STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1957-023

Over randwaarden van analytische functies en Cauchy-hoofdwaarden

J.F. Koksma, C.G. Lekkerkerker en A.H.M. Levelt

1957

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Over randwaarden van analytische functies en Cauchy-hoofdwaarden

door

J.F. Koksma, C.G. Lekkerkerker en A.H.M. Levelt

§ 1. Het volgende onderzoek is ontstaan na lezing van een door Prof. Koiter opgesteld rapport [1], handelende over een zeker randwaardeprobleem voor complexe kwasi-dubbelperiodieke functies. Daarbij is in het complexe vlak een dubbelperiodiek systeem van disjuncte (gesloten) contouren gegeven, en gaat het erom een complexe functie $f(z)$, die analytisch en kwasi-dubbelperiodiek is in het gebied buiten deze contouren, te bepalen, indien de randwaarden van $f(z)$ op de contouren gegeven zijn. Prof. Koiter geeft voor die randwaarden zowel nodige voorwaarden als ook voldoende voorwaarden aan, opdat het probleem een oplossing heeft, en stelde ons de vraag of zijn resultaten in de wiskundige litteratuur voorkwamen.

Zijn beschouwingen zijn gebaseerd op de belangwekkende gedachte om in de integraalformule van Cauchy de factor $(z-\zeta)^{-1}$ te vervangen door een uitdrukking $F(z,\zeta)$ die eveneens een pool heeft in $z=\zeta$, doch kwasi-dubbelperiodiek is in ζ. Hoewel de door Prof. Koiter gevonden voldoende voorwaarden voor de randfunctie praktisch ruimschoots bevredigend zijn, stelden wij ons uit theoretisch oogpunt de vraag of deze niet konden worden verzwakt. Daarbij bleek dat dezelfde vraag reeds interessant is voor het geval van de integraalformule van Cauchy zelf. Heeft men ze daar opgelost, dan laten zich de resultaten op het dubbelperiodieke geval systematisch overdragen. We beperken ons dus vooreerst tot het genoemde eenvoudige geval en geven aan het slot de overdracht op het dubbelperiodieke.

Het gaat om stellingen van het volgende type:

Zij W een enkelvoudige gesloten contour, G het binnengebied van W en G^* het buitengebied van W. Dan geldt:

a. Als $f(z)$ analytisch is op G en continu is op de afsluiting $G \cup W$ van G, dan is

---

1) W.T. Koiter, Generalized plane stress in an infinite plate with a doubly periodic set of equal holes. Publikatie van het Laboratorium voor Toegepaste Mechanica der Technische Hogeschool te Delft.

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{\varphi(w)}{w-z}\, dw = 0 \qquad (z \in G^*).$$

Hierin is $\varphi(w) = f(w)$ voor $w \in W$.

b. Als $\varphi(w)$ op W gegeven is en (voor iedere $z \in G^*$) aan (1) voldoet, dan is er onder zekere algemene voorwaarden (die zowel $\varphi(w)$ als W kunnen betreffen) een op G analytische functie $f(z)$ die op W de randwaarde $\varphi(w)$ heeft.

In het geval van Prof. Koiter wordt voor de functie $\varphi(w)$ steeds het voldoen aan een Hölder-voorwaarde geëist, zodat de zgn. formules van Plemelj toepasbaar zijn. Toen wij hem erop opmerkzaam maakten dat o.i. die voorwaarde bij bewering b kan worden vervangen door de voorwaarde der continuïteit, wees hij ons erop dat Muskhelishvili in § 18 van zijn boek "Singular Integral Equations"eveneens een soortgelijke bewering als b aantoont, waarbij hij van $\varphi(w)$ slechts continuïteit eist. Echter wordt in genoemd boek het begrip randwaarde van $f(z)$ in een punt w van W opgevat in de beperkte zin dat de nadering van z tot w plaats vindt binnen een zekere hoek. In dit rapport zullen we ons een dergelijke beperking niet opleggen. Behalve de beweringen a en b zullen ook andere kwesties worden besproken.

Hoewel dit rapport een afgesloten geheel vormt, zijn er tijdens het onderzoek nog een aantal vragen gerezen, waarop in een publikatie zal worden teruggekomen. Met name zullen we ons daarbij distanciëren van de voorwaarde (1).

Het is bij de opstelling van dit stuk gebleken dat enige maanden geleden op de afdeling toegepaste wiskunde de Heren Van Dantzig en Lauwerier op een soortgelijke probleemstelling zijn gestuit. In rapport TW 39 geeft de Heer Lauwerier een aantal zeer algemene en belangwekkende stellingen, die zich echter nergens met de onze dekken, daar ze alle het karakter dragen van "bijna overal"-stellingen. Daar staat dan ook tegenover dat de Heer Lauwerier zijn gegevens veel ruimer kiest dan hier wordt gedaan.

