



Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science

H.M.C.A. Hop

Het tijdsafhankelijk gedrag van wachtrijprocessen
en de praktische toepassing van relaxatietijden

The Centre for Mathematics and Computer Science is a research institute of the Stichting Mathematisch Centrum, which was founded on February 11, 1946, as a nonprofit institution aiming at the promotion of mathematics, computer science, and their applications. It is sponsored by the Dutch Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.).

HET TIJDSAFHANKELIJK GEDRAG VAN WACHTRIJPROCESSEN EN DE PRAKTISCHE
TOEPASSING VAN RELAXATIETIJDEN

H.M.C.A. HOP

Mauritslaan 54, 3454 XT De Meern

Onze interesse gaat uit naar de hoeveelheid tijd die verstrijkt alvorens het gemiddelde aantal klanten in een netwerk van M/M/1 stations zijn stationaire waarde tot op 1% heeft benaderd, gegeven begincondities die afwijken van de evenwichtssituatie. In het bijzonder gaan we in op de vraag hoe die hoeveelheid tijd zich verhoudt tot de *relaxatietijd* van het gemiddelde aantal klanten in het netwerk. Voor een aantal specifieke modellen wordt deze verhouding bepaald door oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen waarmee het model wordt beschreven. De numerieke resultaten blijken te worden bevestigd door de uitkomsten van simulaties.

1980 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION: 60K25, 69D58, 90B22.

TREFWOORDEN: wachtrijsysteem, relaxatietijd, tijdsafhankelijk gedrag, simulatie.

OPMERKING: Deze notitie is een verslag van het onderzoek dat de auteur als stagiaire op het CWI heeft verricht in de periode april-augustus 1984.

Notitie OS-N8403

Centrum voor Wiskunde en Informatica

Postbus 4079, 1009 AB Amsterdam

*The time-dependent behaviour of queueing processes
and the practical application of relaxation times*

Bibliotheek
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Amsterdam



INHOUD

Blz.	1	<i>Inleiding</i>
Blz.	2	Hoofdstuk 1 : <i>Het M/M/1 - wachtrijmodel</i>
Blz.	10	Hoofdstuk 2 : <i>Het M/M/2 - wachtrijmodel</i>
Blz.	12	Hoofdstuk 3 : <i>Netwerk met twee M/M/1 - stations in serie</i>
Blz.	16	Hoofdstuk 4 : <i>Netwerk met twee M/M/1 - stations met terugkoppeling</i>
Blz.	22	Hoofdstuk 5 : <i>Netwerk met drie M/M/1 - stations in serie</i>
Blz.	25	Hoofdstuk 6 : <i>Twee netwerken met drie M/M/1 - stations</i>
Blz.	28	Hoofdstuk 7 : <i>Simulatie</i>
Blz.	35	Hoofdstuk 8 : <i>Vergelijkingen en conclusies</i>
Blz.	37	<i>Literatuurlijst</i>



INLEIDING

De laatste tijd is er een groeiende belangstelling ontstaan in de analyse van netwerken van wachtrij-systemen. Tot voor kort was er weinig bekend over het tijdsafhankelijke gedrag van wachtrijmodellen. Het op analytische wijze bepalen van expliciete formules leidt in de meeste gevallen tot moeilijk hanteerbare formules. Zelfs voor het eenvoudige M/M/1 - wachtrijmodel zijn de resultaten al gecompliceerde formules met Bessel-functies.

We richten ons in hoofdzaak op het bepalen van een criterium, aan de hand waarvan we kunnen beslissen of een systeem op zeker tijdstip $t > 0$ in stationaire toestand verkeert of niet.

In (2) is in dat verband het concept van relaxatie-tijd gehanteerd.

Zij $f(t)$ een functie waarvoor geldt : $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| = |f(\infty)| < \infty$.

De relaxatie-tijd voor de functie $f(t)$ wordt als volgt gedefiniëerd :

$$T(f) = \inf\{T \mid f(t) - f(\infty) = O(e^{-t/T}), (t \rightarrow \infty)\}.$$

De relaxatie-tijd van een wachtrijstelsel definiëren we als volgt (zie (2)

blz. 1) : $T = T(P_{00})$,

waarbij : $P_{00} = P_{00}(t)$: de kans dat het systeem leeg is op tijdstip $t > 0$,
gegeven dat er geen klanten aanwezig zijn op tijdstip $t = 0$.

Het blijkt dat $T(P_{00})$ ook de relaxatie-tijd is van andere functies dan $P_{00}(t)$ (zie (2)).

In (2) is voor verschillende netwerken de relaxatie-tijd berekend. Het is echter niet zo, dat we uit die resultaten direct kunnen aflezen, op welk tijdstip een zekere, met het wachtrijmodel samenhangende, functie ϵ % afwijkt van zijn limiet waarde.

Definiër :

$$T_{\epsilon} = \min_{t > 0} \{\bar{t} \mid |1 - f(t)/f(\infty)| < \epsilon/100 \text{ voor alle } t > \bar{t}\}, (\epsilon > 0).$$

We kiezen voor $f(t)$ de functie $N(t)$, het gemiddeld aantal klanten in het systeem op tijdstip t (tenzij anders vermeld).

Ons doel is het bepalen van de initiële transiënte periode T voor verschillende netwerken van wachtrij-systemen. We gebruiken daarvoor het stelsel differentiaal vergelijkingen voor de kansverdeling van het aantal klanten in het systeem (nader gespecificeerd aan het begin van ieder hoofdstuk).

We willen de waarde van T_{ϵ} ($\epsilon = 1,5$) vergelijken met de relaxatie-tijd T voor een aantal netwerken. In hoofdstuk 7 vergelijken we de verkregen resultaten met die van M/M/ ∞ - netwerken.

Voor het oplossen van het stelsel diff. vergln. gebruiken we de standaard-procedure RKE (zie (1) en (6)).

Teneinde de resultaten te kunnen vergelijken met de 'werkelijkheid', is het tijdsafhankelijke gedrag van een aantal netwerken gesimuleerd. Het is interessant te zien hoe de theorie van relaxatie-tijd uitwerkt in een simulatieprogramma.

Tenslotte vergelijken we de verkregen resultaten met de reeds bekende gegevens bereikt door middel van diffusie-approximatie.

HOOFDSTUK 1 HET M/M/1 - WACHTRIJMDEL§1. Inleiding

In het nu volgende willen we het tijdsafhankelijke gedrag van het M/M/1 - wachtrijmodel, aan de hand van numerieke methode, onderzoeken.

Zij $P_j(t) = \Pr\{j \text{ klanten in het systeem op tijdstip } t\}$, $j = 0, 1, \dots$, $t \geq 0$. In eerste instantie maken we gebruik van het stelsel diff. vergln. voor de kansverdeling $\{P_j(t); j = 0, 1, \dots, t \geq 0\}$.

Zij $N(t)$ het gemiddeld aantal klanten in het systeem op tijdstip t ($t \geq 0$); $V(t)$ de variantie van het aantal klanten in het systeem op tijdstip t ($t \geq 0$).

Aan de hand van de uit het stelsel diff. vergln. volgende numerieke resultaten, kunnen we nu $N(t)$ en $V(t)$ berekenen. Daarbij is aangenomen dat er op tijdstip $t = 0$ geen klanten in het systeem aanwezig zijn.

Door direct gebruik te maken van de diff. vergln. voor $N(t)$ en $V(t)$, (eenvoudig af te leiden uit het stelsel voor $\{P_j(t); j = 0, 1, \dots, t \geq 0\}$, zie blz. 5) en een formule voor $P_0(t)$ (zie (12) blz. 13) komen we tot de zelfde resultaten

Aan de hand van de verkregen resultaten kunnen we de initiële transiënte periode T_E uitdrukken in termen van de relaxatie-tijd T (numeriek).

Het criterium aan de hand waarvan we T_E bepalen is in eerste instantie $N(t)$. Er zijn ook enige resultaten afgeleid indien we voor dat criterium de variantie ($V(t)$) nemen.

Het gedrag van $N(t)$ is ook onderzocht voor het geval dat er op tijdstip $t = 0$ reeds klanten in het systeem aanwezig zijn.

§2. Berekeningswijze

Zij β de gemiddelde bedieningsduur en λ het gemiddeld aantal arriveringen per tijdseenheid. De bedieningsduur zowel als de tijdsduur tussen twee opeenvolgende arriveringen zijn negatief-exponentieel verdeeld.

De verkeersintensiteit is gedefiniëerd als zijnde: $\rho = \lambda \cdot \beta$.

De kansverdeling $\{P_j(t); j = 0, 1, \dots, t \geq 0\}$ voldoet aan het volgende stelsel diff. vergln. (zie (4) blz. 62) :

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$\frac{d}{dt}P_j(t) = -(\lambda + \mu)P_j(t) + \lambda P_{j-1}(t) + \mu P_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \dots$$

Hierbij geldt dat: $\mu = 1/\beta$.

We beperken ons tot de deterministische begincondities, d.w.z. : $P_k(0+) = 1$, voor zekere $k \in \mathbb{N}$.

Teneinde dit stelsel numeriek op te kunnen lossen, moeten we het oneindige stelsel beperken tot een eindig stelsel. Dit komt overeen met het beschouwen van een M/M/1 - wachtrijmodel met eindige wachtruimte. Zij $N-1$ het aantal wachtplaatsen in het systeem.

Het stelsel diff. vergln. wordt dan :

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$\frac{d}{dt}P_j(t) = -(\lambda + \mu)P_j(t) + \lambda P_{j-1}(t) + \mu P_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$\frac{d}{dt}P_N(t) = -\mu P_N(t) + \lambda P_{N-1}(t).$$

Begincondities : $P_k(0+) = 1$, voor zekere $k \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Kies nu N zodanig dat $P_N(\infty) \approx 10^{-8}$. Dat is een zelfde keuze als in (9) blz. 428 wordt voorgesteld.

We willen nu, d.m.v. het oplossen van het laatst genoemde stelsel diff. vergln., de waarde van T_ε , ($\varepsilon = 1, 5$) bepalen.

De keuze van het aantal wachtplaatsen (N) lijkt nog erg willekeurig. Ter controle van de juistheid van onze keuze hebben we voor $\rho = 0.7$ het stelsel diff. vergln. ook opgelost voor $N = 5, 10, 15, 20, 30, 40$, en 50 .

