STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 023

Het keuze-axioma: zijn plaats en functie in de wiskunde

Syllabus van een tweetal voordrachten

P.C. Baayen

1962

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.),by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Het keuze-axioma: zijn plaats en functie in de wiskunde

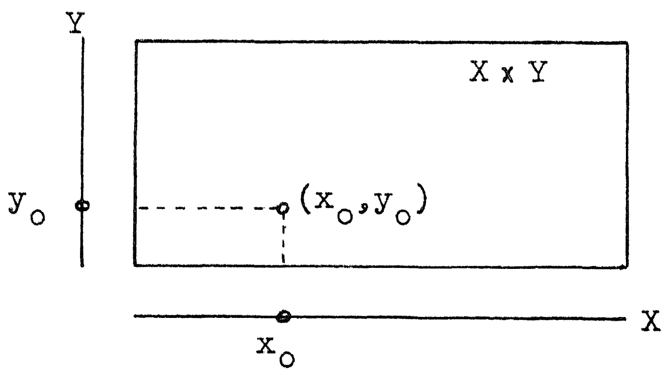
Syllabus van een tweetal voordrachten

door

P.C. Baayen

1. Inleiding

Als X en Y twee verzamelingen zijn, dan kunnen we beschouwen de verzameling van alle paren(x,y) met $x \in X$ en $y \in Y$. Deze vormen samen



een nieuwe verzameling: het directe product $X \times Y$ van X en Y. Zo kan bijvoorbeeld het (arithmetische) platte vlak beschouwd worden als direct product $R \times R$ van twee copieen van de reële getallen R.

Als X en Y beide niet-leeg zijn: $X \neq \emptyset$ en $Y \neq \emptyset$, dan is ook $X \times Y \neq \emptyset$. Want neem maar een $x_o \in X$ en een $y_o \in Y$; dan zal $(x_o, y_o) \in X \times Y$.

Op een dergelijke wijze kan het directe product van n verzamelingen X $(1 \leq i \leq n)$ gedefinieerd worden; de elementen ervan zijn de geordende n-tallen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, waar $x_i \in X_i$ voor $i=1,2,\ldots,n$. Als alle $X_i \neq \emptyset$, dan is het duidelijk dat $X_1 \times X_2 \ \ldots \times X_n \neq \emptyset$.

Als we deze constructie willen generaliseren tot oneindig veel verzamelingen X_α, waar de α een indexverzameling A doorloopt, dan kunnen we niet meer werken met geordende n-tallen; inplaats hiervan gebruiken we functies f, gedefinieerd op A, zodanig dat $f(\alpha) \in X_\alpha$ voor iedere $\alpha \in A$. De verzameling X van al deze functies heet het <u>cartesisch product</u> van de verzamelingen X_α ; notatie:

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha .$$

In aansluiting aan het voorgaande zullen we de functies die optreden als elementen van $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ niet aangeven met letters als f,g, maar met letters als x,y; de waarde van de functie x in $\alpha \in A$ zullen we niet aangeven met $x(\alpha)$ maar met x_α. Dan bestaat $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ dus uit alle punten $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, met $x_\alpha \in X_\alpha$ voor iedere $\alpha \in A$.

Stel nu weer dat alle X_α niet-leeg zijn. Dan zal natuurlijk ook het cartesisch product $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ niet leeg zijn. Zij n.l. $x_{o\alpha} \in X_\alpha$, voor iedere $\alpha \in A$ (zulke $x_{o\alpha}$ bestaan, want $X_\alpha \neq \emptyset$); dan is $x_o = (x_{o\alpha})_{\alpha \in A}$ een element van $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Maar is het inderdaad wel zo natuurlijk dat $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \emptyset$ als A oneindig is? (Aangenomen, zoals steeds, dat alle $X_\alpha \neq \emptyset$, voor $\alpha \in A$). Er zijn heel wat wiskundigen die menen van niet. Laten we het juist gegeven "bewijs" wat nader bezien.

Iedere X_α is niet leeg; voor iedere X_α zijn er dus punten $x_\alpha \in X_\alpha$. Maar i.h.a. zijn er verschillende elementen in X_α; om een element $x_0 \in X$ te vinden zullen we één (overigens willekeurige) $x_{0\alpha} \in X_\alpha$ moeten "kiezen". Zo'n"keuze" nu zullen we moeten doen voor elk van de (oneindig veel) $\alpha \in A$. Is dat mogelijk?

