolstapeling te schrijven is als:  $w^n \{ d(\Gamma)^{-1} + O(w^{-1}) \}$ . Dan is  $A^*(w) \geq w^n \{ d(\Gamma)^{-1} + O(w^{-1}) \}$ ,  $t^*(w) \geq \omega_n \{ d(\Gamma)^{-1} + O(w^{-1}) \} = \alpha^{-1} + O(w^{-1})$ . Dus  $\rho_n^* = \lim t^*(w) \geq \alpha^{-1}$ ;  $d(\Gamma) \geq \omega_n (\rho_n^*)^{-1}$ .

Vervolgens laten we zien, dat er een rooster is met determinant  $\omega_n (\rho_n^*)^{-1}$ , dat bij een bolstapeling behoort. Laat w een rij positieve getallen  $w_\mu$  doorlopen met limiet  $\omega$ . Bij elk getal  $w_\mu$  kiezen we een kubus  $K(w_\mu)$  en daarbij een maximale bolstapeling, zeg een  $\Gamma_{x_\mu}^*$ - $K(w_\mu)$ -bolstapeling. Elk rooster  $\Gamma_0^*$  heeft een basis, bevat in de kubus  $K_0 = K(8n)$  met 0 tot middelpunt. Dan is er een rooster  $\Gamma$ , waartoe zich de roosters  $\Gamma_0^*$  verdichten (men kan de verzameling van de roosters met zo'n basis bij geschikte metriek opvatten als een compacte metrische ruimte). Het is duidelijk, dat  $\Gamma$  bij een bolstapeling behoort: twee verschillende punten van  $\Gamma$  hebben afstand  $\geq 2$ .

Verder is  $t^*(w_\nu) = \omega_n d(\Gamma_\nu^*)^{-1} + O(w_\nu^{-1})$ , dus

$$\rho_n^* = \lim t^*(w_\nu) = \omega_n \{d(\Gamma)\}^{-1}.$$

Keren we weer terug tot onze kwadratische vorm. Zij d de absolute waarde van de coëfficiëntenmatrix. Door een substitutie  $x = Ay$  gaat Q over in  $\sum_{i=1}^n y_i^2$  en de punten met gehele coördinaten in de punten van een rooster met determinant  $\frac{1}{a}$  als a de absolute waarde van determinant A is. Er geldt:  $a^{-2} = d$ ,  $a > 0$ . We voeren nog de substitutie  $y_i = \frac{1}{\sqrt{M}} z_i$  uit. Dan worden we gevoerd op een rooster  $\Gamma$  met determinant  $\frac{1}{a} (\frac{2}{\sqrt{M}})^n$  en voor een punt  $z = (z_1, \dots, z_n) \neq 0$ , dat tot  $\Gamma$  behoort, is

$\sum_{i=1}^n z_i^2 \geq 4$ . Dientengevolge behoort  $\Gamma$  bij een bolstapeling. Er geldt dus:  $d(\Gamma) = \frac{1}{a} (\frac{2}{\sqrt{M}})^n \geq \omega_n (\rho_n^*)^{-1}$ . Anderzijds volgt uit de vorige alinea, dat er kwadratische vormen bestaan, zodat in de laatste formule het gelijkteken staat.

Conclusie:  $a M \leq \omega_n^{-1} 2^n \rho_n^*$ , ofwel

$$d^{-1/n} M \leq (\omega_n^{-1} 2^n \rho_n^*)^{2/n}; \quad \text{de grootheid } d^{1/n} M, \text{ genomen}$$

over alle kwadratische vormen, heeft een bovenste grens, die aangenomen wordt. We noemen die bovenste grens  $\gamma_n$ . Dan is  $\gamma_n = \max M(Q) d^{1/n}$  en ons uiteindelijke resultaat is:

er bestaat een wereldconstante  $\gamma_n$  met de volgende eigenschap: bij elke positief definitie kwadratische vorm Q in n variabelen bestaat er een stel gehele getallen  $x_1, \dots, x_n$ , niet allen nul, zodat  $Q(x_1, \dots, x_n) \leq \gamma_n d^{1/n}$  is, terwijl er geen kleinere constante met die eigenschap bestaat; de constante  $\gamma_n$  is met  $\rho_n^*$  verbonden door de betrekking:  $\gamma_n = 4(\omega_n^{-1} \rho_n^*)^{2/n}$ .

