STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962-26r

Het tensorprodukt.

P.C. Baayen.

Reprinted from:
Euclides, 38 (1962/'63), p 9-19.

1962

HET TENSORPRODUKT [1])

door

P. C. BAAYEN

AMSTERDAM

1. *Inleiding*

Laat E en F twee moduli zijn (vgl. § 2 voor de definitie van het begrip modulus). Er is een welbekende methode om uit deze twee moduli een nieuwe modulus te vormen: de *directe som* $E \oplus F$. Deze bestaat uit alle paren (a, b), met $a \varepsilon E$, $b \varepsilon F$; de operaties in $E \oplus F$ geschieden coördinaatsgewijs, e.g.

$$(a_1, b_1)+(a_2, b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2). \tag{1.1}$$

Zo beschouwt men eigenlijk de verzameling van alle vectoren (punten) in het platte vlak, als men ieder punt in het vlak aangeeft met twee coördinaten, als directe som van de vectoren in de x-as en die in de y-as.

In 1938 heeft H. Whitney, in een artikel „Tensor products of abelian groups" het probleem gesteld of het ook mogelijk zou zijn aan E en F een soort *produkt* $E \otimes F$ toe te voegen. Hij stelde daarbij de eisen dat ieder element van $E \otimes F$ een eindige som moet zijn van elementen van de vorm $a \otimes b (a \varepsilon E, b \varepsilon F)$, en dat het „produkt" distributief moet zijn, in de zin dat

$$(a_1+a_2) \otimes b = a_1 \otimes b+a_2 \otimes b; \tag{1.2}$$

$$a \otimes (b_1+b_2) = a \otimes b_1+a \otimes b_2. \tag{1.3}$$

Dit probleem is door Whitney in bovengenoemd artikel volledig opgelost, en het door hem gedefinieerde produkt $E \otimes F$ is het *tensorprodukt* van E en F.

In deze voordracht interesseert ons voornamelijk de algebraïsche constructie die tot het tensorprodukt $E \otimes F$ voert. Deze constructie is een duidelijk voorbeeld van abstracte algebraïsche methoden. Vervolgens zal het begrip tensorprodukt toegelicht en verhelderd worden door enige stellingen en een aantal voorbeelden.

We zullen ons echter niet bezighouden met de eigenlijke toepassingen van het tensorprodukt en zijn plaats in de algebra. Daar-

---

[1]) Voordracht Vakantiecursus 1961, Mathematisch centrum.

voor ontbreekt op deze cursus de tijd. Deze toepassingen liggen op verschillend terrein. Zo kan men bijv. met behulp van het tensorprodukt een algebraïsche invoering van het begrip tensor geven, dat in de moderne differentiaalmeetkunde een belangrijke rol speelt. In de algebraïsche topologie treedt het tensorprodukt herhaaldelijk op, en in de homologische algebra, die zich uit de algebraïsche topologie ontwikkeld heeft, speelt het zelfs een zéér belangrijke rol. Maar ook in sommige puur-algebraïsche theorieën wordt het tensorprodukt wel gebruikt, zoals in de theorie van de ringen.

Het is wellicht nuttig er op te wijzen dat sommige auteurs in plaats van de term „tensorprodukt" een andere naam gebruiken voor hetzelfde begrip. Zo spreekt N. Jacobson over „Kronecker produkt" [1]), terwijl P. R. Halmos wel de uitdrukking „direct produkt" gebruikt heeft (maar niet meer in zijn latere publikaties).

Literatuur:

H.Whitney, Tensor products of abelian groups. Duke Math. Journal 4, 1938, p. 495-528.

D.G.Northcott, An introduction to homological algebra. Cambridge, 1960.

N.Bourbaki, Algèbre Multilinéaire. A.S.I. 1044, Parijs, 1958.