Zij $T(N)$ de relaxatie-tijd voor het M/M/1 - wachtrijmodel met $N-1$ wachtplaatsen. Uit de definitie van relaxatie-tijd (zie inleiding) en de volgende relatie (zie (12) blz. 13) :

$$P_{00}(t) - P_{00}(\infty) = -2/(N+1) \sum_{j=1}^N \frac{\exp(-(\lambda + \mu)t + 2t\sqrt{(\lambda\mu)\cos[j\pi/(N+1)]}) \rho^{-k/2}}{(1 - 2\sqrt{\rho}\cos[j\pi/(N+1)] + \rho)} \cdot \{\sin[kj\pi/(N+1)] - \sqrt{\rho}\sin[(k+1)j\pi/(N+1)]\} \sqrt{\rho}\sin[j\pi/(N+1)],$$

waarbij de term met $j=1$ het asymptotisch gedrag bepaald, volgt :

$$T(N) = [\lambda + \mu - 2\sqrt{(\lambda\mu)\cos[\pi/(N+1)]}]^{-1}, \quad (\text{zie (2) blz. 4}).$$

De relaxatie-tijd voor het M/M/1 - wachtrijmodel met onbeperkte wachtruimte is : $T = \beta \cdot (1 - \sqrt{\rho})^{-2}$, (zie (2) blz. 7).

In eerste instantie gaan we er van uit dat er op tijdstip $t = 0$ geen klanten in het systeem aanwezig zijn. De resultaten zijn ($\lambda = 1$, $\rho = 0.7$) :

(1)	N	T_1	T_5	T	$T(N)$	T_1/T	T_5/T	$T_1/T(N)$	$T_5/T(N)$
	5	12.3	7.8	26.24	2.79	0.47	0.30	4.41	2.80
	10	30.5	18.6	"	7.41	1.16	0.71	4.12	2.51
	15	45.5	26.3	"	11.90	1.73	1.00	3.81	2.21
	20	53.6	29.6	"	15.43	2.04	1.13	3.47	1.92
	30	58.0	30.9	"	19.85	2.21	1.18	2.92	1.56
	40	58.4	30.9	"	22.16	2.23	1.18	2.64	1.39
	50	58.4	30.9	"	23.45	2.23	1.18	2.49	1.32

Uit bovenstaande tabel volgt dat voor de bepaling van T_ε , ($\varepsilon = 1, 5$) voor $\rho = 0.7$, $N = 40$ een voldoende groot aantal wachtplaatsen is. Dat komt overeen met een kans van 10^{-7} op verlies van een klant ten gevolge van een overbelast systeem. We mogen hieruit concluderen dat N ook voldoende groot gekozen is voor de overige verkeersintensiteiten.

Algemene resultaten :

(2)	ρ	N	T_1	T_5	T	T_1/T	T_5/T
	0.1	8	0.65	0.39	0.21	3.10	1.86
	0.2	11	1.8	1.1	0.65	2.77	1.69
	0.3	14	3.8	2.2	1.47	2.59	1.50
	0.4	19	7.2	4.1	2.96	2.43	1.39
	0.5	25	13.7	7.5	5.83	2.35	1.29
	0.6	35	27.0	14.5	11.81	2.29	1.23
	0.7	50	58.4	30.9	26.24	2.23	1.18
	0.8	75	156.2	81.7	71.78	2.18	1.14
	0.9	140	729.3	377.1	341.76	2.13	1.10

Zij K het aantal klanten aanwezig in het systeem op tijdstip $t = 0$. Hieronder volgen enige resultaten waarbij $K \neq 0$ ($\rho = 0.7$, $\lambda = 1$) :

(Teneinde in de gevallen $K = 25$ en 30 nog te voldoen aan de eis dat :

$P_N(\infty) \approx 10^{-8}$, is het nodig N iets hoger te nemen.)

(3)	K	N	T_1	T_5	T_1/T	T_5/T
	0	50	58.4	30.9	2.23	1.18
	3	50	48.3	19.4	1.84	0.74
	5	50	41.5	22.7	1.58	0.87
	8	50	79.8	51.1	3.04	1.95
	10	50	95.0	64.3	3.62	2.45
	15	50	124.5	91.0	4.74	3.47
	18	50	139.6	104.9	5.32	4.00
	25	60	171.3	134.4	6.53	5.12
	30	60	192.1	154.0	7.32	5.87

§3. Foutschattingen

De hieronder volgende foutschattingen hebben alleen betrekking op de resultaten uit tabel (2) blz. 3 .

De fout in de resultaten voor $N(t)$, zoals berekend aan de hand van het stelsel diff. vergln., bestaan uit twee delen :

- 1) Een fout ten gevolge van het oplossen van een eindig stelsel diff. vergln. i.p.v. het oneindige stelsel.
- 2) De standaard-procedure RKE (zie (1)), die we gebruiken voor het oplossen van het stelsel, levert $P_j(t)$; $j = 0, 1, \dots, N$ met een relatieve fout van 10^{-5} voor alle t .

ad 1)

Indien het systeem in stationaire toestand verkeert, is de gemiddelde wachtrijslengte van het M/M/1 - wachtrijmodel : $\rho/(1-\rho)$.

Voor het M/M/1 - wachtrijmodel met $N-1$ wachtplaatsen is de gemiddelde wachtrijslengte : $\frac{\rho}{1-\rho^{N+1}} \left[\frac{1-\rho^N}{1-\rho} - N\rho^N \right]$, (zie (12) blz. 13).

Het verschil tussen die twee waarden is de fout die we introduceren op $N(\infty)$.

Dat verschil is : $\frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} \approx (N+1)\rho^{N+1}$ (voor N groot).

Deze waarde is een bovengrens voor de fout die we maken ten gevolge van het beperken van het aantal wachtplaatsen.

ad 2)

$P_j(t)$; $j = 0, 1, \dots, N$, wordt door de standaard-procedure berekend met een relatieve fout van 10^{-5} . Als gevolg daarvan wordt ook $N(t)$ berekend met een relatieve fout van 10^{-5} (voor alle t).

We zijn nu in staat iets te zeggen over de fout in de benadering voor T_1 .

Zij $d = N'(T_1)$, en e de fout in de benadering voor $N(T_1)$, die we aan de hand van bovenstaande gegevens kunnen berekenen.

Uit de computerresultaten volgt dat $d \approx 6.5 \cdot 10^{-3}$ ($\rho = 0.1$) en $d \approx 0.4 \cdot 10^{-3}$ ($\rho = 0.9$). (d is dalend voor stijgende verkeersintensiteit.) De absolute fout in T_1 is dan e/d .

Dat resulteert in een relatieve fout, oplopend van 0.02 % voor $\rho = 0.1$ tot 0.05 % voor $\rho = 0.9$.

§4. De variantie als maat voor de convergentie van $\{P_j(t); j = 0, 1, \dots\}$

In §1.2 hebben we als maat voor de convergentie van de kansverdeling $\{P_j(t); j = 0, 1, \dots, t \geq 0\}$ het gemiddelde van die verdeling gekozen. In deze paragraaf nemen we de variantie van die verdeling als maat.

Definiëer :

$$\bar{T}_\epsilon = \min_{t > 0} \{ \bar{t}; 1 - V(t)/V(\infty) < \epsilon/100 \text{ voor alle } t > \bar{t} \}, (\epsilon > 0).$$

Daar we uit voorgaande resultaten de kansverdeling $\{P_j(t); j = 0, 1, \dots, N\}$ voor een aantal waarden van t hebben berekend, kunnen we nu ook de variantie van de verdeling voor die waarden van t berekenen.

D.m.v. die resultaten kunnen we $\bar{T}_\epsilon$, ($\epsilon = 1, 5$) berekenen.

Dit is alleen gedaan voor $\rho \leq 0.7$, daar voor hogere verkeersintensiteiten deze berekening erg veel tijd in beslag neemt.

Resultaten :

(4) ρ	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1/T$	T_1	T_1/T
0.1	0.72	3.36	0.65	3.10
0.2	2.1	3.25	1.8	2.77
0.3	4.7	3.20	3.8	2.59
0.4	9.4	3.17	7.2	2.43
0.5	18.4	3.16	13.7	2.35
0.6	37.1	3.14	27.0	2.29
0.7	82.4	3.14	58.4	2.23

In deze tabel zijn de resultaten vergeleken met die uit tabel (2) blz. 3 .

De variantie $V(t)$ is ook nog op een andere manier te berekenen. Voor $N(t)$ en $V(t)$ kunnen de volgende diff. vergln. uit het stelsel voor $\{P_j(t); j = 0, 1, \dots\}$ worden afgeleid :

$$\frac{d}{dt}N(t) = \lambda - \mu(1 - P_0(t)).$$

$$\frac{d}{dt}V(t) = \lambda + \mu - \mu P_0(t)[1 + 2N(t)].$$

De begincondities zijn in dit geval : $N(0+) = V(0+) = 0$.

De nader te bepalen term in deze diff. vergln. is $P_0(t)$.

Voor het M/M/1 - wachtrijmodel met $N-1$ wachtplaatsen geldt :

$$P_0(t) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} - \frac{2}{(N+1)} \cdot \sum_{j=1}^N \frac{\exp[-(\lambda + \mu)t + 2t\sqrt{(\lambda\mu)\cos[j\pi/(N+1)]}] \rho^{-k/2}}{[1 - 2\sqrt{\rho}\cos[j\pi/(N+1)] + \rho]} \cdot \{\sin[kj\pi/(N+1)] - \sqrt{\rho}\sin[(k+1)j\pi/(N+1)]\} \cdot \sqrt{\rho}\sin[j\pi/(N+1)],$$

waarbij k het aantal klanten is, aanwezig op tijdstip $t = 0$ (zie (12) blz 13).

Door nu N weer voldoende groot te kiezen geeft deze formule een zeer goede benadering voor $P_0(t)$ voor het M/M/1 - wachtrijmodel.

De berekening volgend de bovenstaande formules leidt natuurlijk tot de zelfde resultaten als de berekening aan de hand van de gegevens uit §1.2 .

§5. Enige opmerkingen over het gedrag van $N(t)$

Zij $N_k(t)$ het gemiddeld aantal klanten in het systeem op tijdstip t , indien het systeem gestart is op tijdstip $t = 0$ met k klanten.

Voor $N_k(t)$ geldt dan de volgende diff. vergl. :

$$\frac{d}{dt}N_k(t) = \lambda - \mu(1 - P_{k0}(t)) \quad , \quad N_k(0+) = k \quad ,$$

waarbij $P_{k0}(t)$: de kans dat het systeem leeg is op tijdstip t , indien op tijdstip $t = 0$ met k klanten gestart is.

Deze diff. vergl. is eenvoudig af te leiden uit het stelsel voor $\{P_j(t); j = 0, 1, \dots\}$.

Voor $N_k(t)$ geldt (zie (5) blz. 85 e.v.) :

- indien $N'_k(t) \leq 0$, dan $N''_k(t) \geq 0$;
- indien $N'_k(t) \geq 0$, dan $N'_k(t+s) \geq 0$ voor $s \geq 0, t \geq 0$.