Eén van de antwoorden op deze vraag luidt ongeveer als volgt: voor iedere keuze is een zekere tijd nodig. Een mens, zelfs een wiskundige, beschikt slechts over eindig veel tijd. Hij kan dus nooit oneindig veel keuzen doen (misschien nog wel aftelbaar veel, maar in ieder geval niet overaftelbaar veel).

Een wederwoord op dit antwoord zou als volgt kunnen luiden: in het exact wiskundig bezig zijn moeten we ons niet druk maken over wat een mens al dan niet werkelijk zou kunnen doen. We bedrijven toch ook rustig vlakke meetkunde zonder dat we effectief kunnen verifieren of er een "echt" plat vlak bestaat, oneindig en uitgestrekte en zo; we werken met de reële getallen, die een verzameling van continue machtigheid vormen, ook al kunnen we ze niet allemaal neerschrijven of effectief "beschrijven". Bovendien hoeven we niet over "kiezen" te spreken; de aanname dat $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \emptyset$ als $A \neq \emptyset$ en $X_\alpha \neq \emptyset$ voor iedere $\alpha \in A$ is ook gelijkwaardig met de volgende veronderstelling:

"Voor ieder stelsel disjuncte niet-lege verzamelingen X_α, $\alpha \in A$ ($\neq \emptyset$) is er een deelverzameling V van $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ zodanig dat V met iedere X_α precies één punt gemeen heeft".

Dit is een uitspraak over existentie van deelverzamelingen van $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ met bepaalde eigenschappen. Waarom zouden we,binnen onze wiskundige theorie, niet mogen aannemen dat er altijd dergelijke deelverzamelingen bestaan.

Dit wederwoord zal niet veel overtuigingskracht hebben, misschien wel zin-loos zijn, voor iemand die er van uit gaat dat de wiskunde en de wiskundige de "natuur" beschrijft. Zo'n deelverzameling bestaat wèl altijd- maar dan zal dat toch netjes aangetoond moeten worden, voordat we in de verdere theorie daarvan gebruik mogen maken; of zo'n verzameling bestaat niet altijd -maar dan mogen we ook niet binnen onze wiskundige theorie aannemen dat ze altijd bestaan.

Natuurlijk zijn er nog verschillende andere standpunten het intuitionistische standpunt bijv. is verschillend van beide boven beschrevene, en in Sierpinski [16], pag 103-109 worden verschillende genuanceerde overtuigingen van met name, genoemde wiskundigen beschreven.

Het is echter niet de bedoeling van deze voordrachten uitvoerig in te gaan op deze wijsgerige achtergronden. We zullen hier de wiskunde alleen opvatten in de volgende, beperkte (bekrompen?) zin: het uitwerken, volgens van te voren geaccepteerde logische regels, van de consequenties van een aantal eveneens van te voren geaccepteerde postulaten of axioma's. De bedoeling van deze voordrachten is het pro en contra te illustreren van de opname in de lijst van grondpostulaten van het zogenaamde keuze-axioma, waarvoor we als formulering kiezen:

Keuze-axioma: Zij A een niet-lege verzameling, en zij X_α een niet-lege verzameling, voor iedere $\alpha \in A$. Dan is het cartesisch product $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ niet leeg.

Bovendien zal het gebruik van het keuze-axioma in verschillende onderdelen van de wiskunde geïllustreerd worden, vnl. in de "moderne" vorm van het zog. lemma van Zorn.

2. Gebruik van het keuze-axioma in de verzamelingsleer. Consistentie.

Cantor, de grondlegger van de verzamelingenleer, is altijd ervan overtuigd geweest dat de volgende stelling juist is:

"Gegeven twee verzamelingen X,Y is er altijd een 1-1-functie van één van die verzamelingen in de andere".

Men zegt dat twee verzamelingen X,Y evenveel elementen hebben (hetzelfde kardinaalgetal hebben) als er een 1-1-afbeelding is van de éne verzameling op de andere. Men zegt dat Y tenminste evenveel elementen heeft als X wanneer er een 1-1-afbeelding is van X op een deelverzameling van Y; in dat geval wordt ook gezegd dat de aantallen elementen van X en Y vergelijkbaar zijn. Meestal spreekt men over het "kardinaalgetal" van een verzameling X in plaats van over het "aantal elementen" van X. Bovengenoemde stelling kan dan ook aldus geformuleerd worden:

Stelling 1. Twee kardinaalgetallen zijn altijd vergelijkbaar.