2. *Grondbegrippen.*

In de eerste plaats hebben we nodig het begrip *ring*. Een ring Λ is een verzameling van dingen die met elkaar verbonden zijn door een optelling en vermenigvuldiging. Deze operaties voldoen daarbij aan dezelfde regels als de optelling en vermenigvuldiging bij de gehele getallen:

$$\lambda+\mu = \mu+\lambda;\ \lambda\cdot\mu = \mu\cdot\lambda;$$
$$(\lambda+\mu)+\nu = \lambda+(\mu+\nu);\ (\lambda\cdot\mu)\cdot\nu = \lambda\cdot(\mu\cdot\nu)$$
$$\lambda\cdot(\mu+\nu) = \lambda\cdot\mu+\lambda\cdot\nu.$$

Er zijn speciale elementen in Λ die de rol van 0 en 1 vervullen, en die we daarom ook met 0 en 1 aanduiden:

$$\lambda+0 = \lambda;\ \lambda\cdot 0 = 0;\ \lambda\cdot 1 = 1;\ \text{etc.}$$

Evenals bij de gehele getallen heeft iedere λ een ondubbelzinnig bepaald tegengesteld element $-\lambda$:

$$\lambda-\lambda = \lambda+(-\lambda) = 0;\ (\lambda-\mu)+\mu = \lambda;\ 0-(-\lambda) = \lambda;\ \text{etc.}$$

Deling behoeft echter niet altijd mogelijk te zijn.
(In feite beperken wij ons hier tot commutatieve ringen met eenheid.)

---

[1]) De ideeën die ten grondslag liggen aan het begrip tensorprodukt zijn nl. uiteindelijk van Kronecker afkomstig.

Voorbeelden

1. Alle gehele getallen vormen een ring Z.

2. Alle rationale getallen vormen een ring Q; alle reële getallen vormen een ring R; alle complexe getallen vormen een ring C. In deze drie ringen is deling door een element $\neq 0$ wèl altijd mogelijk.

3. Alle restklassen der gehele getallen modulo n, waar n een natuurlijk getal is, vormen een ring Z_n.

4. Alle polynomen met reële coëfficiënten vormen een ring (meestal aangeduid met $R[x]$).

5. Alle reële $n \times n$ matrices vormen een ring M_n.

Een tweede essentieel begrip is dat van een *modulus* over een ring Λ. Een Λ-modulus E is een verzameling objecten, waartussen een optelling gedefinieerd is, die voldoet aan

$$a+b = b+a; \ (a+b)+c = a+(b+c).$$

Eén van de objecten in E speelt weer de rol van nulelement, en ieder element heeft een tegengestelde:

$$a+0 = a; \ a-a = a+(-a) = 0.$$

Behalve deze optelling is er ook nog een vermenigvuldiging van objecten uit E met elementen van de ring Λ. Deze vermenigvuldiging is distributief:

$$\lambda(a+b) = \lambda a+\lambda b; \ (\lambda+\mu) \cdot a = \lambda a+\mu a;$$

terwijl verder geldt:

$$\lambda \cdot (\mu a) = (\lambda\mu)a; \ 1 \cdot a = a.$$

Voorbeelden

6. Alle vectoren in het platte vlak vormen een modulus over de ring R der reële getallen. Zij vormen ook een modulus over de ring Z der gehele getallen.

7. Alle vectoren in het platte vlak, waarvan de eindpunten gehele coördinaten hebben, vormen een modulus over Z, maar niet een modulus over R.

8. Iedere ring Λ kunnen we beschouwen als een modulus over zichzelf.

9. De ringen Z_n uit voorbeeld 3 kunnen we beschouwen als moduli over zichzelf, maar ook als moduli over Z.

Vervolgens zullen we spreken over functies $f(x)$, gedefinieerd op een Λ-modulus E, met waarden in een Λ-modulus F. We noemen zo'n functie ook wel een *afbeelding* $E \to F$. De functie $f(x)$ heet *lineair*, als

$$f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2);$$
$$f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x);$$

voor $x_1, x_2, x \varepsilon E$ en $\lambda \varepsilon \Lambda$.