Hieruit volgt :

- indien $N'_k(0) > 0$, dan is $N_k(t)$ monotoon stijgend;
- indien $N'_k(0) \leq 0$, dan zijn er twee mogelijkheden, nl. :
 - $N_k(t)$ is monotoon dalend;
 - $N_k(t)$ heeft één absoluut minimum voor $0 < t < \infty$.

$N_k(t)$ heeft alleen een minimum indien $0 < k < \sqrt{\rho}/(1-\sqrt{\rho})$ (zie (5) blz. 64).

Er geldt : $N'_0(0) > 0$, en $N'_k(0) \leq 0$ voor $k = 1, 2, \dots$.

Nu kunnen we de volgende indeling maken :

- (1) $k = 0$: $N_0(t) \equiv N(t)$ is monotoon stijgend;
- (2) $1 \leq k < \frac{\sqrt{\rho}}{1-\sqrt{\rho}}$: $N_k(t)$ heeft een absoluut minimum voor $0 < \bar{t} < \infty$, voor $t > \bar{t}$ is $N_k(t)$ monotoon stijgend;
- (3) $k \geq \frac{\sqrt{\rho}}{1-\sqrt{\rho}}$: $N_k(t)$ is monotoon dalend.

Voor $k = 1, 2, \dots$ vertoont $N_k(t)$, voor kleine waarde van t , een lineair gedrag. Het bij benadering lineaire gedeelte van $N_k(t)$ wordt langer naarmate k toeneemt. Dat volgt uit de diff. vergl. voor $N_k(t)$ en het feit dat :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{k0}(t) = 0 \quad \text{voor } 0 < t < \infty \text{ (t vast)}.$$

Zie voor grafische resultaten voor $N_k(t)$ ($k = 0, 3, 5$, en 10 ; $\rho = 0.7$) figuur 1.

§6. Een benadering voor $N(t)$

Daar de berekening van $N(t)$ erg veel tijd in beslag neemt, is het zinvol een benadering voor $N(t)$ te vinden.

Voor $N(t)$ geldt (zie (4) blz. 180) :

$$N(t) = \rho/(1-\rho) - C(t/\tau)^{-3/2} \exp(-t/\tau) \cdot [\sqrt{\rho}/(1-\sqrt{\rho}) + O(t^{-1})] \quad , \quad t \rightarrow \infty \quad ,$$

$$\text{waarbij : } C = [2\sqrt{\pi\sqrt{\rho}}]^{-1};$$

$$\tau = \beta/(1-\sqrt{\rho})^2.$$

Dit is een asymptotische formule, en dus niet bruikbaar voor kleine waarde van t . We kunnen deze formule wel aanpassen zodanig dat ook voor lage waarden van t $N(t)$ redelijk wordt benaderd.

De term $(t/\tau)^{-3/2}$ zorgt, bij lage t , voor een divergent gedrag. Die term vervangen we door : $(t/\tau + h)^{-3/2}$, waarbij h een nader te bepalen constante is.

$$\text{Definiëer nu : } N_a(t) = \rho/(1-\rho) - C(t/\tau + h)^{-3/2} \exp(-t/\tau) \cdot [\sqrt{\rho}/(1-\sqrt{\rho})] \quad .$$

Kies nu h zodanig dat $N_a(0) = 0$.

Zie figuur 2 en 3 voor de grafische weergave van $N_a(t)$ met $\rho = 0.4$ en $\rho = 0.6$.

Aan de hand van de formule voor $N_a(t)$ kunnen we nu een benadering voor T_1 geven, zeg T_1^A .

Resultaten

(5)	ρ	T_1^A	T_1^A/T	T_1	T_1/T
	0.1	0.66	3.14	0.65	3.10
	0.2	1.8	2.77	1.8	2.77
	0.3	4.0	2.72	3.8	2.59
	0.4	7.7	2.60	7.2	2.43
	0.5	14.9	2.56	13.7	2.35
	0.6	29.6	2.51	27.0	2.29
	0.7	64.5	2.46	58.4	2.23
	0.8	173.8	2.42	156.2	2.18
	0.9	816.9	2.39	729.3	2.13

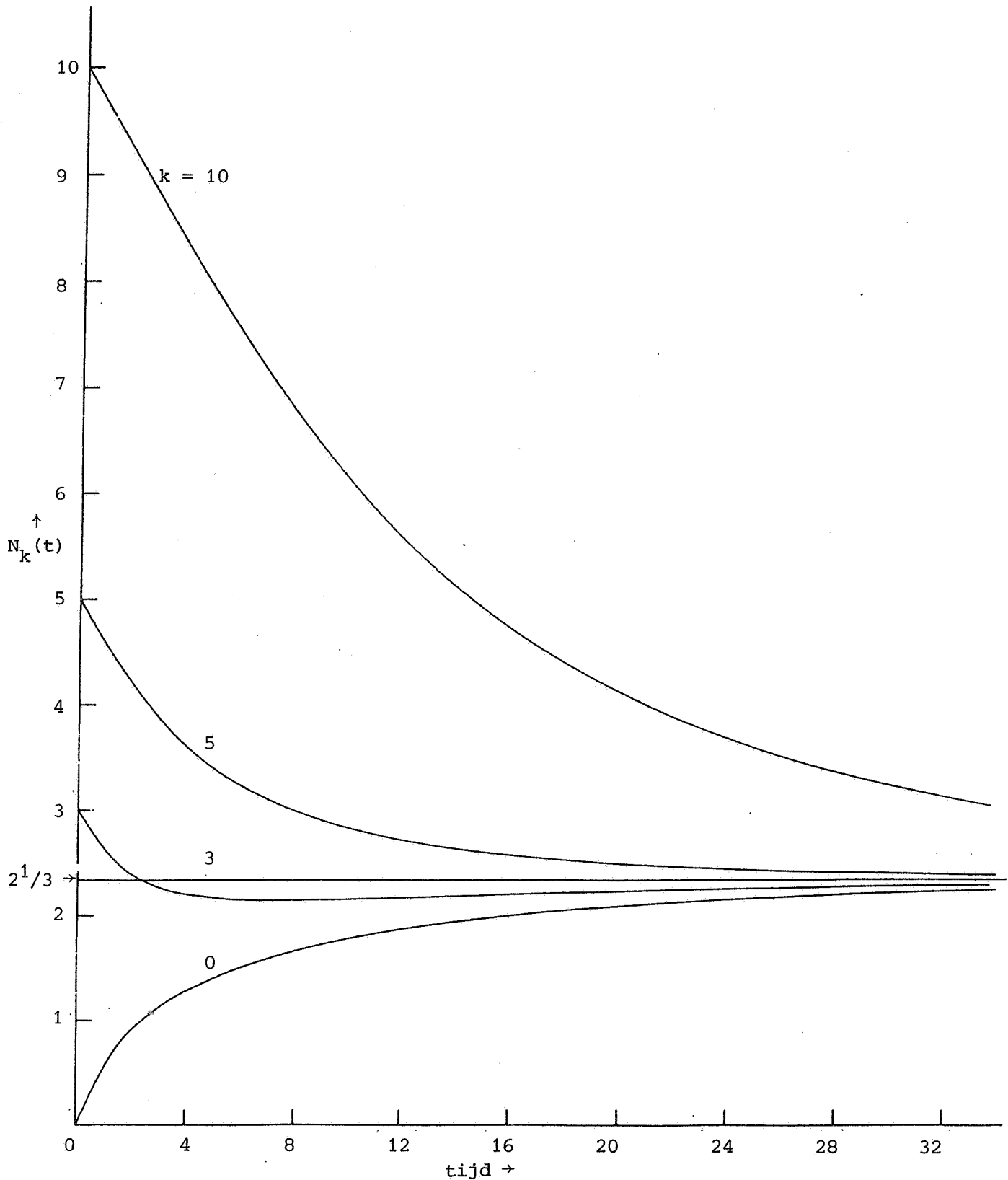
De fout in de benadering voor $N(t)$ ($N_a(t)$) is erg klein voor $t \approx T_1$ ($< 0.5\%$). Dat resulteert in een relatieve fout in de benadering voor T_1 (T_1^A) oplopend van 1.5% voor $\rho = 0.1$ tot 12.0% voor $\rho = 0.9$. Die stijging in de relatieve fout bij oplopende verkeersintensiteit is het gevolg van het feit dat : $N'(T_1) \rightarrow 0$ voor $\rho \uparrow 1$.

Figuur 1.

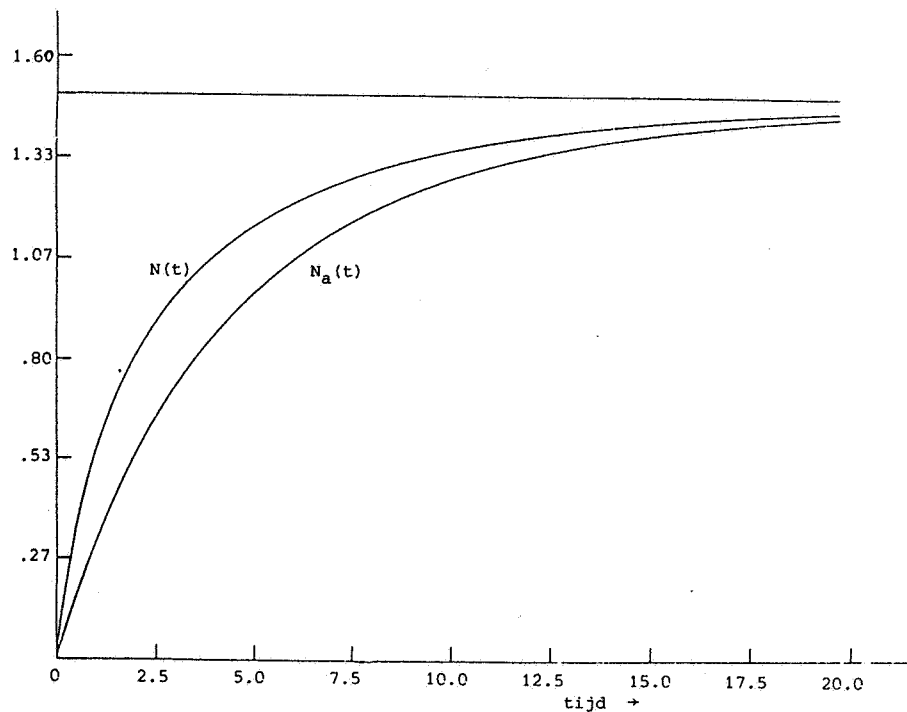
$N_k(t)$: gemiddeld aantal klanten in het systeem, indien we op tijdstip $t = 0$ met k klanten in het systeem gestart zijn.