Het is Cantor niet gelukt deze stelling te bewijzen; wel toonde hij het volgende aan:

Stelling 2. De kardinaalgetallen van twee welgeordende verzamelingen X,Y zijn altijd vergelijkbaar.

(Een welgeordende verzameling is een verzameling X waarin een lineaire ordening $\leq$ is gedefinieerd, met de bijzondere eigenschap dat iedere deelverzameling Y van X een eerste element bevat in de ordening $\leq$).

Derhalve zou stelling 1 volgen wanneer het volgende waar was:

Stelling 3. Iedere verzameling kan welgeordend worden.

Cantor was overtuigd dat stelling 3 waar was, en heeft er zelfs een bewijs van aangekondigd. Dit bewijs heeft hij echter nooit gegeven.

Zo op het oog lijkt stelling 3 heel wat sterker dan stelling 1, en ook heel wat onwaarschijnlijker. Bovendien is het eenvoudig om het keuze-axioma uit stelling 3 af te leiden; men kan e.g. als volgt te werk gaan.

Zij $\leq$ een wel-ordening van $\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$. Iedere X_α heeft dan een ondubbelzinnig bepaald eerste element $x_{0\alpha}$, in de ordening $\leq$. Zij $x_0=(x_{0\alpha})_{\alpha\in A}$, daar $x_0 \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ volgt dat $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ niet leeg is.

In 1904 verscheen een artikel van E. Zermelo getiteld: "Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann". In dit bewijs gebruikt hij het keuze-axioma; hij zegt hiervan:

"Dieses logische Prinzip lässt sich zwar nicht auf ein noch einfacheres zurückführen, wird aber in der mathematischen Deduktion überall unbedenklich angewendet".

De volgende jaarjang van hetzelfde tijdschrift (Mathematische Annalen <u>60</u> , 1905) bevatte vele artikelen met kritiek op Zermelo's bewijs, met name natuurlijk op het gebruik van het keuze-axioma (o.a. van E. Borel, F. Bernstein, A. Schoenflies, Ph.E.B.Jourdain).

In 1908 publiceerde Zermelo een nieuw bewijs van de welordeningsstelling, gebruik makend van het keuze-axioma (20). In zijn bijzonder lezenswaardige artikel gaat hij tevens in op de genoemde critici, bij wie zich inmiddels o.a. ook Peano en Poincaré gevoegd hadden. Hij merkt op dat niemand bewezen heeft dat het keuze-axioma tot logische contradicties leidt (al beweerden sommigen van wel), en dat vele tegenstanders het ongemerkt zelf al gebruikt hebben. Tegen degenen (zoals Peano) die zeggen dat het keuze-axioma niet gebruikt mag worden (ook niet als "hypothese" waarvan de consequenties onderzocht worden) omdat zulks geen wiskunde meer is, merkt hij op dat zo'n verbod onaanvaardbaar is, "da es in der mathematik keine unfehlbaren Autoritäten gibt".

Inmiddels is de storm aardig geluwd.

Voor een belangrijk deel is dit te danken aan K. Gödel (cf.(7)), die de volgende hoogst belangrijke stelling bewees:

"Als de gebruikelijke axioma's voor de verzamelingenleer (zonder het keuze-axioma) niet tot een logische tegenspraak voeren, dan doen ze zulks ook niet na toevoeging van het keuze-axioma."

Gebruik van het keuze-axioma is dus in zoverre vrijblijvend, dat hierdoor de wiskunde niet slechter wordt, niet inconsistent wordt tenzij hij zulks reeds was.

Anderzijds moet vermeld worden dat men er nog niet in is geslaagd aan te tonen dat het keuze-axioma <u>onafhankelijk</u> is, d.w.z. dat het echt nodig is, dat het niet uit de overige axioma's volgt.

Het belang van het keuze-axioma voor de verzamelingenleer wordt geïllustreerd door de volgende lijst van eigenschappen, die stuk voor stuk aequivalent zijn met het keuze-axioma (cf [17]); m,n,p,q stellen willekeurige kardinaalgetallen voor.