Ook functies $f(x, y)$ van twee veranderlijken, $x \varepsilon E$ en $y \varepsilon F$, met waarden in een Λ-modulus G, zullen ter sprake komen. Zo'n functie heet *bilineair* als hij lineair is in elk van zijn argumenten afzonderlijk

$$f(x_1+x_2, y) = f(x_1, y)+f(x_2, y);$$
$$f(x, y_1+y_2) = f(x, y_1)+f(x, y_2);$$
$$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y).$$

Laten E en F twee Λ-moduli zijn. Dan kan het zijn, dat er een lineaire afbeelding $f : E \to F$ bestaat, met de volgende twee eigenschappen:

(1) iedere $y \varepsilon F$ treedt op als een beeldpunt $f(x)$;

(2) f is 1-1-duidig, d.w.z. als $f(x_1) = f(x_2)$ dan is $x_1 = x_2$.

In dat geval heten E en F *isomorf*, aangegeven met $E \approx F$. De afbeelding f heet dan een isomorfe afbeelding van E op F.

3. *Constructie van het tensorprodukt*

Laten E en F twee moduli zijn over een ring Λ. Dan vormen we eerst een nieuwe modulus, $E * F$, als volgt.

Elementen van $E * F$ zijn alle lineaire combinaties

(3.1) $$\lambda_1 \cdot (a_1, b_1)+\lambda_2 \cdot (a_2, b_2)+ \ldots +\lambda_n \cdot (a_n, b_n)$$

van paren (a_i, b_i), waarbij steeds $a_i \varepsilon E$ en $b_i \varepsilon F$, met coëfficiënten $\lambda_i \varepsilon \Lambda$.

De optelling in $E * F$ gebeurt coëfficientsgewijs, d.w.z.

$$\begin{aligned}&[\lambda_1(a_1, b_1)+\lambda_2 \cdot (a_2, b_2)+ \ldots \lambda_n \cdot (a_n, b_n)]+\\ &\quad +[\mu_1 \cdot (a_1, b_1)+\mu_2 \cdot (a_2, b_2)+ \ldots +\mu_n \cdot (a_n, b_n)] =\\ &\quad = (\lambda_1+\mu_1) \cdot (a_1, b_1)+ \ldots +(\lambda_n+\mu_n) \cdot (a_n, b_n).\end{aligned}$$

Evenzo gebeurt vermenigvuldiging met een getal $\mu \varepsilon \Lambda$ coëfficientsgewijs:

$$\begin{aligned}&\mu \cdot [\lambda_1 \cdot (a_1, b_1)+\lambda_2 \cdot (a_2, b_2)+ \ldots +\lambda_n \cdot (a_n, b_n)] =\\ &\quad = (\mu \cdot \lambda_1) \cdot (a_1, b_1)+(\mu \cdot \lambda_2) \cdot (a_2, b_2)+ \ldots +(\mu \cdot \lambda_n)\cdot(a_n,b_n).\end{aligned}$$

Men kan eenvoudig nagaan dat $E * F$, met deze optelling en vermenigvuldiging, inderdaad een Λ-modulus is.

Het merkwaardige is, dat we bij de constructie van $E * F$ in het geheel geen gebruik hebben gemaakt van het feit dat er in E en F optelling, en vermenigvuldiging met scalaire Λ, mogelijk is. Dat gaat pas bij de volgende stap een rol spelen.

We gaan ons nu nl. bezighouden met speciale elementen van $E * F$; en wel met de elementen die één van de volgende gedaanten hebben:

(3.2) $$(a_1+a_2, b)-(a_1, b)-(a_2, b);$$

(3.3) $$(a, b_1+b_2)-(a, b_1)-(a, b_2);$$

(3.4) $$(\lambda a, b)-\lambda \cdot (a, b);$$

(3.5) $$(a, \lambda b)-\lambda \cdot (a, b).$$

Zij R de kleinste deelmodulus van $E * F$ die al deze elementen bevat.

Definitie. De restklassenmodulus $(E * F)/R$ heet het *tensorprodukt* van E en F, en wordt aangegeven met $E \otimes F$.