§ 2. In het volgende is W een gesloten weg zonder dubbelpunten, bestaande uit een eindig aantal continu differentiëerbare krommen (met inbegrip van de eindpunten). Zij G het binnengebied en G^* het buitengebied van G. Dan geldt:

<u>Stelling 1.</u> Als $\varphi(w)$ continu is op W en voldaan is aan (1), dan bestaat er een op G analytische functie f(z) met de volgende eigenschap: is w_o een punt W en geen keerpunt (d.w.z. W heeft in w_o geen knik van $\pm\pi$), dan bestaat bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zó, dat $|f(z)-\varphi(w_o)| < \varepsilon$ als $z \in G$ en $|z-w_o| < \delta$.

<u>Bewijs</u>. Laat op W een oriëntering gegeven zijn zó dat G aan de linkerkant ligt, en laat daarbij de linker- en de rechterraaklijn in het punt w_o een hoek θ maken, gerekend tegen de wijzers van de klok in; voor $\theta=0$ is er een eenduidig bepaalde raaklijn. Omdat w_o geen keerpunt is, is dan $|\theta|<\pi$. We stellen $\delta_o = \frac{1}{4}(\pi - |\theta|)$.
Door een rotatie en een translatie uit te voeren kunnen we bereiken dat $w_o=0$ en dat de rechterraaklijn T_r in w_o met de positieve reële as samenvalt. We trekken vanuit O halfrechten B_r en B_l, die een hoek δ_o maken met T_r resp. T_l (linkerraaklijn in w=0). Zij verder G_1 het deel van G beneden B_r, G_2 het deel beneden B_l en G_3 het resterende deel (zie fig.1).

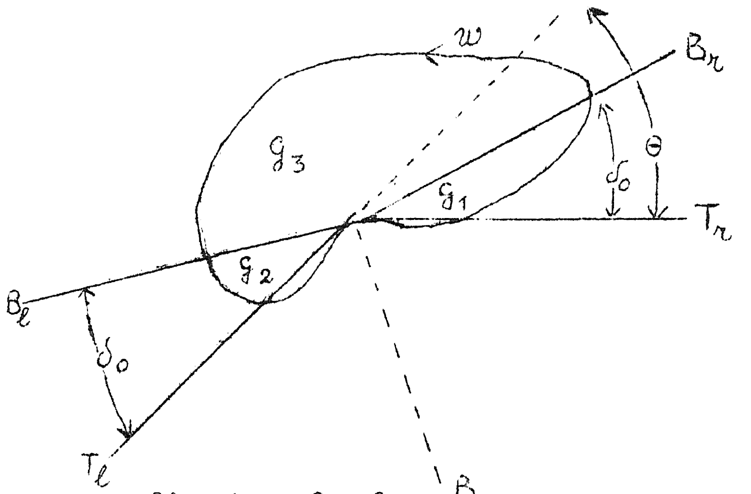

fig.1 $\theta < 0$

Zij $\varepsilon > 0$. Er is een deelboog van de kromme W, rechts van het punt w_o, waarop arg w slechts weinig varieert. Evenzo is er een deelboog links van w_o met dezelfde eigenschap. Op deze deelbogen kunnen we Re w resp. Re $e^{i\theta}w$ als parameter kiezen. Verder wordt een voldoend kleine cirkel om w_o niet door andere delen van de kromme gesneden, en is $\varphi(w)$ continu. Het is nu duidelijk, dat er een cirkel C_1 om O, een positief getal δ_1 en een parametervoorstelling w=w(t) van W bestaan, zodanig, dat aan de volgende eisen voldaan is:

1. $w(0) = w_o = 0$,
2. voor de punten w(t) die in C_1 liggen is $|t| < \delta_1$,
3. $$w(t) = \begin{cases} t + iv(t) & \text{voor } 0 < t < \delta_1 \\ e^{-i\theta}(t + iv(t)) & \text{voor } -\delta_1 < t < 0 \end{cases},$$
4. $|v(t)|$ en $|v'(t)|$ zijn kleiner dan een geschikt te kiezen getal ε_1, als $|t| < \delta_1$,
5. $|\varphi(w(t)) - \varphi(0)| < \varepsilon$, als $|t| < \delta_1$.

Zij C_2 een cirkel om 0 met straal $\delta < \frac{1}{3}\delta_1$.

Tenslotte definiëren we, voor $z \notin W$,

(2) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_W \frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw.$$

Dan is $f(z)$ analytisch op G en krachtens het gegeven $f(z)=0$ op G^*. We nemen nu voor z een willekeurig punt in $C_2 \cap G$ en leiden een schatting af voor $|f(z)-\varphi(0)|$. We onderscheiden drie gevallen.