Verkeersintensiteit $\rho = 0.7$ ($\lambda = 1$)

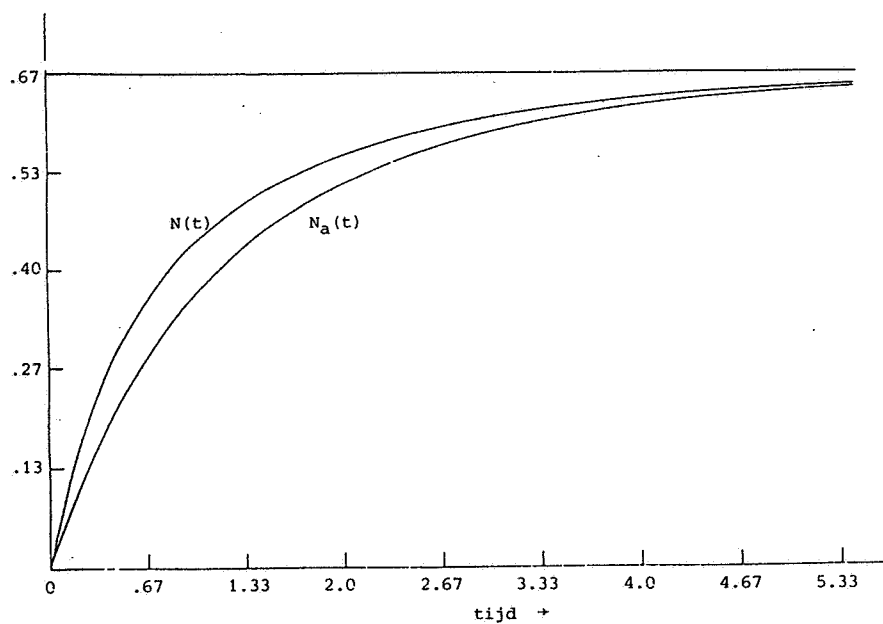
$N_k(\infty) = \rho/(1-\rho) = 2^{1/3}$. $T_1 = 58.4$.



- $N(t)$: gemiddeld aantal klanten in het systeem op tijdstip t , indien op tijdstip $t = 0$ met een leeg systeem gestart is.
 $N_a(t)$: benadering voor $N(t)$.



Figuur 2.
 $\rho = 0.6$, $\lambda = 1$, $N(\infty) = \rho/(1-\rho) = 1.5$, $T_1 = 27.0$.



Figuur 3.
 $\rho = 0.4$, $\lambda = 1$, $N(\infty) = \rho/(1-\rho) = 2/3$, $T_1 = 7.2$.

HOOFDSTUK 2 HET M/M/2 - WACHTRIJMDEL§1. Inleiding

In dit hoofdstuk komt het M/M/2 - wachtrijmodel aan de orde.

Zij $P_j(t) = \text{Pr}\{j \text{ klanten in het systeem op tijdstip } t\}$, $t \geq 0$, $j = 0, 2, \dots$;

$P_{1i}(t) = \text{Pr}\{\text{één klant in het systeem (voor station } i) \text{ op tijdstip } t\}$,
 $t \geq 0$, $i = 1, 2$.

Indien het systeem leeg is, gaat de eerst volgende klant naar loket i ($i=1,2$) met kans p_i ($p_1+p_2=1$).

Zij β_i de gemiddelde bedieningsduur bij station i ($i=1,2$). Zij $\mu_i = \beta_i^{-1}$ ($i=1,2$). Het gemiddeld aantal gearriveerde klanten per tijdseenheid is λ .

Ook in dit hoofdstuk is ons doel het bepalen van de initiële transiënte periode T_ϵ , in termen van de relaxatie-tijd T .

§2. Berekeningswijze

De kansverdeling $\{P_0(t), P_{11}(t), P_{12}(t), P_j(t); j = 2, 3, \dots, t \geq 0\}$ voldoet aan het volgende stelsel diff. vergln. :

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = \mu_1 P_{11}(t) + \mu_2 P_{12}(t) - \lambda P_0(t);$$

$$\frac{d}{dt}P_{11}(t) = \mu_2 P_2(t) + \lambda P_0(t) - (\lambda + \mu_1) P_{11}(t);$$

$$\frac{d}{dt}P_{12}(t) = \mu_1 P_2(t) + \lambda P_0(t) - (\lambda + \mu_2) P_{12}(t);$$

$$\frac{d}{dt}P_2(t) = (\mu_1 + \mu_2) P_3(t) + \lambda [P_{11}(t) + P_{12}(t)] - (\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_2(t);$$

$$\frac{d}{dt}P_j(t) = (\mu_1 + \mu_2) P_{j+1}(t) + \lambda P_{j-1}(t) - (\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_j(t), \quad j = 3, 4, \dots$$

In dit hoofdstuk beperken we ons tot de beginconditie : $P_0(0+) = 1$.

Dit oneindige stelsel diff. vergln. moeten we weer beperken tot een eindig stelsel. Dat kan door i.p.v. het M/M/2 - wachtrijmodel, het M/M/2/N-2 - wachtrijmodel te beschouwen. 'N-2' staat voor N-2 wachtplaatsen in het systeem.

De diff. vergl. voor $P_N(t)$ wordt dan :

$$\frac{d}{dt}P_N(t) = \lambda P_{N-1}(t) - (\mu_1 + \mu_2) P_N(t) .$$

Kies nu N zodanig dat de kans op verlies van een klant, ten gevolge van een overbelast systeem ($P_N(\infty)$) 10^{-7} is. In hoofdstuk 1 is gebleken dat bij die keuze van N , T_ϵ ($\epsilon=1,5$) voldoende nauwkeurig benaderd wordt.

Zij $\{P_j; j = 0, 1, \dots\}$ de stationaire verdeling van het aantal klanten in het systeem. Dan geldt :

$$P_j = 2(1-\rho)\rho^j/(1+\rho), \quad j = 2, 3, \dots, \quad \rho = \lambda/(\mu_1 + \mu_2),$$

onder de veronderstelling dat $\mu_1 = \mu_2$.

Voor de relaxatie-tijd van het M/M/2 - wachtrijmodel gelden de volgende formules (zie (2) blz 7-8)

$$(\mu = \mu_1 = \mu_2)$$

$$T = [\sqrt{\lambda} - \sqrt{2\mu}]^{-2}, \quad \rho \geq 1/9;$$

$$T = 2[2\lambda + \mu + \sqrt{(\mu^2 - 4\lambda\mu)}]^{-1}, \quad \rho < 1/9.$$

Hieronder volgen de resultaten waarbij gekozen is voor $\mu_1 = \mu_2$, $p_1 = p_2 = 1/2$, en $\lambda = 0$.

(6)	ρ	N	T_1	T_5	T	T_1/T	T_5/T
	0.1	8	0.95	0.61	0.22	4.32	2.77
	0.2	11	2.1	1.4	0.65	3.27	2.05
	0.3	15	3.9	2.4	1.47	2.69	1.61
	0.4	19	7.2	4.1	2.96	2.43	1.39
	0.5	25	13.2	7.2	5.83	2.26	1.24
	0.6	33	25.8	13.7	11.81	2.18	1.16
	0.7	50	56.1	29.2	26.24	2.14	1.11
	0.8	75	151.7	78.0	71.78	2.11	1.09
	0.9	145	718.1	367.7	341.76	2.10	1.08

De berekeningen zijn ook doorgevoerd voor de parameterwaarden : $\mu_1 = 2/7$ en $\mu_2 = 8/7$ ($\rho = 0.7$). De afwijking in T_1 t.o.v. het symmetrische model ($\mu_1 = \mu_2 = 10/7$; $\rho = 0.7$) is erg klein ($< 2\%$).

§3. Foutschattingen

We willen hier een schatting geven voor de fout in de benadering voor T_1 . Evenals bij het M/M/1 - wachtrijmodel, bestaat die fout uit twee delen.

- (1) Een fout die we introduceren doordat we niet het oneindige stelsel diff. vergln. oplossen, maar een eindig stelsel diff. vergln. .
- (2) De andere fout is het gevolg van het gebruik maken van de standaard procedure RKE voor het oplossen van het stelsel diff. vergln. .

Die standaard procedure werkt met een relatieve fout van 10^{-5} . Dat resulteert in een relatieve fout van 10^{-5} voor de gemiddelde wachtrijlengte.

De fout van de eerste soort is moeilijk te bepalen. Een schatting kunnen we echter wel geven. Daar het M/M/2 - wachtrijmodel niet essentiëel verschilt van het M/M/1 - model (wat betreft het wachtrijlengte-proces), kunnen we de overeenkomstige fout uit §1.3 als benadering voor de hier aan de orde zijnde fout gebruiken.

Evenals in hoofdstuk 1 zijn we nu in staat, aan de hand van bovenstaande beschouwingen, een schatting te geven voor de fout in de benadering voor T_1 . Dit resulteert in een relatieve fout, oplopend van 0.02 % bij $\rho = 0.1$ tot 0.04 % bij $\rho = 0.9$.

HOOFDSTUK 3 NETWERK MET TWEE M/M/1 - STATIONS IN SERIE§1. Inleiding

In dit hoofdstuk beschouwen we een netwerk van wachtrij-systemen waarbij twee M/M/1 - stations in serie staan.

Zij $\beta_i = 1/\mu_i$ de gemiddelde bedieningsduur bij station i ($i = 1, 2$), en λ het gemiddeld aantal binnengekomen klanten per tijdseenheid voor station 1.

Zij $P_{ij}(t) = \text{Pr}\{i \text{ klanten in station 1, en } j \text{ klanten in station 2, op tijdstip } t\}$, $i, j = 0, 1, \dots$, $t \geq 0$.

Zij $\{P_{ij}; i, j = 0, 1, \dots\}$ de stationaire verdeling van het aantal klanten in de opeenvolgende stations.

Dan geldt :

$$P_{ij} = (1-\rho_1)\rho_1^i \cdot (1-\rho_2)\rho_2^j, \quad i, j = 0, 1, \dots,$$

waarbij de verkeersintensiteiten : $\rho_k = \beta_k \cdot \lambda$ ($k = 1, 2$) (zie (8)).

Zij $N(t)$ ($t \geq 0$) het gemiddeld aantal klanten in het systeem op tijdstip t (beide wachtrijen samen).