Wat houdt deze definitie nu eigenlijk in? Om te beginnen komt de overgang van $E * F$ op $(E * F)/R$ neer op het volgende: twee elementen van $E * F$ achten we gelijk, identificeren we met elkaar, als hun verschil tot R behoort. I.h.b. worden alle elementen van R geïdentificeerd met 0.

Laten we de restklasse van een element $(a, b) \varepsilon E * F$ aangeven met $a \otimes b$. Dan kunnen we de restklasse van het element (3.1) aangeven met

(3.6) $$\lambda_1 \cdot a_1 \otimes b_1+\lambda_2 \cdot a_2 \otimes b_2+ \ldots +\lambda_n \cdot a_n \otimes b_n.$$

Dit is dus de algemene gedaante van een element van $E \otimes F$; m.a.w. $E \otimes F$ voldoet in ieder geval aan de eerste eis die Whitney stelde: ieder element is een lineaire combinatie van elementen van de vorm $a \otimes b$.

De restklasse van het element (3.2) kan worden geschreven als

$$(a_1+a_2) \otimes b-a_1 \otimes b-a_2 \otimes b.$$

Aangezien ieder element van de vorm (3.2) behoort tot R en dus wordt geïdentificeerd met 0, vinden we dat

$$(a_1+a_2) \otimes b-a_1 \otimes b-a_2 \otimes b = 0.$$

Anders gesteld

(3.7) $$(a_1+a_2) \otimes b = a_1 \otimes b+a_2 \otimes b.$$

Een gelijksoortige redenering, toegepast op elementen van $E * F$ van de vorm (3.3), (3.4) of (3.5), geeft

(3.8) $$a \otimes (b_1+b_2) = a \otimes b_1+a \otimes b_2;$$

(3.9) $$(\lambda a) \otimes b = \lambda \cdot a \otimes b = a \otimes (\lambda b).$$

Aan beide eisen van Whitney is dus voldaan: ieder element van $E \otimes F$ is een som van elementen van de vorm $a \otimes b$, en $\otimes$ voldoet aan de distributieve wetten (3.7) en (3.8).

Bovendien hebben we nog gevonden dat (3.9) geldt. Dit houdt verband met het feit dat Whitney zich in zijn oorspronkelijke beschouwingen alleen bezighoudt met moduli over de ring van alle gehele getallen. Voor dergelijke moduli is (3.9) een gevolg van (3.7) en (3.8); e.g. geldt

$$(2a) \otimes b = (a+a) \otimes b = a \otimes b + a \otimes b = 2(a \otimes b).$$

Is Λ niet de ring der gehele getallen, dan is (3.9) niet een gevolg van (3.7) en (3.8), terwijl we toch een dergelijke relatie willen hebben, omdat $E \otimes F$ weer een Λ-modulus moet zijn, en we de scalaire vermenigvuldiging $\lambda \cdot a \otimes b$ in verband willen brengen met de vermenigvuldiging met λ in E en F. Algemeen volgt uit (3.9):

$$a \otimes 0 = 0 \otimes b = 0; \tag{3.10}$$

$$a \otimes (-b) = (-a) \otimes b = -(a \otimes b). \tag{3.11}$$

De eigenschappen (3.7), (3.8) en (3.9) kunnen we aldus samenvatten:

Stelling 1. De functie $f(x, y) = x \otimes y$ van de veranderlijken $x \in E$, $y \in F$, met waarden in $E \otimes F$, is *bilineair*.

Men kan aantonen, dat $E \otimes F$ in zekere zin de ruimste Λ-modulus G is met de eigenschap, dat er een bilineaire functie $f(x, y)$ ($x \in E$, $y \in F$) met waarden in G bestaat, zodanig, dat ieder element van G een eindige lineaire combinatie is van beeldelementen $f(x_i, y_i)$.