1. Twee kardinaalgetallen zijn altijd vergelijkbaar.
2. $m^2=m$, voor iedere oneindige m.
3. $m.n=m+n$, voor iedere oneindige m en n.
4. $m^2=n^2 \Rightarrow m=n$.
5. $m<n$ en $p<q \Rightarrow m+p<n+q$.
6. $m<n$ en $p<q \Rightarrow m.p<n.q$.
7. $m+p \leqslant n+p \Rightarrow m \leqslant n$.
8. $m.p<n.p \Rightarrow m<n$.
9. Iedere machtigheid m heeft een onmiddelbare opvolger n d.w.z. $m<n$ en $m<p \Rightarrow n \leqslant p$).

Het keuze-axioma wordt al gebruikt voor het eenvoudigste niet-triviale geval van 2: $\aleph_0^{\,2}=\aleph_0$; d.w.z. de vereniging van aftelbaar veel aftelbare verzamelingen is aftelbaar. Het wordt ook gebruikt bij het bewijs dat de machtigheid van een beeldverzameling f(A) (f een functie $A \to B$, z.eg.) kleiner of gelijk de machtigheid van A is.

Twee andere stellingen die aequivalent zijn met het keuze-axioma, en die in het vervolg nog aan de orde komen, zijn:

10. Het lemma van Zorn: Iedere inductief geordende verzameling heeft maximale elementen (zie § 3).
11. De stelling van Tychonov: Een topologisch product van compacte ruimten is weer compact (zie §4).

3. Het lemma van Zorn

Een relatie $\leqslant$ in een verzameling A heet een partiele ordening indien voor alle $a,b,c \in A$ voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:

1) $a \leq a$;

2) $a \leq b$ en $b \leq c \Rightarrow a \leq c$;

3) $a \leq b$ en $b \leq a \Rightarrow a = b$;

Een partiele ordening heet <u>inductief</u> (en A heet <u>inductief geordend</u>) indien A niet leeg is en bovendien het volgende geldt:

4) iedere totaal geordende deelverzameling van A heeft een bovengrens.

($B \subset A$ heet <u>totaal geordend</u> als voor $a, b \in B$ altijd hetzij $a \leq b$ hetzij $b \leq a$; c heet een bovengrens van B als $a \leq c$ voor alle $a \in B$).

De volgende stelling kan bewezen worden zonder het keuze-axioma te gebruiken (zie bv. [4] pag. 5):

<u>Stelling 4.</u> Zij A een verzameling, $\leq$ een inductieve partiele ordening in A, en $f: A \rightarrow A$ een afbeelding met de eigenschap: $f(a) \geq a$ voor alle $a \in A$. Dan heeft f een dekpunt; d.w.z. $f(x)=x$ voor tenminste één $x \in A$.

<u>Met behulp van het keuze-axioma</u> kunnen we hieruit onmiddellijk afleiden.

<u>Stelling 5</u> (maximum principe van Hausdorff): Iedere partieel geordende verzameling bevat een maximale totaal geordende deelverzameling.

<u>Bewijs</u>:

Stel dit onjuist, voor zekere partieel geordende verzameling A. Zij E de collectie van alle totaal geordende $B \subset A$. Dan wordt E zelf partieel geordend door de inclusie-relatie $\subset$.

Volgens aanname bestaan er voor iedere $B \in E$ totaalgeordende verzamelingen $C \in E$, $B \subset C$, $B \neq C$.

<u>Op grond van het keuze-axioma</u> is er dan een functie $f: E \rightarrow E$ zodanig dat $B \subset f(B)$, $B \neq f(B)$, voor alle $B \in E$.

Op grond van stelling 4 moet gelden: $X=f(X)$, voor een $X \in E$; maar dit kan niet, daar $X \neq f(X)$ voor alle $X \in E$. Contradictie.

Uit stelling 5 volgt (<u>zonder</u> gebruik van het keuze-axioma):

<u>Stelling 6 (lemma van Zorn)</u>: Iedere inductief geordende verzameling heeft tenminste één maximaal element.

<u>Bewijs</u>.