I. $z \in C_2 \cap G_1$. Dan is $\tau = \mathrm{Re}\, z > 0$ en is z te schrijven in de vorm $z = w(\tau) + i\sigma$ met $\sigma > 0$, wegens 4. Daarbij ligt $w(\tau)$ in $2C_2$ en is $\sigma < 2\delta$. Aan z voegen we toe het punt z^* bepaald door
$$z^* = w(\tau) - i\sigma;$$
z^* ligt in $2C_2$ en ook in G^*, op grond van 4. We noemen verder W_1 het gedeelte van W tussen de punten $w(-\delta_1)$ en $w(\delta_1)$ en W_2 het resterende deel van W. De functie $\varphi(w)$ is begrensd, zodat $|\varphi(w)| < M$ op W_2. We hebben nu
$$f(z) - \varphi(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_W \frac{\varphi(w)-\varphi(0)}{w-z}\,dw =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_W \frac{\varphi(w)-\varphi(0)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_W \frac{\varphi(w)-\varphi(0)}{w-z^*}\,dw =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_W \frac{(z-z^*)}{(w-z)(w-z^*)}\left\{\varphi(w)-\varphi(0)\right\}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{W_2}.$$

De tweede integraal in het laatste lid wordt gemajoreerd door
$$\frac{L}{2\pi}.2M\,\frac{2\sigma}{(\delta_1-\delta)(\delta_1-2\delta)} < \frac{18L.M.\delta}{\pi\delta_1^2},$$
waarin L de lengte van W is.

Voor de eerste integraal hebben we
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{W_1}\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_1}^{\delta_1} \frac{z-z^*}{(w(t)-z)(w(t)-z^*)}\left\{\varphi(w(t))-\varphi(0)\right\} w'(t)\,dt\right|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\left|\frac{z-z^*}{(w(t)-z)(w(t)-z^*)}\right|dt =$$
$$= \frac{\varepsilon}{\pi}\left(\int_0^{\delta_1} + \int_{-\delta_1}^{0}\right) = \frac{\varepsilon}{\pi}(I_1 + I_2).$$

Daar wegens 3 en 4, bij geschikte keuze van ε_1,

$$w(t) - w(\tau) = (t-\tau)(1+\eta),$$

waarin $|\eta| < \frac{1}{4}$, is

$$I_1 = \int_0^{\delta_1} \frac{2\sigma\, dt}{\left|\{w(t)-w(\tau)\}^2+\sigma^2\right|} = \int_0^{\delta_1} \frac{2\sigma\, dt}{\left|(t-\tau)^2(1+\eta)^2+\sigma^2\right|} <$$

$$< \int_0^{\delta_1} \frac{4\sigma}{(t-\tau)^2+\sigma^2}\, dt < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\sigma\, dt}{(t-\tau)^2+\sigma^2} = 4\pi .$$

Verder is wegens $\theta \neq \pm\pi$,

$$-w(-t) + w(\tau) = \{w(\tau)-w(0)\} + \{w(0)-w(-t)\} =$$

$$= \tau(1+\eta_1) + t(e^{-i\theta}+\eta_2) = (te^{-i\theta}+\tau)(1+\eta). \quad (t>0),$$

waarbij $|\eta_1|$ en $|\eta_2|$ door geschikte keuze van ε_1 (op grond van 4) zó klein gemaakt kunnen worden dat $|\eta| < \frac{1}{4}$. We vinden dan

$$I_2 = \int_0^{\delta_1} \frac{2\sigma\, dt}{\left|\{w(-t)-w(\tau)\}^2+\sigma^2\right|} = \int_0^{\delta_1} \frac{2\sigma\, dt}{\left|(te^{-i\theta}+\tau)^2(1+\eta)^2+\sigma^2\right|} <$$

$$< \int_0^{\delta_1} \frac{4\sigma\, dt}{\left|(te^{-i\theta}+\tau)^2+(1+\eta)^{-2}\sigma^2\right|} .$$

Daar $z \in G_1$ en $\sigma = \mathrm{Im}(z-w(\tau))$, kunnen we op grond van 4. schrijven $\sigma = \alpha\tau$, waarbij $0 < \alpha < \mathrm{tg}\, \frac{4}{3}\delta_0 = \mathrm{tg}\, \frac{1}{3}(\pi - |\theta|)$. Voor alle $t > 0$ is dan

$$\left|(te^{-i\theta}+1) \pm i\alpha(1+\eta)^{-1}\right| \text{ groter dan } \tfrac{1}{2}\alpha$$

voor beide tekens en $> \sin\delta_0$ voor één van beide tekens.