4. *Enige eigenschappen*

In § 1 is de directe som $E \oplus F$ van twee moduli E en F ter sprake gekomen. Deze directe som heeft de prettige eigenschap dat we E en F er in kunnen inbedden: de afbeelding $a \to (a, 0)$ is een isomorfe afbeelding van E op de deelverzameling van $E \oplus F$ die bestaat uit alle elementen met tweede coördinaat 0; daarmee kunnen we E, als we willen, identificeren. Evenzo kunnen we desgewenst F identificeren met de verzameling van alle elementen van de vorm $(0, b)$ van $E \oplus F$.

Het tensorprodukt $E \otimes F$ heeft i.h.a. deze prettige eigenschap niet. Dit blijkt o.a. uit het feit dat het tensorprodukt van twee fatsoenlijke, niet-triviale moduli de triviale modulus kan zijn die alleen uit het nul-element bestaat.

Voorbeeld

$$Z_2 \otimes Z_3 \text{ is de nulmodulus.}$$

Met Z_n bedoelen we, zoals in § 2 is gezegd, de verzameling van alle restklassen modulo n. We beschouwen Z_2 en Z_3 hier al moduli over Z. Zij $a \varepsilon Z_2$ en $b \varepsilon Z_3$; dan is

$$a \otimes b = 3(a \otimes b) - 2(a \otimes b) = a \otimes (3b) - (2a) \otimes b = 0,$$

want $3b = 0$ voor iedere $b \varepsilon Z_3$, en $2a = 0$ voor iedere $a \varepsilon Z_2$. Ieder element is een lineaire combinatie van elementen van de vorm $a \otimes b$, en is dus ook 0. Dus $Z_2 \otimes Z_3$ bestaat alleen uit het element 0.

Dit voorbeeld is een bijzonder geval van de volgende stelling:

Stelling 2. $Z_n \otimes Z_m \approx Z_d$, waar $d =$ g.g.d. (n, m).

Stelling 2 geldt ook als $m = 0$, waarbij $Z_0 = Z$, terwijl g.g.d. $(n, 0) = n$. We vinden in dit geval, dat $Z_n \otimes Z \approx Z_n$. Hiervan zullen we een generalisatie bewijzen:

Stelling 3. Zij E een Λ-modulus, en beschouw de ring Λ zelf ook als Λ-modulus. Er geldt: $E \otimes \Lambda \approx E$.

Bewijs. We merken eerst op dat we ieder element van $E \otimes \Lambda$ kunnen schrijven in de vorm $x \otimes 1$. Een willekeurig element van $E \otimes \Lambda$ heeft nl. de gedaante

$$z = \lambda_1 \cdot x_1 \otimes \mu_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \otimes \mu_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n \otimes \mu_n,$$

met λ_i en $\mu_i \varepsilon \Lambda$ en $x_i \varepsilon E$ $(1 \leq i \leq n)$.

Maar

$$\begin{aligned} \lambda_i \cdot x_i \otimes \mu_i &= \lambda_i \cdot x_i \otimes (\mu_i \cdot 1) = \lambda_i \cdot \mu_i(x_i \otimes 1) = \\ &= (\lambda_i \mu_i) \cdot x_i \otimes 1 = (\lambda_i \mu_i x_i) \otimes 1, \end{aligned}$$

op grond van (3.9). Dus

$$\begin{aligned} z &= (\lambda_1 \mu_1 x_1) \otimes 1 + (\lambda_2 \mu_2 x_2) \otimes 1 + \ldots + (\lambda_n \mu_n x_n) \otimes 1 = \\ &= (\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \ldots + \lambda_n \mu_n x_n) \otimes 1 = \\ &= x \otimes 1, \end{aligned}$$

met $x = \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \ldots + \lambda_n \mu_n x_n \varepsilon E$.

Nu we dit bewezen hebben is het bijna evident dat $E \otimes \Lambda$ en E isomorf zijn: de afbeelding f van $E \otimes \Lambda$ naar E die aan $x \otimes 1$ toevoegt $f(x \otimes 1) = x$ is een isomorfie van $E \otimes \Lambda$ op E.