Zij A inductief geordend door $\leq$. Op grond van stelling 5 is er een maximale totaal geordende deelverzameling $B \subset A$. Zij b een bovengrens van B (zo'n B bestaat omdat $\leq$ inductief is).
Bewering: b is maximaal.

Zij $x \in A$, $x \geq b$. Dan is ook $B \cup \{x\}$ totaal geordend door $\leq$. Daar B een maximale totaal geordende deelverzameling is, volgt $x \in B$; dus $x \leq b$. Tezamen met $b \geq x$ impliceert dit dat $x=b$.

<u>Opmerking</u>:

M. Zorn [21] formuleerde dit lemma en gaf verschillende toepassingen. Het schijnt echter reeds eerder bekend geweest te zijn aan Kuratowski ; een zeer nauw verwante uitspraak is als "lemma van Kuratowski" bekend.

Het is eenvoudig, om uit het lemma van Zorn de welordeningsstelling af te leiden, zonder nader gebruik van het keuze-axioma (zie e.g. [4] pag. 7) . Bijgevolg geldt:

<u>Stelling 7</u>. Zorn's lemma, het maximum principe van Hausdorff, de welordeningsstelling en het keuze-axioma zijn aequivalent, in dien zin dat elk van deze uitspraken uit elke andere volgt zonder nader gebruik van het keuze-axioma.
Voor verdere aequivalente uitspraken zie men e.g. [11] pag.33.

4. <u>Gebruik van het keuze-axioma buiten de verzamelingenleer</u>

a). In de algebra

Als voorbeeld van het gebruik van het keuze-axioma in de vorm van het lemma van Zorn bewijzen we:

<u>Stelling 8.</u> Zij R een ring. Ieder ideaal $I \neq R$ van R is bevat in een maximaal ideaal.

<u>Bewijs</u>.

Beschouw alle idealen $J \neq R$ van R die I omvatten. Men ziet eenvoudig dat ze t.o.v. de inclusie $\subset$ een inductief geordende verzameling A vormen. Een maximaal element J_0 van A is een maximaal ideaal dat I omvat.

Op geheel analoge wijze bewijst men:

Stelling 9 Iedere vectorruimte V over een lichaam K heeft een basis over K.

Bewijs.

Beschouw alle lineair onafhankelijke deelverzamelingen van V . Zij vormen t.o.v. de inclusie $\subset$ een inductief geordende collectie A . Zij B een maximaal element. Dan is B lineair onafhankelijk, en als $x \notin B$, dan is $B \cup \{x\}$ niet meer lineair onafhankelijk. D.w.z. dan is er een relatie

$$\alpha x+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n=0,$$

$\alpha \neq 0$; $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$; $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$. Daar K een lichaam is volgt

$$x=\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_n x_n,$$

waar $\lambda_i=-\alpha_i\alpha^{-1}$. Dus B is een basis.

I.h.b . volgt dat de reële getallen een basis hebben over het lichaam der rationale getallen. Dit werd reeds in 1905 (kort na Zermelo's eerste bewijs van de welordeningsstelling) bewezen door G. Hamel [8], die er gebruik van maakte om aan te tonen:

Stelling 10. Er zijn niet-continue oplossingen van de functionaalvergelijking

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Het keuze-axioma wordt verder gebruikt bij het bewijs dat ieder lichaam algebraisch afgesloten kan worden bij de theorie van de formeel-reële lichamen, om te bewijzen dat er een transcendentie-basis bestaat, etc.

b). In de analyse

In de klassieke analyse schijnt het keuze-axioma overbodig te zijn. Volgens Rosser [15] wordt het niet gebruikt in Landau [12]; het wordt op enkele plaatsen gebruikt in Hardy [9] maar kan daar vermeden worden door de bewijzen iets listiger op te zetten; en hetzelfde geldt voor het begin van Titchmarsh [18] .

De situatie verandert echter zodra men de theorie van de Lebesgue-integratie gaat beschouwen. Volgens Rosser wordt het keuze-axioma in Titchmarsh [18] voor het eerst op blijkbaar onvermijdelijke wijze gebruikt in het bewijs van 10.25 (pag.326): "als $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots$, dan is $m_e(E) \leqslant m_e(E_2) + \ldots$

In de ontwikkeling van de theorie van de Lebesgue-integratie gebruikt Titchmarsh nog tweemaal op vermoedelijk essentiele wijze het keuze-axioma. Ook alle voorbeelden van niet-meetbare functies zijn m.b.v. het keuze-axioma geconstrueerd.