Dus

$$I_2 < \int_0^{\infty} \frac{4\alpha\tau\, dt}{\left|(te^{-i\theta}+\tau)^2+(1+\eta)^{-2}\alpha^2\tau^2\right|} = \int_0^{\infty} \frac{4\alpha\, dt}{\left|(te^{-i\theta}+1)^2+(1+\eta)^{-2}\alpha^2\right|}$$

$$= \int_0^4 + \int_4^{\infty} < \frac{16\alpha}{\frac{1}{2}\alpha \sin\delta_0} + \int_4^{\infty} \frac{4\alpha\, dt}{(t-1)^2-2} < 64\left(\alpha + \frac{1}{\sin\delta_0}\right).$$

Vatten we de gevonden schattingen voor $\frac{1}{2\pi i}\int_{W_2}$, I_1 en I_2 samen, dan verkrijgen we

$$|f(z)-\varphi(0)| < \frac{18.L.M.\delta}{\pi\delta_1^2} + \frac{\varepsilon}{\pi}\left(4\pi + 64\left(\alpha + \frac{1}{\sin\delta_0}\right)\right) < K.\varepsilon ,$$

als δ geschikt gekozen wordt, waarbij K een constante is, die alleen van δ_0 en δ_1 afhangt.

II. $z \in C_2 \cap G_2$. Dit geval laat zich analoog behandelen.

III. $z \in C_2 \cap G_3$. We kiezen nu z^* op de bissectrix B van T_l en T_r zodanig, dat $|z| = |z^*|$. We hebben weer

$$f(z) - \varphi(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{z-z^*}{(w-z)(w-z^*)} \left\{ \varphi(w) - \varphi(0) \right\} dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{W_1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{W_2} .$$

Evenals in geval I is

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{W_2} \right| < \frac{18\ L.M.}{\pi \delta_1^2} .$$

Verder is voor $w \in W_1$

$$\left| \arg w - \arg z \right| > \tfrac{1}{2} \delta_0 .$$

Dus als we stellen $|z| = \rho$, dan is

$$|w-z| > \rho \sin \tfrac{1}{2} \delta_0 ,$$

en evenzo $\quad |w-z^*| > \rho \sin \tfrac{1}{2} \delta_0 .$

Daaruit volgt

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{W_1} \right| < \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \left| \frac{z-z^*}{(w(t)-z)(w(t)-z^*)} \right| dt$$

$$= \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-2\rho}^{2\rho} + \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\delta_1}^{-2\rho} + \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{2\rho}^{\delta_1}$$

$$< \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{4\rho \cdot 2\rho}{\rho^2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta_0} + \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_{2\rho}^{\delta_1} \frac{2\rho\, dt}{(\frac{1}{4} t)^2}$$

$$< \varepsilon \cdot \left\{ \frac{8}{\pi \sin^2 \frac{1}{2} \delta_0} + \frac{32}{\pi} \right\} .$$

Ook hier vinden we dus

$$\left| f(z) - \varphi(0) \right| < K_1 . \varepsilon .$$

Hiermee is de stelling bewezen.

Als volgende kwestie behandelen we de vraag of de hoofdwaarde-integraal

$$(3) \qquad \text{H.W.}\ \frac{1}{2\pi i}\int_W \frac{\varphi(w)}{w-w_0}\,dw \qquad (w_0 \in W),$$

bestaat. Eisen we van $\varphi(w)$ slechts continuïteit dan hoeft de hoofdwaardeintegraal niet te bestaan. In het hier beschouwde geval, waarin aan (1) voldaan is, bestaat hij echter wel. Met andere woorden we hebben:

Stelling 2. Zij $\varphi(w)$ continu op W en veronderstel dat aan (1) voldaan is. Zij w_0 een punt van W, dat geen keerpunt is. Dan bestaat de integraal (3) en is bovendien gelijk aan $\frac{1}{2}\varphi(w_0)$.

Bewijs: We mogen aannemen, dat $w_0=0$ en dat de positieve reële as langs de bissectrix van de hoek θ tussen T_l en T_r valt. Dan loopt de positieve imaginaire as door G. We mogen verder veronderstellen dat

$$\varphi(0) = 0,$$

omdat de stelling zeker juist is als de functie $\varphi(w)$ constant is.

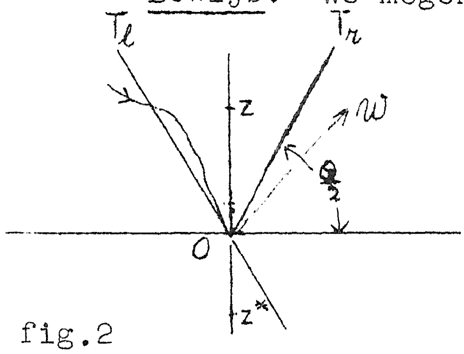

fig.2

We passen nu stelling 1 toe, zij het niet in zijn volle zwaarte. Zij $z=i\rho$ een variabel punt op de positieve imaginaire as in de omgeving van O, en zij $z^*= -z=-i\rho$. Dan geldt, als f(z) gedefinieerd is door (2),