Stel nu, dat er in de Λ-modulus E elementen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ bestaan, waarvan ieder element van E een lineaire combinatie is:

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m. \tag{4.1}$$

Stel evenzo, dat er in de Λ-modulus F elementen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bestaan, waarvan ieder element van F een lineaire combinatie is:

$$(4.2) \qquad y = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \ldots + \mu_n b_n.$$

Dan is klaarblijkelijk

$$(4.3) \qquad x \otimes y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \cdot a_i \otimes b_j,$$

en er volgt dat ieder element van $E \otimes F$ een lineaire combinatie is van de $m \cdot n$ elementen $a_i \otimes b_j (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$.

Men kan meer aantonen: als de elementen $a_1, \ldots, a_m$ een *basis* vormen voor E, d.w.z. als ieder element van E op *ondubbelzinnige* wijze in de vorm (4.1) is te schrijven; en als evenzo de elementen $b_1, \ldots, b_n$ een basis vormen voor F; dan vormen de elementen $a_i \otimes b_j$ $(1 \leqq i \leqq m;\ 1 \leqq j \leqq n)$ een basis voor $E \otimes F$.

Neem het bijzondere geval dat E een m-dimensionale reële vectorruimte (m-dimensionale euclidische ruimte) is, en F een n-dimensionale reële vectorruimte. Volgens het bovenstaande is er dan in $E \otimes F$ een basis met juist $m \cdot n$ onafhankelijke elementen; d.w.z. er geldt in dit geval

$$(4.4) \qquad \dim (E \otimes F) = \dim E \times \dim F.$$

Dit resultaat, samen met stelling **3**, stelt ons in de gelegenheid nog een belangrijke eigenaardigheid van het tensorprodukt toe te lichten: het tensorprodukt $E \otimes F$ is *afhankelijk van de ring* Λ waarover men E en F als moduli beschouwt.

Neem e.g. $E = F = C$, de verzameling der complexe getallen. Dan kunnen we E en F beschouwen als moduli over C, en volgens stelling **2** is in dat geval

$$(4.5) \qquad E \otimes F = E \otimes C \approx E.$$

Maar we kunnen E en F ook beschouwen als moduli over R, de ring der reële getallen. In dat geval is de dimensie van E en van F gelijk aan de dimensie van het vlak der complexe getallen t.o.v. de reële getallen, dus 2; en uit (4.4) volgt dan dat $\dim (E \otimes F) = 4 \neq \dim E$. In dit geval is $E \otimes F$ dus zeker *niet* isomorf met E.

In verband met deze dubbelzinnigheid is het gebruik om, wanneer er sprake is van meer dan één ring, bij de notatie van het tensorprodukt aan te geven over welke ring dit genomen is: $E \otimes_\Lambda F$. We hebben dan aangetoond:

$$E \otimes_C F \quad E \otimes_R F.$$

Tenslotte merken we op dat het tensorprodukt in zekere zin *commutatief* is. Er geldt nl.

Stelling 4. $E \otimes F \approx F \otimes E$.

Bewijs. De afbeelding die aan $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_i \otimes b_i$ toevoegt $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i \otimes a_i$ is een isomorfie.
In dezelfde zin is het tensorprodukt *associatief*:

Stelling 5. Als E, F en G Λ-moduli zijn, dan is $(E \otimes F) \otimes G \approx E \otimes (F \otimes G)$.

5. *Een toepassing.*

Stel Λ en $\sum$ zijn twee ringen, waarbij Λ een deelring is van $\sum$. Dat kan iedere modulus over de grotere ring, $\sum$, ook beschouwd worden als modulus over Λ. Het omgekeerde is echter i.h.a. niet het geval, zoals we reeds zagen in § 2, voorbeeld 7: alle roosterpunten in het platte vlak (i.e. alle punten met gehele coördinaten) vormen een modulus over de ring Z der gehele getallen, maar niet over de grotere ring R der reële getallen.