§2. Berekeningswijze

Voor de kansverdeling $\{P_{ij}(t); i, j = 0, 1, \dots, t \geq 0\}$ bestaat een stelsel diff. vergln. . Dat is echter, evenals in de voorgaande hoofdstukken, een oneindig stelsel. Indien we het aantal wachtplaatsen in het netwerk beperken tot $N-2$, dan krijgen we het volgende stelsel diff. vergln. :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_{00}(t) &= -\lambda P_{00}(t) + \mu_2 P_{01}(t); \\ \frac{d}{dt}P_{N0}(t) &= -\mu_1 P_{N0}(t) + \lambda P_{N-1,0}(t); \\ \frac{d}{dt}P_{0N}(t) &= -\mu_2 P_{0N}(t) + \mu_1 P_{1,N-1}(t); \\ \frac{d}{dt}P_{i0}(t) &= -(\lambda + \mu_1)P_{i0}(t) + \lambda P_{i-1,0}(t) + \mu_2 P_{i1}(t), \quad i = 1, \dots, N-1; \\ \frac{d}{dt}P_{0j}(t) &= -(\lambda + \mu_2)P_{0j}(t) + \mu_1 P_{1,j-1}(t) + \mu_2 P_{0,j+1}(t), \quad j = 1, \dots, N-1; \\ \frac{d}{dt}P_{i,N-i}(t) &= -(\mu_1 + \mu_2)P_{i,N-i}(t) + \lambda P_{i-1,N-i}(t) + \mu_1 P_{i+1,N-i-1}(t), \quad i = 1, \dots, N-1; \\ \frac{d}{dt}P_{ij}(t) &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_{ij}(t) + \mu_1 P_{i+1,j-1}(t) + \mu_2 P_{i,j+1}(t) + \\ &\quad \lambda P_{i-1,j}(t), \quad \begin{matrix} 1 \leq i+j \leq N-1, \\ i > 0, j > 0. \end{matrix} \end{aligned}$$

Bij de keuze van de begincondities hebben we ons beperkt tot : $P_{00}(0+) = 1$.

D.w.z.: op tijdstip $t = 0$ starten we met een lege wachtrij.

Kies het aantal wachtplaatsen (N) weer zodanig dat in stationaire toestand de kans op verlies van een klant ten gevolge van een overbelast systeem 10^{-7} is.

$$\text{D.w.z. : } \sum_{i+j=N} P_{ij} \approx 10^{-7}.$$

We zijn nu in staat het stelsel diff. vergln. numeriek op te lossen. Er is

echter een probleem. Het aantal diff. vergln. loopt erg sterk op, naarmate de verkeersintensiteit hoger wordt. Dat levert problemen op met de ons ter beschikking staande computertijd. Beschouw daarom nu in plaats van de gehele kansverdeling : $\{P_{ij}(t); i, j = 0, 1, \dots, N-1, 1 \leq i+j \leq N, t \geq 0\}$,

alleen de marginale kansverdelingen.

Definiëer : $P_{i.}(t) = \sum_{j=0}^N P_{ij}(t)$, $i = 0, 1, \dots, N, t \geq 0$;

$$P_{.j}(t) = \sum_{i=0}^N P_{ij}(t) , \quad j = 0, 1, \dots, N, t \geq 0.$$

De bovenstaande kansverdelingen voldoen aan het volgende stelsel diff. vergln. :

$$\frac{d}{dt}P_{0.}(t) = -\lambda P_{0.}(t) + \mu_1 P_{1.}(t);$$

$$\frac{d}{dt}P_{i.}(t) = -(\lambda + \mu_1)P_{i.}(t) + \lambda P_{i-1.}(t) + \mu_1 P_{i+1.}(t), \quad i = 1, \dots, N-1;$$

$$\frac{d}{dt}P_{N.}(t) = -\mu_1 P_{N.}(t) + \lambda P_{N-1.}(t);$$

$$\frac{d}{dt}P_{.0}(t) = -\mu_1 P_{.0}(t) + \mu_2 P_{.1}(t) + \mu_1 P_{00}(t);$$

$$\frac{d}{dt}P_{.j}(t) = -(\mu_1 + \mu_2)P_{.j}(t) + \mu_1 [P_{0j}(t) - P_{0,j-1}(t)] + \mu_2 P_{.j+1}(t) + \mu_1 P_{.j-1}(t), \quad j = 1, \dots, N-1;$$

$$\frac{d}{dt}P_{.N}(t) = -\mu_2 P_{.N}(t) + \mu_1 [P_{0N}(t) - P_{0,N-1}(t)] + \mu_1 P_{.N-1}(t).$$

Begincondities : $P_{0.}(0+) = P_{.0}(0+) = 1$.

In de laatste drie diff. vergln. komen de onbekende termen $P_{0j}(t)$, $j = 0, 1, \dots$ voor. Deze termen geven de koppeling weer, die er bestaat tussen de twee wachtrijen. Daar we die termen niet d.m.v. het bovenstaande stelsel diff. vergln. kunnen berekenen, moeten we ze diensengevolge benaderen.

Als benadering nemen we : $P_{0j}(t) \approx P_{.j}(t) \cdot P_{0.}(t)$, $j = 0, 1, \dots, N$.

Hieronder volgt een tabel waarin de 'exacte waarden' en de benaderingen worden vergeleken. ($\rho = 0.4$)

(7) t	$P_{00}(t)$	$P_{0.}(t) \cdot P_{.0}(t)$	$P_{01}(t)$	$P_{0.}(t) \cdot P_{.1}(t)$
1	0.51310	0.52036	0.13615	0.13104
2	0.42080	0.42557	0.14942	0.14734
4	0.37672	0.37835	0.14694	0.14660
6	0.36595	0.36655	0.14523	0.14516
8	0.36236	0.36260	0.14452	0.14451

Voor $j = 0$ is de afwijking maximaal 1.4 %, voor $j = 1$ is dat 3.8 % .

Bij de andere verkeersintensiteiten constateren we een zelfde relatieve afwijking.

De relaxatie-tijd voor het wachtrij-systeem met twee M/M/1 - stations in serie is (zie (2) blz. 16) :

$$T = \max_{j=1,2} \{ \beta_j / (1 - \rho_j)^2 \}.$$

D.w.z. : de relaxatie-tijd T is gelijk aan het maximum van de relaxatie-tijden van de twee stations, indien deze als twee afzonderlijke M/M/1 - stations worden beschouwd.

§3. Resultaten

Bij de hieronder volgende resultaten is uitgegaan van : $\lambda = 1$, en $\mu_1 = \mu_2$. Op tijdstip $t = 0$ zijn er geen klanten in het systeem aanwezig.

(8)	ρ	N	T_1	T_5	T	T_1/T	T_5/T	(methode)
	0.1	8	0.83	0.54	0.21	3.95	2.57	(exact)
			0.81	0.53	0.21	3.86	2.52	(benad.)
	0.2	11	2.3	1.4	0.65	3.54	2.15	(exact)
			2.2	1.4	0.65	3.38	2.15	(benad.)
	0.3	14	4.8	2.9	1.47	3.27	1.97	(exact)
			4.6	2.8	1.47	3.13	1.90	(benad.)
	0.4	19	9.2	5.4	2.96	3.11	1.82	(exact)
			8.7	5.1	2.96	2.94	1.72	(benad.)
	0.5	25	17.3	9.9	5.83	2.97	1.70	(exact)
			16.2	9.4	5.83	2.78	1.61	(benad.)
	0.6	32	31.6	17.9	11.81	2.68	1.52	(benad.)
	0.7	47	68.0	37.8	26.24	2.59	1.44	(benad.)
	0.8	71	180.7	98.9	71.78	2.52	1.38	(benad.)

T_E is hier gebaseerd op de som van de twee gemiddelde wachtrijlengtes. Uit de computerresultaten voor de benaderingsmethode blijkt dat de afwijking in de som van de gemiddelde wachtrijlengtes, t.o.v. de 'exacte' resultaten, niet groter is dan 1 % ($\rho = 0.4$), 2 % ($\rho = 0.5$). Daar $N'(t) \ll 1$ voor $t \approx T_1$, heeft die kleine afwijking toch relatief grote gevolgen voor de benadering voor T_1 .

Foutschattingen :

Voor de exacte berekening:

Op een analoge wijze verkregen als in de voorgaande twee hoofdstukken, volgt dat de fout in de benadering voor T_1 kleiner is dan 1 % ($\rho \leq 0.5$). De effecten van het oplossen van het eindige stelsel diff. vergln., i.p.v. het oneindige stelsel, zijn steeds moeilijker te bepalen, daarom is slechts een ruwe afschatting van de fout mogelijk.

Voor de benaderingsmethode:

Hierbij is een exacte foutschatting vrijwel niet mogelijk, daar we de invloeden van de benadering voor $P_{0j}(t)$, $j = 0, 1, \dots$ moeilijk kunnen bepalen. We kunnen hier dus alleen afgaan op de bereikte resultaten, en die vergelijken met de 'exacte' resultaten.

§4. Vervolg resultaten

In §3.3 zijn de resultaten vermeld waarbij gekozen is voor $\mu_1 = \mu_2$. Hieronder volgen enige resultaten waarbij dat niet het geval is.

- 1) $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.2$, $\lambda = 1$ ($\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 0.2$);
- 2) $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\lambda = 1$ ($\rho_1 = 0.2$, $\rho_2 = 0.5$).

De stations worden dus van plaats gewisseld.

In beide gevallen zijn er op tijdstip $t = 0$ geen klanten in het systeem aanwezig.

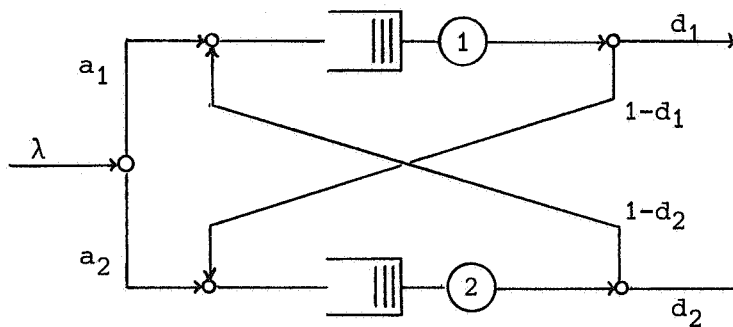
Resultaten :

(9)	T_1	T_5	T	T_1/T	T_5/T	(methode)
1)	13.2	7.1	5.83	2.26	1.22	(exact)
2)	13.2	7.1	5.83	2.26	1.22	(exact)

Uit de computer-resultaten blijkt dat de som van de twee gemiddelde wachtrijslengtes voor beide modellen, voor ieder tijdstip t , het zelfde is. Hieruit volgt dat, indien de twee stations een verschillende gemiddelde bedieningduur hebben ($\beta_1 \neq \beta_2$), het, wat betreft de som van de gemiddelde* wachtrijslengtes, niet uit maakt in welke volgorde de stations zijn geplaatst.

§1. Inleiding

In dit hoofdstuk beschouwen we het volgende netwerk van wachtrij-systemen :



waarbij :

a_i : kans dat een van buiten het systeem gearriveerde klant, eerst naar station i gaat ($i = 1, 2$);

d_i : kans dat een klant die station i verlaat, het gehele systeem verlaat ($i = 1, 2$).

Zij $\beta_i = 1/\mu_i$ ($i = 1, 2$) en λ analoog gedefiniëerd als in hoofdstuk 3.