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \varphi(0) = 0, \quad f(z^*) = 0.$$

Zij vervolgens ε een positief getal. Er is een positief getal δ en parametervoorstelling $w=w(t)$ van W in een omgeving van O zó,dat de volgende eigenschappen gelden

1. $w(0) = w_0 = 0$
2. $w(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}i\theta}t(1+iy(t)) \text{ voor } t>0 \\ e^{-\frac{1}{2}i\theta}t(1+iy(t)) \text{ voor } t<0 \end{cases}$
3. δ is zo klein, dat we voor $|t|<\delta$ kunnen schrijven $(1+iy(t))^{-2}=1+\eta(t)$ met $|\eta(t)|<\frac{1}{4}|1+e^{i\theta}|$
4. $|\varphi(w(t))| < \varepsilon$, als $|t|<\delta$.

We hebben

$$f(z) = f(z) + f(z^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_W \varphi(w) \frac{2w}{w^2-z^2}\, dw.$$

We noemen weer W_1 het gedeelte van W tussen de punten $w(-\delta)$ en $w(\delta)$ en W_2 het resterende deel van W. Dan geldt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{W_2} \varphi(w) \frac{2w}{w^2-z^2}\, dw \rightarrow \frac{1}{\pi i} \int_{W_2} \frac{\varphi(w)}{w}\, dw \text{ als } z \rightarrow 0,$$

omdat de integraal in het linkerlid continu afhangt van z. Verder is voor $\rho < \frac{1}{3}\delta$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{w(3\rho)} \varphi(w) \frac{2w\, dw}{w^2-z^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{3\rho} \varphi(w(t)) \frac{2w(t)w'(t)}{w^2(t)-z^2}\, dt \right|$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{3\rho} \left| \frac{t}{e^{i\theta}t^2(1+iy(t))^2+\rho^2} \right| dt < \frac{4\varepsilon}{\pi} \int_0^{3\rho} \left| \frac{t}{e^{i\theta}t^2+(1+\eta(t))\rho^2} \right| dt$$

$$= \frac{4\varepsilon}{\pi} \int_0^3 \frac{u}{|e^{i\theta}u^2+1+\eta(\rho u)|}\, du < \frac{4\varepsilon}{\pi} \int_0^3 \frac{u\, du}{|e^{i\theta}u^2+1| - \frac{1}{4}|e^{i\theta}+1|}$$

$$< \frac{4\varepsilon}{\pi} \int_0^3 \frac{u\, du}{\frac{1}{4}|e^{i\theta}+1|} < \frac{54\varepsilon}{\pi|e^{i\theta}+1|},$$

daar voor alle $u > 0$ geldt $|e^{i\theta}u^2+1| > \frac{1}{2}|e^{i\theta}+1|$.
Evenzo is

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{w(-3\rho)}^{0} \varphi(w) \frac{2w\, dw}{w^2-z^2} \right| < \frac{54\varepsilon}{\pi|e^{i\theta}+1|}.$$

Tenslotte is

$$\int_{w(3\rho)}^{w(\delta)} \varphi(w) \frac{2w}{w^2-z^2}\, dw - \int_{w(3\rho)}^{w(\delta)} \varphi(w) \frac{2}{w}\, dw =$$

$$= -2\rho^2 \int_{w(3\rho)}^{w(\delta)} \frac{\varphi(w)}{w(w^2+\rho^2)}\, dw.$$

Noemen we het laatste lid 2I, dan geldt

$$|I| = \left| \rho^2 \int_{3\rho}^{\delta} \frac{\varphi(w(t))\, w'(t)}{w(t)\{w^2(t)+\rho^2\}}\, dt \right|$$

$$\leq 2\rho^2\varepsilon \int_{3\rho}^{\delta} \frac{dt}{|w(t).(w^2(t)+\rho^2|}$$

$$< 4\rho^2\varepsilon \int_{3\rho}^{\delta} \frac{dt}{t|e^{i\theta}t^2+(1+\eta(t))\rho^2|} = 4\rho^2\varepsilon \int_{3\rho}^{\delta} \frac{dt}{t|t^2+(1+\eta(t))\rho^2e^{-i\theta}|}$$

$$< 12\rho^2\varepsilon \int_{3\rho}^{\delta} \frac{dt}{t^3}$$

$$< \varepsilon.$$

Evenzo
$$\left| \int_{w(-\delta)}^{w(-3\rho)} \varphi(w) \frac{2w}{w^2-z^2}\, dw - \int_{w(-\delta)}^{w(-3\rho)} \varphi(w) \frac{2}{w}\, dw \right| < \varepsilon.$$

Vatten we de gevonden schattingen samen, dan verkrijgen we het volgende resultaat: Als W_ρ het deel van W is buiten de boog met eindpunten $w(-3\rho)$, $w(3\rho)$, dan is

$$\left| f(z) - \frac{1}{\pi i} \int_{W_\rho} \frac{\varphi(w)}{w}\, dw \right| < O(1) + \frac{108\,\varepsilon}{\pi|e^{i\theta}+1|} + 2\varepsilon.$$

Daaruit volgt

$$\text{H.W. } \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{\varphi(w)}{w}\, dw = 0.$$

Hiermee is de stelling bewezen.