Met behulp van het tensorprodukt kan men nu een methode aangeven om een Λ-modulus E *uit te breiden* tot een $\sum$-modulus. Aangezien we nl. $\sum$ zelf ook als Λ-modulus kunnen beschouwen, kunnen we vormen:

$$E \otimes_{\Lambda} \textstyle\sum.$$

De elementen van $E \otimes_{\Lambda} \sum$ zijn lineaire combinaties van elementen van de vorm $x \otimes \sigma$, $x \in E$, $\sigma \in \sum$.

Als $\lambda \in \Lambda$, dan is, zoals immers uit de definitie van het tensorprodukt volgt,

$$\lambda \cdot x \otimes \sigma = (\lambda x) \otimes \sigma = x \otimes \lambda\sigma.$$

Beschouw nu een willekeurige $\rho \in \sum$. Noch $\rho \cdot x \otimes \sigma$, noch $\rho \cdot x$ is gedefinieerd, maar wel $\rho \cdot \sigma$. We definiëren nu:

$$\rho \cdot x \otimes \sigma = x \otimes \rho\sigma; \tag{5.1}$$

en algemeen, als $z = \lambda_1 \cdot x_1 \otimes \sigma_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \otimes \sigma_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n \otimes \sigma_n$ een willekeurig element van $E \otimes_{\Lambda} \sum$ is:

$$\rho \cdot z = \lambda_1 \cdot x_1 \otimes \rho\sigma_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \otimes \rho\sigma_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n \otimes \rho\sigma_n. \tag{5.2}$$

Men kan aantonen, dat op deze wijze $E \otimes_{\Lambda} \sum$ tot een $\sum$-modulus wordt.

Op grond van deze definitie kunnen we nu ook schrijven

(5.3) $$x \otimes \sigma = x \otimes (\sigma \cdot 1) = \sigma \cdot x \otimes 1.$$

Dus ook, als $z = \lambda_1 \cdot x_1 \otimes \sigma_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \otimes \sigma_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n \otimes \sigma_n$,

(5.4) $$z = \lambda_1 \sigma_1 \cdot x_1 \otimes 1 + \lambda_2 \sigma_2 \cdot x_2 \otimes 1 + \ldots + \lambda_n \sigma_n \cdot x_n \otimes 1.$$

Hieruit volgt eenvoudig: als E een basis heeft over Λ, bestaande uit elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dan heeft $E \otimes_\Lambda \sum$, over $\sum$, als basis de elementen $a_1 \otimes 1, a_2 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1$.

Laten we nog eens beschouwen het voorbeeld met $\Lambda = Z$, $\sum = R$, E = verzameling der roosterpunten in het platte vlak. Dan heeft E een basis over Z, bestaande uit de punten $e_1 = (1,0)$ en $e_2 = (0,1)$. Volgens het bovenstaande vormen de elementen $e_1 \otimes 1$ en $e_2 \otimes 1$ een basis voor $E \otimes_Z R$; d.w.z. ieder element van $E \otimes_Z R$ is ondubbelzinnig te schrijven als

$$\rho_1 \cdot e_1 \otimes 1 + \rho_2 \cdot e_2 \otimes 1,$$

waar ρ_1, ρ_2 reële getallen zijn. M.a.w. ieder element van $E \otimes_Z R$ is gekarakteriseerd door twee reële coordinaten, en $E \otimes_Z R$ is dus in wezen niets anders dan het hele platte vlak. (Dit laat tevens zien dat de $\sum$-modulus $E \otimes_\Lambda \sum$ i.h.a. echt „groter" is dan de Λ-modulus E).

Op dezelfde wijze kan men euclidische ruimte (beschouwd als modulus over R) uitbreiden tot een complexe ruimte, door het tensorprodukt (over R) te vormen met de ring der complexe getallen: of desgewenst tot een quaternionenruimte, door het tensorprodukt te vormen met de ring der quaternionen.

Als laatste voorbeeld nemen we voor Λ de ring R der reële getallen, en voor $\sum$ de ring M_n van alle reële $n \times n$-matrices. (Dan kunnen we Λ beschouwen als deelring van $\sum$, als we een reëel getal ρ identificeren met de diagonaalmatrix

$$\begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & \rho & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \rho \end{pmatrix},$$

met n rijen en kolommen).