Het is echter van belang op te merken dat in al deze gevallen een <u>zeer zwakke vorm</u> van het keuze-axioma voldoende is, het zog.
<u>Aftelbare keuze-axioma</u>: een cartesisch product van ten hoogste aftelbaar veel niet-lege verzamelingen, die elk ten hoogste aftelbaar zijn, is niet leeg.

In de modernere takken van de analyse, zoals bijvoorbeeld de functionaalanalyse, is het keuze-axioma onvermijdelijk, door het uitvoerige gebruik dat hier gemaakt wordt van de topologie. Zo gebruikt men het keuze-axioma bij het bewijs van de stelling van Hahn-Banach; de stelling van Banach-Steinhaus (want men gebruikt het bij het bewijs van de stelling Baire); de stelling van Banach-Schauder ("interior mapping principle"); etc.

In sommige gevallen (bijv. voor het bewijs van de stelling van Hahn-Banach) kan men volstaan met een postulaat dat iets zwakker is dan het keuze-axioma;
zie hiervoor § 5.

c). In de topologie.

In de topologie is het keuze-axioma gewoonweg onmisbaar. En niet alleen practisch onmisbaar, omdat de huidige bewijzen er gebruik van maken (maar een toekomstige slimmerik zou misschien een bewijs zonder gebruik van het axioma kunnen vinden); neen, het keuze-axioma is essentieel onmisbaar. J.L. Kelley [10] heeft n.l. bewezen:

Stelling 11. De product-stelling van Tychonoff is aequivalent met het keuze-axioma.

Voor het (eenvoudige en elegante) bewijs verwijzen we naar [10].

Om nog één voorbeeld te noemen van een belangrijke stelling uit de topologie waarvan mij geen bewijs zonder het keuze-axioma bekend is: zulks is het geval voor de zog. kategoriestelling van Baire.

5. De ultrafilter-eigenschap.

Geheel analoog aan het bewijs van stelling 8 verloopt het bewijs van

Stelling 12. Ieder ideaal in een Boole-algebra B is bevat in een maximaal ideaal.

Onlangs is aangetoond door Halpern, een leerling van Tarski, dat stelling 12 zwakker is dan het keuze-axioma (in een geschikte axiomatisering van de verzamelingenleer). Dit is van belang omdat een aantal wiskundige resultaten reeds m.b.v. stelling 12 kan worden bewezen. Dit is e.g. het geval met de stelling van Hahn-Banach (zie [13]), maar ook met de volgende stellingen, die zelfs aequivalent zijn met stelling 12 :

Stelling 13. (representatie-stelling van Stone): Iedere Boole-algebra is isomorph met een verzamelingen-algebra.

Stelling 14. (volledigheidsstelling van Gödel-Malcev): Als T een consiste verzameling uitspraken is uit de propositielogica, dan is er een wiskundig model waarin alle uitspraken uit T gelden.

In dit verband zij ook het volgende opgemerkt. Indien men het bewijs van de stelling van Tychonoff naleest, dat gegeven wordt in het desbetreffende boek van Bourbaki, dan ziet men dat het keuze-axioma tweemaal wordt gebruikt:

1. Om aan te tonen dat iedere Boole-ideaal bevat is in een maximaal ideaal (stelling 12) (eigenlijk: dat ieder duaal ideaal bevat is in een maximaal duaal ideaal);

2. In zijn zuiverste vorm: geconstrueerd zijn een stelsel ultrafilters U_α, $\alpha \in A$; bij elk hoort een niet-lege verzameling L_α van limietpunten, en er wordt een punt uit $\prod_{\alpha \in A} L_\alpha$ gekozen.

In het bewijs van Bourbaki wordt de tweede stap niet zo duidelijk. Dit komt omdat Bourbaki alleen bewijst:

<u>Stelling 15</u>. Het topologisch product van willekeurig veel compacte <u>Hausdorff-ruimten</u> is compact Hausdorff.

Echter, in een Hausdorff-ruimte heeft een ultrafilter altijd ten hoogste één limietpunt; in dit bijzondere geval bestaat iedere L_α dus uit precies één punt, en het keuze-axioma is in stap 2 niet meer nodig om aan te tonen dat $\prod_{\alpha \in A} L_\alpha$ niet-leeg is.