Opmerking 1. Met behulp van de in bovenstaande bewijzen gebruikte methoden kan men een algemene stelling van het volgende type afleiden:

Zij L een continu differentieerbare kromme, zij $\varphi(w)$ continu op L en w_0 een inwendig punt van L met raaklijn T. Veronderstel dat

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(w)}{w-z}\, dw$$

een limiet $f^+(w_0)$ heeft als $z \to w_0$ langs een boog die niet aan T raakt. Dan heeft $f(z)$ de limiet $f^+(w_0)$ bij nadering langs elke boog die niet aan T raakt en aan dezelfde kant van T ligt, en een (vaste) limiet $f^-(w_0)$ bij nadering van de andere kant. Bovendien bestaat

$$\text{H.W. } \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(w)}{w-w_0}\, dw$$

en is gelijk aan $\frac{1}{2}(f^+(w_0)+f^-(w_0))$. Bij de gebruikelijke oriëntatie is $f^+(w_0)-f^-(w_0)=\varphi(w_0)$.

Opmerking 2. Door toepassing van de substitutie $w \to \frac{1}{w}$ vindt men twee met de stellingen 1 en 2 analoge stellingen, waarbij de functie $f(z)$ gedefinieerd door (2) identiek 0 is op G i.p.v. G^*. In dit geval is

$$\lim_{z \to w_0, z \in G^*} f(z) = -\varphi(w_0) \quad (w_0 \in W).$$

Toevoeging bij stelling 1. We zullen laten zien, dat de functie $f(z)$, waarvan de existentie wordt uitgesproken in stelling 1, eenduidig bepaald is. Hiervoor is het voldoende de volgende bewering aan te tonen:

Bewering.[2] Zij W een gesloten weg van het beschouwde type, zij W_1 een differentieerbare boog van W en $f(z)$ een op G analytische functie die voldoet aan (1) en aan

$$(4) \qquad \lim_{z \to w_0, z \in G} f(z) = 0 \qquad (w_0 \in W_1).$$

Dan is $f(z) \equiv 0$.

Bewijs. Laat W_2 een weg zijn in G die de eindpunten van W_1 verbindt, en laat G_1 het binnengebied zijn van $W_1 \cup W_2$. Dan is $f(z)$ continu op $\overline{G_1}$, dus

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{W_1 \cup W_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad (z \in G_1).$$

Omdat $f(z)=0$ op W_1, kunnen we dit ook schrijven als

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{W_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

De uitdrukking rechts definieert een analytische functie van z voor $z \notin W_2$. Deze functie is nul op W_1 en dus $f(z) \equiv 0$.

Opmerking 3. Over de bewering a, die een bekende eigenschap is voor analytische functies, valt het volgende op te merken. De bewering blijft in het algemeen niet meer gelden, wanneer we slechts eisen dat $f(z)$ analytisch is op G, continu op de rand W van G, en

$$(5) \qquad \lim_{z \to w_0, z \in G} f(z) = f(w_0),$$

----

2) Deze stelling kan ook afgeleid worden uit een algemene stelling van Radó-Behnke-Stein-Cartan (zie E. Heinz, Ein elementarer Beweis des Satzes von Radó-Behnke-Stein-Cartan über analytische Funktionen, Math. Annalen 131 (1956)).

voor alle punten $w_o \in W$, met uitzondering van een punt. Een voorbeeld hiervan is als volgt: Zij W een weg door O, zoals in fig.3 getekend is, en $f(z)=e^{-\frac{1}{z}}$. Dan is f(z) analytisch binnen W, f(w) continu op W en geldt (5) met uitzondering van $w_o=0$. Men verifieert gemakkelijk dat

$$\frac{1}{2\pi i}\int_W \frac{e^{-\frac{1}{w}}}{w-z}\,dw = -e^{-\frac{1}{z}} + 1$$

voor z buiten w.