Zij I_i het gemiddeld aantal binnengekomen klanten per tijdseenheid voor station i ($i = 1, 2$) (intern zowel als extern). Zij O_i het gemiddeld aantal klanten dat station i verlaat per tijdseenheid ($i = 1, 2$).

Indien het systeem in stationaire toestand verkeert, dan geldt :

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda a_1 + (1-d_2)O_2 ; \\ I_2 &= \lambda a_2 + (1-d_1)O_1 ; \\ I_1 &= O_1 ; \\ I_2 &= O_2 . \end{aligned}$$

Dan volgt dus :

$$I_1 = \frac{\lambda a_1 d_2 + \lambda (1-d_2)}{1 - (1-d_1)(1-d_2)} , \text{ en } I_2 = \frac{\lambda a_2 d_1 + \lambda (1-d_1)}{1 - (1-d_1)(1-d_2)} .$$

Zij $\rho_i = I_i \cdot \beta_i$ de verkeersintensiteit voor station i ($i = 1, 2$).

Dan geldt :

$$\rho_1 = \frac{[\lambda a_1 d_2 + \lambda (1-d_2)] \beta_1}{1 - (1-d_1)(1-d_2)} , \text{ en } \rho_2 = \frac{[\lambda a_2 d_1 + \lambda (1-d_1)] \beta_2}{1 - (1-d_1)(1-d_2)} .$$

§2. Berekeningswijze

Zij $P_{ij}(t)$ ($i, j = 0, 1, \dots, t \geq 0$) de kans dat er op tijdstip t i klanten in station 1, en j klanten in station 2 aanwezig zijn.

Beperk het aantal wachtplaatsen tot $N-2$. Voor de kansverdeling

$\{P_{ij}(t); i, j = 0, 1, \dots, N, 1 \leq i+j \leq N, t \geq 0\}$ kunnen we, analoog aan de voorgaande hoofdstukken een stelsel diff. vergln. afleiden (zie (7) Appendix)

Zie §3.1 voor de keuze van N .

In dit hoofdstuk gaan we er van uit dat op tijdstip $t = 0$ geen klanten in het systeem aanwezig zijn.

De stationaire verdeling van het aantal klanten in de twee stations

$$\text{is : } P_{ij} = (1-\rho_1)\rho_1^i \cdot (1-\rho_2)\rho_2^j, \quad i, j = 0, 1, \dots,$$

(zie (8)).

Evenals bij het netwerk dat in het vorige hoofdstuk aan de orde is gekomen, hebben we ook hier te maken met het probleem, dat bij oplopende verkeersintensiteit het aantal diff. vergln. te groot wordt. Daarom beschouwen we nu weer de marginale kansverdelingen. Daardoor beperken we het aantal diff. vergln. van $(N+1)(N+2)/2$ tot $2(N+1)$.

Definiëer :

$$P_{i.}(t) = \sum_{j=0}^N P_{ij}(t), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad t \geq 0;$$

$$P_{.j}(t) = \sum_{i=0}^N P_{ij}(t), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad t \geq 0.$$

D.m.v. de diff. vergln. voor $P_{ij}(t)$, $i, j = 0, 1, \dots$ kunnen we nu het stelsel diff. vergln. opstellen voor de marginale kansverdelingen ($\lambda = 1$).

$$\frac{d}{dt}P_{0.}(t) = (a_2 - 1 - (1-d_2)\mu_2)P_{0.}(t) + \mu_1 P_{1.}(t) + \mu_2(1-d_2)P_{00}(t);$$

$$\frac{d}{dt}P_{i.}(t) = (a_1 + (1-d_2)\mu_2)P_{i-1.}(t) + (a_2 - 1 - \mu_1 - (1-d_2)\mu_2)P_{i.}(t) + \mu_1 P_{i+1.}(t) - (1-d_2)\mu_2[P_{i0}(t) + P_{i-1,0}(t)], \quad i = 1, \dots, N-1;$$

$$\frac{d}{dt}P_{N.}(t) = (a_1 + (1-d_2)\mu_2)P_{N-1.}(t) + (a_2 - 1 - \mu_1 - (1-d_2)\mu_2)P_{N.}(t) - \mu_2(1-d_2)[P_{N0}(t) + P_{N-1,0}(t)];$$

$$\frac{d}{dt}P_{.0}(t) = (a_1 - 1 - (1-d_1)\mu_1)P_{.0}(t) + \mu_2 P_{.1}(t) + \mu_1(1-d_1)P_{00}(t);$$

$$\frac{d}{dt}P_{.j}(t) = (a_2 + (1-d_1)\mu_1)P_{.j-1}(t) + (a_1 - 1 - \mu_2 - (1-d_1)\mu_1)P_{.j}(t) + \mu_2 P_{.j+1}(t) - (1-d_1)\mu_1[P_{0j}(t) + P_{0,j-1}(t)], \quad j = 1, \dots, N-1;$$

$$\frac{d}{dt}P_{.N}(t) = (a_2 + (1-d_1)\mu_1)P_{.N-1}(t) + (a_1 - 1 - \mu_2 - (1-d_1)\mu_1)P_{.N}(t) - \mu_1(1-d_1)[P_{0N}(t) + P_{0,N-1}(t)].$$

Begincondities : $P_{0.}(0+) = P_{.0}(0+) = 1$.

Door gebruik te maken van de benaderingen :

$$P_{0m}(t) \approx P_{0.}(t) \cdot P_{.m}(t), \quad m = 0, 1, \dots, N;$$

$$P_{m0}(t) \approx P_{.m}(t) \cdot P_{0.}(t), \quad m = 0, 1, \dots, N,$$

kunnen we het bovenstaande stelsel numeriek oplossen.

Er is echter nog een probleem. Bij het oplossen van het stelsel diff. vergln. voor $\{P_{i.}(t); i = 0, 1, \dots, N\}$ is het nodig de waarde van $P_{.0}(t)$ te kennen.

Er geldt : $P_{.0}(0) = 1$ (indien we op tijdstip $t = 0$ met een leeg systeem starten). Ook geldt : $P_{.0}(0.1) \approx \exp(0.1 \cdot a_2)$.

Benader nu $P_{.0}(t)$ voor $0 \leq t \leq 0.1$ lineair, met behulp van de twee waarden $P_{.0}(0)$ en $P_{.0}(0.1)$.

Nu kunnen we $\{P_{i.}(t); i = 0, 1, \dots, N\}$ voor $0 \leq t \leq 0.1$ benaderen. Dientengevolge hebben we een benadering voor $P_{0.}(t)$, voor $0 \leq t \leq 0.1$.

Aan de hand daarvan kunnen we nu $\{P_{.j}(t); j = 0, 1, \dots, N\}$, voor $0 \leq t \leq 0.1$ berekenen.

Daardoor hebben we dan weer een betere benadering voor $P_{.0}(t)$, $0 \leq t \leq 0.1$,

waarmee we dan nogmaals de verdeling $\{P_i(t); i = 0, 1, \dots, N\}$ kunnen berekenen ($0 \leq t \leq 0.1$).

Het nogmaals uitvoeren van deze iteratie leidt niet tot een essentiële verbetering van de resultaten.

Voor het volgende interval $[0.1, 0.2]$, berekenen we eerst een lineaire benadering voor $P_o(t)$, $0.1 \leq t \leq 0.2$, m.b.v. de waarde $P_o(0)$ en $P_o(0.1)$. Daarna herhaalt de bovenstaande procedure zich weer. Voor alle volgende intervallen is de berekeningswijze analoog.

§3. Resultaten

De relaxatie-tijd voor het in §4.1 beschreven netwerk is

$$T = \max_{j=1,2} \{m\beta_j(1-\sqrt{\rho_j})^{-2}\},$$

waarbij $m = [1 - (1-d_1)(1-d_2)]^{-1}$ (zie (2) blz. 16).

(A) Symmetrische inputwaarden:

Hier is gekozen voor $d_1 = d_2 = 0.75$, $\mu_1 = \mu_2$, $a_1 = a_2 = 0.5$, en $\lambda = 1$. Dan volgt: $\rho_1 = \rho_2 = 2/(3\mu_1)$.

(10)	ρ	N	T_1	T_5	T	T_1/T	T_5/T	(methode)
	0.1	8	1.24	0.77	0.342	3.63	2.25	(exact)
			1.39	0.88	0.342	4.06	2.57	(benad.)
	0.2	11	3.3	2.0	1.047	3.20	1.91	(exact)
			3.4	2.1	1.047	3.30	2.01	(benad.)
	0.3	14	7.0	4.1	2.347	2.98	1.75	(exact)
			7.0	4.2	2.347	2.98	1.79	(benad.)
	0.4	19	13.3	7.6	4.738	2.81	1.60	(exact)
			13.1	7.6	4.738	2.76	1.60	(benad.)
	0.5	25	24.3	13.8	9.325	2.61	1.48	(benad.)
	0.6	33	47.2	26.3	18.895	2.50	1.39	(benad.)

(B) Niet symmetrische inputwaarden:

Bij deze modellen is gekozen voor: $\beta_1 \neq \beta_2$ en/of $d_1 \neq d_2$ en/of $a_1 \neq a_2$. De nu volgende twee modellen zijn zo gekozen dat de klanten-stroom van het eerste model precies tegengesteld is aan die van het tweede model.

D.w.z.: de aankomstintensiteit bij station i (model 1) $\equiv$ vertrekintensiteit bij station i (model 2), en de vertrekintensiteit bij station i (model 1) $\equiv$ aankomstintensiteit bij station i (model 2); ($i = 1, 2$).

1) $\beta_1 = 5/24$, $\beta_2 = 5/14$, $d_1 = 3/4$, $d_2 = 1/3$, $a_1 = 3/5$, $a_2 = 2/5$, $\lambda = 1$.

2) $\beta_1 = 5/24$, $\beta_2 = 5/14$, $d_1 = 5/12$, $d_2 = 5/7$, $a_1 = 18/25$, $a_2 = 7/25$, $\lambda = 1$.

Voor beide modellen volgt: $\rho_1 = 0.2$, $\rho_2 = 0.3$.

Resultaten:

(11)	T_1	T_5	T	T_1/T	T_5/T	(methode)
1)	5.4	3.1	2.095	2.58	1.48	(exact)
2)	5.4	3.1	2.095	2.58	1.48	(exact)

De modellen met 'tegengestelde klanten-stromen' zijn dus zeer aan elkaar

verwant. Het is echter niet zo dat, zoals we in §3.4 hebben geconstateerd, de som van de twee gemiddelde wachtrijlengtes voor de beide modellen, voor ieder tijdstip t , gelijk is. (In §3.4 werd namelijk ook de klanten-stroom omgekeerd, doordat we de stations van plaats verwisselde.)