Tenslotte nemen we voor E de verzameling van alle reële $p \times q$ matrices. Hoe ziet dan de $\sum$-modulus $E \otimes_R M_n$ er uit?

De modulus E heeft over R een basis; hiervoor kunnen we nemen de $p \cdot q$ verschillende matrices waarvoor één matrix-element 1 is, terwijl alle andere matrixelementen 0 zijn. Schrijven we E_{ij} voor die matrix uit deze basis waarbij de 1 op het kruispunt van de i^e rij en de j^e kolom staat, dan is een willekeurige matrix $A = (a_{ij})$ uit E te schrijven als

$$A = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot E_{ij}. \tag{5.5}$$

Als we overgaan op het tensorprodukt $E \otimes_R M_n$, dan heeft dit over M_n nog steeds een basis van $p \cdot q$ elementen, maar we moeten nu lineaire combinaties vormen met coëfficienten die tot M_n behoren, die dus $n \times n$ matrices zijn. Dit betekent dat we $E \otimes_R M_n$ kunnen opvatten als de verzameling der matrices

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{p1} & X_{p2} & \dots & X_{pq} \end{pmatrix},$$

waarbij alle X_{ij} $n \times n$ matrices zijn. Als we van deze voorstelling gebruik maken, dan moeten we het element $A \otimes B$ van $E \otimes {}_R M_n$ ($A \varepsilon E$, $B \varepsilon M_n$) schrijven als

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1q}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \dots & a_{pq}B \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

(als $A = (a_{ij})$. Vatten we dit op als een blokschrijfwijze van een $np \times nq$ matrix, dan is dit het zog. *Kroneckerprodukt* van de matrices A en B.

DE CONTRAPOSITIE EN HET BEWIJS UIT HET ONGERIJMDE

door

Dr. P. G. J. Vredenduin
OOSTERBEEK

Elke leraar is bij zijn lessen wel eens de volgende of een analoge situatie tegengekomen. Bewezen zijn de stellingen:

als een vierhoek een koordenvierhoek is, dan zijn overstaande hoeken elkaars supplement, (1)

als overstaande hoeken van een vierhoek elkaars supplement zijn dan is de vierhoek een koordenvierhoek. (2)

Gevraagd wordt te bewijzen:

als in een vierhoek overstaande hoeken niet elkaars supplement zijn, dan is de vierhoek geen koordenvierhoek. (3)

De vraag is, of (3) een direct gevolg is van (1) of van (2). De meeste leerlingen zeggen bij eerste kennismaking met dit probleem: (2), en leraren zeggen: (1).

Ik heb het altijd tamelijk moeilijk gevonden de leerlingen duidelijk te maken, dat (3) inderdaad een direct gevolg is van (1). Natuurlijk kan men zeggen: onderstel eens, dat de vierhoek wel een koordenvierhoek was. Dan waren volgens (1) overstaande hoeken elkaars supplement. En in (3) is gegeven, dat overstaande hoeken niet elkaars supplement zijn. Dus kan de vierhoek geen koordenvierhoek zijn. Dit sluit als een bus, maar mijn ervaring is, dat deze redenering de leerlingen niet aanspreekt. Ik heb daarom wel eens geprobeerd, of het inzicht wilde doorbreken met behulp van een voorbeeld uit het dagelijks leven. Een dergelijk voorbeeld moet vooral een natuurlijk karakter hebben. Het volgende heeft mij goed geholpen.

Als ik voor 1 uur het perron opkom, dan staat de trein naar Utrecht er nog. Dit is ons uitgangspunt. Nu doet zich de situatie voor, dat ik het perron opkom en dat de trein naar Utrecht er niet meer staat. Wat volgt hieruit? Voor ieder is het antwoord evident: het is niet meer voor 1 uur.

We kunnen nu het probleem algemener stellen. Gegeven is

$$A \rightarrow B.$$