<u>Conclusie</u>: <u>De stelling van Tychonoff voor het bijzondere geval van compacte Hausdorff-ruimten volgt reeds uit stelling 12</u>.

Het is waarschijnlijk dat voor een zeer belangrijk deel van de topologie van Hausdorff-ruimten het keuze-axioma door stelling 12 vervangen kan worden.

<u>Probleem</u>: Zou stelling 15 misschien elementair aequivalent zijn met stelling 12?

Volledigheidshalve zij ook nog vermeld dat van tijd tot tijd geëxperimenteerd wordt met hypotheses die het keuze-axioma weerspreken (zie e.g. [14]).

6. De Banach-Tarski paradcx

We hebben gezien dat het keuze-axioma een belangrijke rol speelt in de wiskunde, en dat verschillende nuttige en aangename stellingen er op berusten. Het is alleen maar rechtvaardig te vermelden dat het keuze-axioma ook onprettigeen paradoxale consequenties heeft.

De bekendste is de paradox van Banach-Tarski [2] : er bestaat een verdeling van een gewone massieve bol S in de gewone drie-dimensionaal ruimte in een eindig aantal disjuncte stukken:

$$S = A_1 \cup A_2 \quad \ldots \cup A_n,$$

zodanig dat uit deze stukken twee massieve bollen kunnen worden gevormd:

$$S_1 = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \;\; ; \;\; S_2 = A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \ldots \cup A_n,$$

die beide precies even groot zijn als de oorspronkelijke bol S.

R.M. Robinson heeft bewezen dat $n=5$ gekozen kan worden. Een dergelijke decompositie en hergroepering bestaat voor het <u>bol-oppervlak</u> S^2, waarbij slechts 4 stukken nodig zijn.

Voor een volledige behandeling van deze Banach-Tarski paradox, en voor verscherpingen en generalisaties ervan, zij verwezen naar T.J. Dekker [1] .

Literatuur:

[1]. H. Bachmann, Transfinite Zahlen, hoofdstuk V. Berlin 1955.

[2]. S. Banach en A. Tarski, Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. Fund. Math. 6 (1924) 244-277.

[3]. T.J. Dekker, Paradoxical decompositions of sets and spaces. Amsterdam, 1958.

[4]. N. Dunford en J.T. Schwartz, Linear operators I, New York, 1958.

[5]. A.A. Fraenkel, Abstract set theory, pag. 306-318. Amsterdam, 1953.

[6]. A.A. Fraenkel en Y. Bar-Hillel, Foundations of set theory, pag. 44-80. Amsterdam, 1958.

[7]. K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set-theory. Princeton, 1940.

[8]. G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Math. Annalen 60 (1905) 459-462.

[9]. G.H.Hardy, A course of Pure Mathematics, 9^e druk. New York, 1947.

[10]. J.L. Kelley, The Tychonoff Product Theorem Implies the Axiom of Choice. Fund. Math. 37 (1950) 75-76.

[11]. J.L. Kelley, General topology. New York, 1955.

[12]. E. Landau, Grundlagen der Analysis. Leipzig, 1930.

[13]. W.A.J. Luxemburg, Non-standard analysis. Los Angeles, 1961.

[14]. J. Mycielski en H. Steinhaus, A mathematical axiom contradicting the axiom of choice. Bull. de l'Acad. Polonaise de Science 10 (1962) nr. 1.

[15]. J. Barkley Rosser, Logic for Mathematicians. New York, 1953.

[16]. W. Sierpiński, Leçons sur les nombres transfinis. Paris,1928.

[17]. A. (Tajtelbaum-)Tarski, Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix. Fund. Math. 4 (1923) 147-154.

[18]. E.C. Titchmarsh, The theory of functions, 2^{e}ed. Oxford, 1939.

[19]. E. Zermelo, Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Annalen 59 (1904) 514-516.

[20]. E. Zermelo, Neuer Beweis für die Möglichkeit der Wohlordnung. Math. Annalen 65 (1908) 107-128.

[21]. M. Zorn, A remark on a method in transfinite algebra. Bull. Am. Math. Soc. 41 (1935) 667-670.