Bij de volgende twee modellen hebben we de plaats van de stations onderling verwisseld.

- 1) $\beta_1 = 0.15$, $\beta_2 = 0.2$, $d_1 = 0.5$, $d_2 = 1/3$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.6$.
Dan volgt : $\rho_1 = 0.18$, $\rho_2 = 0.24$.
- 2) $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.15$, $d_1 = 0.5$, $d_2 = 1/3$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.6$.
Dan volgt : $\rho_1 = 0.24$, $\rho_2 = 0.18$.

Resultaten :

(12)	T_1	T_5	T	T_1/T	T_5/T	(methode)
1)	3.6	2.2	1.153	3.12	1.91	(exact)
2)	3.6	2.2	1.153	3.12	1.91	(exact)

(C) Vergelijking met resultaten uit §3.3:

We vergelijken hier drie modellen, die alle drie de zelfde relaxatie-tijd T hebben.

- 1) Tandem-model (zie §3.3) met $\beta_1 = \beta_2 = 0.3$, $\lambda = 1$ ($\rho = 0.2$).
- 2) Netwerk met twee knooppunten, met :
 $\beta_1 = \beta_2 = 0.358857$, $a_1 = a_2 = 0.5$, $d_1 = d_2 = 0.75$, $\lambda = 1$.
($\rho_1 = \rho_2 = 0.23924$).
- 3) Netwerk met twee knooppunten, met :
 $\beta_1 = \beta_2 = 0.141053$, $a_1 = a_2 = 0.5$, $d_1 = d_2 = 0.25$, $\lambda = 1$.
($\rho_1 = \rho_2 = 0.28211$).

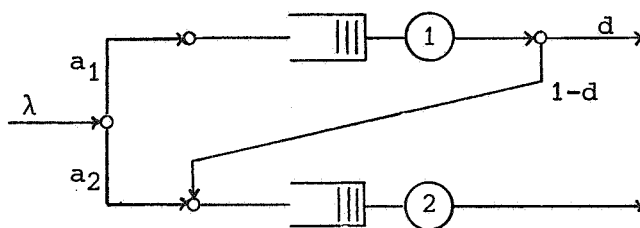
Resultaten :

(13)	T_1	T_5	T	T_1/T	T_5/T	(methode)
1)	4.8	2.9	1.4666	3.27	1.97	(exact)
2)	4.6	2.7	1.4666	3.14	1.84	(exact)
3)	5.8	3.5	1.4666	3.95	2.39	(exact)

Uit bovenstaande gegevens volgt dat de verhouding T_c/T oploopt naarmate de kans op terugkoppeling groter wordt.

(D) Enkele niet symmetrische netwerken :

1)



Parameters:

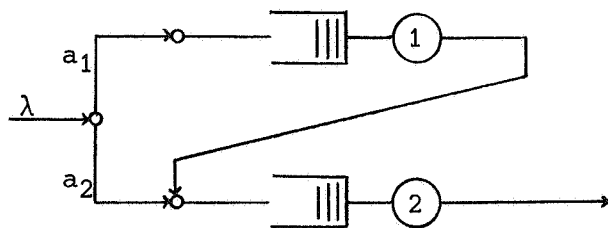
- a) $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.8$, $a_1 = 3/4$, $a_2 = 1/4$, $d = 0.8$, $\lambda = 1$.
($\rho_1 = 0.375$, $\rho_2 = 0.32$);
- b) $\beta_1 = 0.8$, $\beta_2 = 0.5$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.6$, $d = 0.625$, $\lambda = 1$.
($\rho_1 = 0.32$, $\rho_2 = 0.375$).

Deze twee modellen zijn weer zo gekozen dat de klanten-stroom van het ene model tegengesteld is aan die van het andere model.

Resultaten :

(14)	T_1	T_5	T	T_1/T	T_5/T	(methode)
a)	10.2	5.8	4.241	2.41	1.37	(exact)
b)	10.3	5.9	4.241	2.43	1.39	(exact)

2)



Parameters :

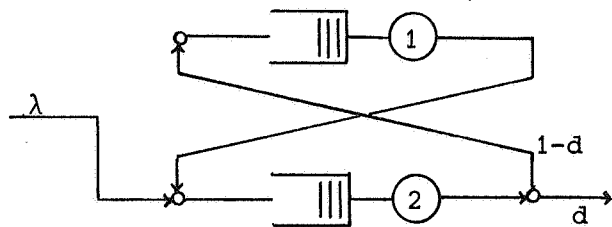
$$\beta_1 = 0.5625, \beta_2 = 0.36, a_1 = 4/9, a_2 = 5/9, \lambda = 1 .$$

$$(\rho_1 = 0.25, \rho_2 = 0.36) .$$

Resultaten :

$$T_1 = 6.9, T_5 = 4.1, T = 2.25, T_1/T = 3.07, T_5/T = 1.82 \text{ (exact)} .$$

3)



Parameters:

$$\beta_1 = 0.3125, \beta_2 = 0.2, d = 5/9, \lambda = 1 .$$

$$(\rho_1 = 0.25, \rho_2 = 0.36) .$$

Dit model is zeer verwant aan model (2). De inputstroom bij station 1 is hier intern, en bij model (2) extern. De arriveringsintensiteit bij station 1 is voor beide modellen gelijk.

De parameters zijn bovendien zo gekozen dat de verkeersintensiteiten en de relaxatie-tijden gelijk zijn.

Resultaten :

$$T_1 = 8.3, T_5 = 4.9, T = 2.25, T_1/T = 3.69, T_5/T = 2.18 \text{ (exact)} .$$

Voor een netwerk met twee $M/M/\infty$ - stations geldt (zie (3) blz. 14) : $T_1/T \leq 5.99$, en $T_5/T \leq 4.11$. Het maximum wordt bereikt indien de twee stations in serie staan.

Er is een sterk vermoeden dat dit maximum ook geldt voor een willekeurig netwerk met twee $M/M/1$ - stations. We hebben getracht dit maximum d.m.v. zekere parameter-keuze te bereiken.

a) $\beta_1 = \beta_2 = 0.02, d_1 = d_2 = 0.1, a_1 = a_2 = 0.5, \lambda = 1 .$

b) $\beta_1 = \beta_2 = 0.02, d_1 = 0, d_2 = 0.2, a_1 = 1, a_2 = 0, \lambda = 1 .$

c) $\beta_1 = \beta_2 = 1/30, d_1 = 0, d_2 = 1/3, a_1 = 1, a_2 = 0, \lambda = 1 .$

Voor alle drie de netwerken geldt : $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$.

Resultaten :

(15)	T_1	T_5	T	T_1/T	T_5/T	(methode)
a)	1.19	0.75	0.225	5.30	3.35	(exact)
b)	1.13	0.71	0.214	5.30	3.32	(exact)
c)	1.09	0.69	0.214	5.09	3.22	(exact)

Opmerking :

Indien $\beta \uparrow 0$ (voor gelijk blijvende verkeersintensiteit ρ), dan stijgt T_ε/T ($\varepsilon = 1,5$). Echter, extreem lage waarden voor β geven problemen met de rekennauwkeurigheid van de standaard-procedure RKE.

§4. Foutschattingen

De hieronder volgende foutschattingen hebben betrekking op de resultaten uit §3.3 (A) (zie blz. 18 tabel (10)).

De fout in de benadering voor T_1 wordt in grote mate bepaald door de fout die de standaard-procedure RKE maakt. Dit is zeker het geval voor lage verkeersintensiteiten; $\rho \leq 0.4$.

Indien we de fout, die geïntroduceerd wordt door het oplossen van het eindige stelsel diff. vergln. i.p.v. het oneindige stelsel, verwaarlozen, dan komen we tot de volgende foutschattingen voor de benadering voor

T_1 :

- 0.05 % ($\rho = 0.1$);
- 0.1 % ($\rho = 0.2$);
- 0.3 % ($\rho = 0.3$);
- 0.5 % ($\rho = 0.4$).

Hieruit volgt dat de fout zo klein is, dat alle cijfers, die in tabel (10) gegeven worden, goed zijn.

§1. Inleiding

In dit hoofdstuk beschouwen we een netwerk van wachtrij-systemen, waarbij drie M/M/1 - stations in serie staan.

Zij $\beta_i = 1/\mu_i$ ($i = 1, 2, 3$) en λ analoog gedefiniëerd als in hoofdstuk 3.

Zij $P_{ijk}(t) = \Pr\{i \text{ klanten in station 1, } j \text{ klanten in station 2, en } k \text{ klanten in station 3, op tijdstip } t\}$, $i, j, k = 0, 1, \dots$, $t \geq 0$.

Zij $\{P_{ijk}; i, j, k = 0, 1, \dots\}$ de stationaire verdeling van het aantal klanten in de opeenvolgende stations.

Dan geldt (zie (8)) :

$$P_{ijk} = (1-\rho_1)\rho_1^i \cdot (1-\rho_2)\rho_2^j \cdot (1-\rho_3)\rho_3^k, \quad i, j, k = 0, 1, \dots,$$

waarbij : $\rho_n = \beta_n \lambda$ ($n = 1, 2, 3$).

§2. Berekeningswijze

In deze paragraaf beperken we het wachtrij-systeem tot een systeem met $N-3$ wachtplaatsen.

Voor de kansverdeling $\{P_{ijk}(t); i, j, k = 0, 1, \dots, N, i+j+k \leq N, t \geq 0\}$ kunnen we weer een stelsel diff. vergln. afleiden (zie (7) Appendix)

Het aantal wachtplaatsen (N) wordt gekozen volgens de regel :

$$\sum_{i+j+k=N} P_{ijk} \approx 10^{-7}.$$

Ook in dit hoofdstuk beschouwen we de marginale kansverdelingen.