Een schatting van  $\rho_n^*$  brengt een schatting van  $\gamma_n$  met zich mee, en omgekeerd. We weten nu uit no. 2, dat geldt:

$$\gamma_n \leq 4(\omega_n^{-1} \frac{n+2}{2} 2^{-n/2})^{2/n} = 2 \omega_n^{-2/n} (\frac{n+2}{2})^{2/n}.$$

Uit  $\omega_n = 2\pi^{n/2} \{\Gamma(\frac{n+1}{2})\}^{-1}$  volgt  $\omega_n^{-2/n} \approx \frac{1}{\pi} \frac{n}{2e}$ , zodat de voor  $\gamma_n$  gevonden bovengrens zich voor  $n \rightarrow \infty$  gedraagt als  $\frac{n}{\pi e}$ .



5. Het is van belang ook een benedengrens voor  $\gamma_n$ , en dus ook voor  $\rho_n^*$  te hebben. We zullen die niet opsporen, maar vermelden alleen, langs welke wegen dit kan gebeuren. Laat  $E$  een bol zijn in  $R_n$  met  $O$  tot middelpunt en volume  $< 1$ . Zij  $\rho(x)$  de bijbehorende karakteristieke functie, d.w.z.  $\rho(x) = 1$  of  $0$ , al naar gelang  $x$  een punt van de bol is, of er buiten ligt. Zij  $\Gamma$  een rooster, waartoe  $O$  behoort. We kunnen nu enerzijds, als  $f(x)$  een tot op zekere hoogte willekeurige functie in  $R_n$  is, de integraal  $I = \int_{R_n} f(x) dx_1 \dots dx_n$ , anderzijds de som  $S(\Gamma) = \sum f(g)$ , uitgestrekt over de punten  $g \neq O$ , die tot  $\Gamma$  behoren, bekijken.

Volgens een stelling van Minkowski-Hlawka-Siegel bestaat er nu een rooster  $\Gamma_0$  met determinant 1, zodat geldt:  $S(\Gamma_0) < I$ . We passen dit toe op  $f(x) = \rho(x)$ . Dan is  $I < 1$  en  $\sum f(g) = 1$  of  $0$ . Dus behoren er geen roosterpunten  $\neq O$  uit  $\Gamma_0$  tot  $E$ .

Zij nu  $E$  de bol met straal 2 en  $O$  tot middelpunt, dus volume  $2^n \omega_n$ . Uit het bovenstaande volgt dan: er is een rooster  $\Gamma^*$  met determinant  $2^n \omega_n$ , zodat behalve  $O$  geen enkel punt van  $\Gamma^*$  binnen  $E$  ligt. Uit de beschouwingen in 4. volgt dan:  $\omega_n (\rho_n^*)^{-1} \leq 2^n \omega_n$ .

Dus  $\rho_n^* \geq 2^{-n}$ . Verder volgt dan:

$$\rho_n \geq 2^{-n}, \gamma_n \geq 4(2^n \omega_n)^{-2/n} = \omega_n^{-2/n} \frac{n}{2\pi e}.$$

Men is er in geslaagd de voor  $\rho_n^*$  gevonden grenzen iets dichterbij elkaar te brengen, maar niet noemenswaard. Vooralsnog bestaat er een behoorlijke kloof tussen die grenzen.

#### Literatuur:

- R.A. Rankin, On the closest packing of spheres in  $n$  dimensions, Annals of Math. 48, 1062-81.
- E. Hlawka, Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper, Monatshefte für Math. 53, 81-131.