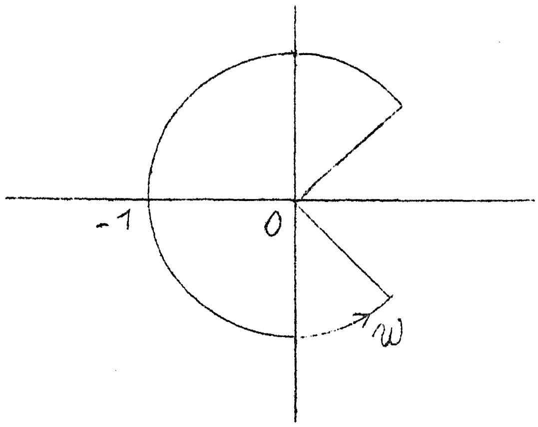

fig. 3

We merken nog op dat het linkerlid in de laatste betrekking gelijk is aan 1 voor z binnen W, in overeenstemming met opmerking 1. De integraal stelt dus voor z binnen W niet de functie $e^{-\frac{1}{z}}$ voor.

§ 3. Tot slot geven we de twee hoofdresultaten van Prof. Koiter, zoals deze nu geformuleerd kunnen worden. Volledigheidshalve zullen we daarvan ook de bewijzen aangeven.

Zij gegeven een dubbelperiodiek systeem van disjuncte contouren $W_{pq}=W+2p\omega_1+2q\omega_2$ (p,q geheel), met fundamentele perioden $2\omega_1, 2\omega_2$ en met Im $\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$. Hierbij is $W=W_{oo}$ een weg van het hierboven beschouwde type, met binnengebied G. Zij S de vereniging van de gebieden $G+2p\omega_1+2q\omega_2$, waarbij p en q de gehele getallen doorlopen en zij R het complement van $\overline{S}$. Zij verder $\zeta(z)$ de zeta-functie van Weierstrasz met perioden $2\omega_1, 2\omega_2$. Laten $2\eta_1$ en $2\eta_2$ de incrementen van $\zeta(z)$ zijn. Dan geldt

A. Als een functie $\psi(z)$ analytisch is in R en continu is op $\overline{R}$, en verder $\psi(z)$ kwasidubbelperiodiek is met incrementen α_1 en α_2, dan hebben we

$$(6)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{W'} \psi(w)\left\{\zeta(w-z)-\zeta(w)\right\}dw = \begin{cases} Az & (z\in S),\\ Az+\psi(z) & (z\in R),\end{cases}$$

waarbij $A=\frac{2}{\pi i}(\alpha_1\eta_2-\alpha_2\eta_1)$ en W' de weg W is met tegengestelde oriëntering.

B. Zij $\psi(w)$ gedefinieerd en continu op W. Laat verder een constante A bestaan zó, dat voor $z\in S$ voldaan is aan de eerste formule (6). Dan bestaat een eenduidig bepaalde functie F(z), die analytisch en kwasidubbelperiodiek op R is, op W de randwaarde $\psi(w)$ heeft (in de zin als in stelling 1 bedoeld). Deze functie F(z) wordt gegeven door

$$(6') \qquad F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W'} \psi(w)\left\{\zeta(w-z) - \zeta(w)\right\} dz - Az.$$

Bewijzen. Stelling A is analoog aan de in de inleiding genoemde bewering a, en wordt bewezen door geschikte deformatie van de integratieweg en toepassing van de kwasidubbelperiodiciteit van de functies $\zeta(z)$ en $\psi(z)$.

Voor het bewijs van stelling B voeren we de functies $g(z)$ en $h(z)$ in, gegeven door

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W'} \frac{\psi(w)}{w-z}\, dw \qquad (z \notin W),$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W'} \psi(w)\left\{\zeta(w-z) - \zeta(w) - \frac{1}{w-z}\right\} dw - Az \quad (z \in R \cup S \cup W).$$

Omdat gegeven is dat (6) geldt voor $z \in S$, hebben we $g(z)+h(z) \equiv 0$, voor $z \in S$, dus zeker voor $z \in G$. Verder is, omdat $h(z)$ analytisch is op $G \cup W$,

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W} \frac{h(w)}{w-z}\, dw \qquad (z \in G).$$

Dus

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{W} \frac{h(w) - \psi(w)}{w-z}\, dw = 0 \qquad (z \in G).$$

Uit opmerking 2 volgt dan, dat er een functie $H(z)$ bestaat, die analytisch is op het complement van $\overline{G}$ en die op W randwaarde $-h(w)+\psi(w)$ aanneemt, en dat deze functie gegeven wordt door

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W} \frac{h(w) - \psi(w)}{w-z}\, dw \qquad (z \in \overline{G}).$$

Nu is

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{W} \frac{h(w)}{w-z}\, dw = 0 \qquad (z \in \overline{G}),$$

dus $H(z) = g(z)$ voor $z \in \overline{G}$. De functie $F(z)=g(z)+h(z)$ $(z \in R)$ heeft dan de gevraagde eigenschappen.

De eenduidige bepaaldheid van $F(z)$ wordt op dezelfde manier bewezen als in het geval van stelling 1 (zie toevoeging bij stelling 1).

17 maart 1958.

Enkele aantekeningen bij het rapport ZW 1957-023 van het Mathematisch Centrum ("Over randvoorwaarden van analytische functies en Cauchy-hoofdwaarden", door J.F. Koksma, C.G. Lekkerkerker en A.H.M. Levelt.

1. De in het rapport geformuleerde stelling 1 kan als een rechtstreeks gevolg van het werk van Muskhelishvili worden afgeleid[1]. Immers volgt uit

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{W}\frac{\varphi(w)}{w-z}dw \quad , \tag{1}$$

met $\varphi(w)$ continu op W, en w_0 op één der gladde bogen, waaruit W is opgebouwd, voor $\beta_0 < \beta < \pi-\beta_0$ en β_0 een willekeurig kleine positieve constante (zie fig. 1)

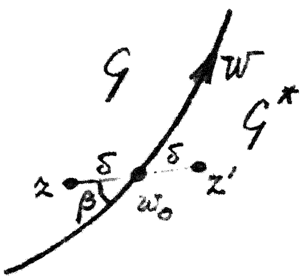

Fig. 1

$$\lim_{\delta\to 0}\left[f(z)-f(z')\right]=\varphi(w_0). \tag{2}$$

Nu is blijkens het ondersteldo $f(z')=0$ voor alle z' in G^*, zodat $f(z)$ voor $\delta\to 0$ tot $\varphi(w_0)$ nadert. Omdat $\varphi(w_0)$ continu is, volgt nu echter ook onmiddellijk stelling 1 van ZW1957-023, met inbegrip van de beperking, dat w_0 geen keerpunt van W mag zijn.

2. De in rapport ZW1957-023 geformuleerde stelling 2 dient met betrekking tot de waarde van de Cauchy-hoofdwaarde te worden herzien. De stelling luidt dan: Indien $f(z)$ volgens (1) nul is voor alle z in G^*, dan bestaat de hoofdwaarde integraal

$$\text{H.W.}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{W}\frac{\varphi(w)}{w-w_0}dw=\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{2\pi}\right)\varphi(w_0) \quad , \tag{3}$$

[1] N.I. Muskhelishvili, Singular integral equations, par. 18, Noordhoff (Groningen), 1953.

mits $\varphi(w)$ continu is op W, en w_o geen keerpunt van W is; de hoek θ is nul in een inwendig punt van één der gladde bogen, waaruit W is opgebouwd, en heeft de betekenis van fig. 2 in een hoekpunt. Om deze stelling te bewijzen kan (1) voor een punt z in G binnen een cirkel met straal ε om w_o worden geschreven met een uit fig. 2 duidelijke notatie

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{W-(w_1\to w_o\to w_2)}\frac{\varphi(w)}{w-z}dw+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{w_1\to w_o\to w_2}\frac{\varphi(w)}{w-z}dw\ . \qquad (4)$$

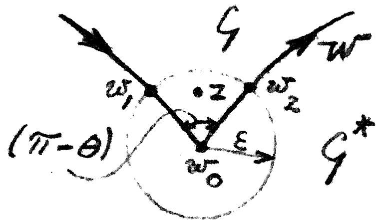

Fig. 2

De laatste integraal wordt met behulp van stelling 1 herleid tot

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{w_1\to w_o\to w_2}\frac{\varphi(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{w_1\to w_o\to w_2}\frac{f(w)}{w-z}dw=$$

$$=f(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{w_1\to w_2}\frac{f(w)}{w-z}dw\ , \qquad (5)$$

waarbij de integraal in het rechterlid van (5) langs de cirkelboog in de klokrichting moet worden genomen. Uit (4) en (5) volgt dan

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{W-(w_1\to w_o\to w_2)}\frac{\varphi(w)}{w-z}dw=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{w_1\to w_2}\frac{f(w)}{w-z}dw\ . \qquad (6)$$

De betrekking (6) blijft gelden voor $z=w_o$. Voor het rechterlid kan dan worden geschreven

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{w_1\to w_2}\frac{f(w)}{w-w_o}dw=-\frac{\varphi(w_o)}{2\pi i}\int\limits_{w_1\to w_2}\frac{dw}{w-w_o}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{w_1\to w_2}\frac{f(w)-\varphi(w_o)}{w-w_o}dw \qquad (7)$$

De laatste integraal in (7) nadert tot nul voor $\varepsilon \to 0$ wegens de continue overgang $f(z) \to \varphi(t_o)$ voor $z \to t_o$ in G (stelling 1). Dan bestaat blijkbaar ook de limiet van het linkerlid van (6) voor $\varepsilon \to 0$, d.w.z. de hoofdwaarde

$$\frac{1}{2\pi i} \text{H.W.} \int \frac{\varphi(w)}{w-w_o} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta}{2\pi}\right)\varphi(w_o) \ . \qquad (8)$$