Definiëer :

$$P_{i..}(t) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N P_{ijk}(t), \quad i = 0, 1, \dots, N, t \geq 0;$$

$$P_{.j.}(t) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^N P_{ijk}(t), \quad j = 0, 1, \dots, N, t \geq 0;$$

$$P_{..k}(t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N P_{ijk}(t), \quad k = 0, 1, \dots, N, t \geq 0.$$

Voor die kansverdelingen gelden de volgende diff. vergln. :

$$\frac{d}{dt} P_{0..}(t) = -\lambda P_{0..}(t) + \mu_1 P_{1..}(t);$$

$$\frac{d}{dt} P_{i..}(t) = -(\lambda + \mu_1) P_{i..}(t) + \mu_1 P_{i+1..}(t) + \lambda P_{i-1..}(t), \quad i \in \{1, 2, \dots, N-1\};$$

$$\frac{d}{dt} P_{N..}(t) = -\mu_1 P_{N..}(t) + \lambda P_{N-1..}(t);$$

$$\frac{d}{dt} P_{.0.}(t) = -\mu_1 P_{.0.}(t) + \mu_2 P_{.1.}(t) + \mu_1 P_{00.}(t);$$

$$\frac{d}{dt} P_{.j.}(t) = -(\mu_1 + \mu_2) P_{.j.}(t) + \mu_1 P_{.j-1.}(t) + \mu_2 P_{.j+1.}(t) + \mu_1 [P_{0j.}(t) - P_{0,j-1.}(t)], \quad j \in \{1, 2, \dots, N-1\};$$

$$\frac{d}{dt} P_{.N.}(t) = -\mu_2 P_{.N.}(t) + \mu_1 P_{.N-1.}(t) + \mu_1 [P_{0N.}(t) - P_{0,N-1.}(t)];$$

$$\frac{d}{dt} P_{..0}(t) = -\mu_2 P_{..0}(t) + \mu_3 P_{..1}(t) + \mu_2 P_{.00}(t);$$

$$\frac{d}{dt}P_{..k}(t) = -(\mu_2 + \mu_3)P_{..k}(t) + \mu_3 P_{..k+1}(t) + \mu_2 P_{..k-1}(t) + \mu_2 [P_{.ok}(t) - P_{.,o,k-1}(t)], \quad k \in \{1, 2, \dots, N-1\};$$

$$\frac{d}{dt}P_{..N}(t) = -\mu_3 P_{..N}(t) + \mu_2 P_{..N-1}(t) + \mu_2 [P_{.oN}(t) - P_{.,o,N-1}(t)].$$

Begincondities : $P_{o..}(0+) = P_{.o.}(0+) = P_{..o}(0+) = 1$.

Door gebruik te maken van deze diff. vergln. beperken we het aantal diff. vergln. van $(N+1)(N+2)(N+3)/6$ tot $3(N+1)$.

Teneinde dit stelsel numeriek op te kunnen lossen, maken we gebruik van de volgende benaderingen :

$$P_{om.}(t) \approx P_{o..}(t) \cdot P_{.m.}(t), \quad m = 0, 1, \dots, N;$$

$$P_{.om}(t) \approx P_{.o.}(t) \cdot P_{..m}(t), \quad m = 0, 1, \dots, N.$$

De relatieve fouten in de bovenstaande benaderingen zijn ($\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$) :

($\rho_1 = 0.1$) : 0.08 % ($m=0$), 1.2 % ($m=1$), 1.6 % ($m=2$);

($\rho_2 = 0.2$) : 0.32 % ($m=0$), 2.4 % ($m=1$), 3.8 % ($m=2$);

($\rho_3 = 0.3$) : 0.75 % ($m=0$), 3.8 % ($m=1$), 4.6 % ($m=2$).

Daaruit volgt dat bij oplopende verkeersintensiteit de benadering niet beter wordt.

§3. Resultaten

(A) Symmetrische inputwaarden

Voor de hieronder volgende resultaten is gekozen voor :

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \quad \lambda = 1.$$

De relaxatie-tijd van het aan de orde zijnde netwerk is :

$$T = \rho / (1 - \sqrt{\rho})^2,$$

waarbij $\rho = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3$.

In (2) wordt de hier gebruikte waarde voor T als hypothese opgevoerd.

Op tijdstip $t = 0$ zijn er geen klanten in het systeem aanwezig.

Resultaten :

(16)	ρ	N	T_1	T_5	T	T_1/T	T_5/T	(methode)
	0.1	9	1.00	0.67	0.214	4.67	3.13	(exact)
			0.98	0.66	0.214	4.58	3.08	(benad.)
	0.2	12	2.7	1.7	0.655	4.18	2.66	(exact)
			2.6	1.7	0.655	3.92	2.55	(benad.)
	0.3	16	5.8	3.6	1.467	3.95	2.45	(exact)
			5.3	3.4	1.467	3.61	2.32	(benad.)
	0.4	20	10.0	6.1	2.961	3.38	2.06	(benad.)
	0.5	25	18.6	11.2	5.828	3.19	1.92	(benad.)
	0.6	30	36.1	21.1	11.809	3.06	1.79	(benad.)
	0.7	48	77.2	44.3	26.236	2.94	1.69	(benad.)

Evenals bij het wachtrijmodel met twee stations in serie, is het verschil in de som van de gemiddelde wachtrijlengtes, tussen de 'exacte' resultaten en de benadering niet groot (< 3 % voor $\rho = 0.2$, en < 1 % voor $\rho = 0.1$). Doordat $N'(T_1) \ll 1$, resulteert die fout toch in een relatief grote fout in de benadering voor T_1 (zie bovenstaande tabel).

Er is getracht dit resultaat te verbeteren, door voor $t < R$, $N(t)$

'exact' te berekenen, en voor $t > R$ de benaderingsmethode toe te passen.

(voor nader te bepalen R). Dit leidde echter niet tot een essentiële ver-

betering van de resultaten.

(B) Niet symmetrische inputwaarden

- a) $\beta_1 = \beta_2 = 0.1, \beta_3 = 0.2; (\rho_1 = \rho_2 = 0.1, \rho_3 = 0.2);$
- b) $\beta_1 = \beta_3 = 0.1, \beta_2 = 0.2; (\rho_1 = \rho_3 = 0.1, \rho_2 = 0.2);$
- c) $\beta_2 = \beta_3 = 0.1, \beta_1 = 0.2; (\rho_2 = \rho_3 = 0.1, \rho_1 = 0.2).$

De relaxatie-tijd van dit netwerk is volgens de hypothese uit (2) :

$$T = \max_{j=1,2,3} \{ \beta_j / (1 - \sqrt{\rho_j})^2 \}.$$

Resultaten :

Voor a), b), én c) : $T_1 = 1.83, T_5 = 1.12, T = 0.655, T_1/T = 2.79,$
 $T_5/T = 1.71$ (exact) .

Uit de computerresultaten is gebleken dat voor de drie modellen, de som van de gemiddelde wachtrijlengtes, $N(t)$, voor iedere $t > 0$, gelijk is. Dit resultaat is ook waargenomen bij twee M/M/1 - stations in serie (zie §3.4). We mogen hieruit concluderen dat, indien de drie M/M/1 - stations ieder een verschillende gemiddelde bedieningsduur hebben, het, wat betreft de som van de gemiddelde wachtrijlengtes, niet uitmaakt in welke volgorde de stations zijn geplaatst (zie (13)). Het wachtrijmodel waarbij de stations in serie zijn geplaatst is het enige model waarbij we dit hebben geconstateerd.

§4. Foutschattingen

Naarmate het netwerk van wachtrij-systemen groter wordt, worden de foutschattingen steeds gecompliceerder. De invloed van het oplossen van het eindige stelsel diff. vergln. i.p.v. het oneindige stelsel is moeilijk te bepalen, daar wij gekozen hebben voor N-3 wachtplaatsen voor de drie stations samen, en niet N-1 wachtplaatsen voor ieder station afzonderlijk (dat zou weer tot meer diff. vergln. leiden.). Echter uit voorgaande resultaten is gebleken dat de fout in benadering voor T_1 in grote mate wordt bepaald door de onnauwkeurigheid waarmee de standaard-procedure RKE rekend. Deze opmerking is natuurlijk niet van toepassing indien we gebruik maken van de benaderingsmethode (via de marginale kansverdelingen).

Dit resulteert in een relatieve fout voor T_1 van :

- 0.07 % ($\rho = 0.1$);
- 0.16 % ($\rho = 0.2$);
- 0.19 % ($\rho = 0.3$).

(Voor symmetrische inputwaarden, zie §5.3, (A), tabel (17).)

Een foutschatting voor de resultaten bereikt via de benaderingsmethode is zeer moeilijk te geven, daar de invloeden van de verschillende veronderstellingen moeilijk te meten zijn. We kunnen hier dus alleen afgaan op de vergelijking met de 'exacte' resultaten (zie tabel (16) blz. 23).

§1. Inleiding

In dit hoofdstuk komen twee verschillende netwerken met drie knooppunten aan de orde. Zie voor de definitie van de volgende kansverdelingen §5.1 :

$$\{p_{ijk}(t); i, j, k = 0, 1, \dots, t \geq 0\},$$

$$\{p_{ijk}; i, j, k = 0, 1, \dots\}.$$

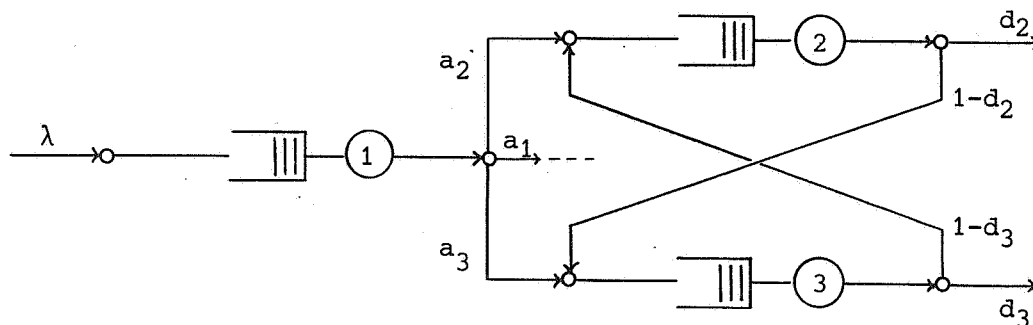
De betekenis van $\beta_i = 1/\mu_i$ ($i = 1, 2, 3$) en λ is de zelfde als in hoofdstuk 5. Beperk het aantal wachtplaatsen tot $N-3$. Daar het aantal diff. vergln. voor de eerst genoemde kansverdeling voor de hieronder aan de orde komende netwerken erg groot is, zijn er alleen resultaten afgeleid voor lage verkeersintensiteiten ($\rho \leq 0.3$).

Evenals in de voorgaande hoofdstukken kunnen we nu i.p.v. de bovenstaande kansverdeling, de marginale kansverdelingen beschouwen. We krijgen dan echter soortgelijke problemen als welke we in §4.2 zijn tegengekomen, met dit verschil dat we nu minder 'exact' vergelijkingsmateriaal hebben.

Goede foutschattingen voor de benadering voor T_1 zijn bij de methode die gebruik maakt van de marginale kansverdelingen nauwelijks te geven. Dientengevolge is die berekeningswijze in dit hoofdstuk achterwege gelaten.

§2. Netwerk I

In deze paragraaf beschouwen we het volgende netwerk van wachtrijsystemen:



Waarbij:

- λ : gemiddeld aantal arriveringen per tijdseenheid bij station 1;
- $\beta_i = 1/\mu_i$: gemiddelde bedieningsduur voor station i ($i = 1, 2, 3$);
- a_1 : kans dat een klant, die station 1 verlaat, het gehele systeem verlaat;
- a_i : kans dat een klant, die station 1 verlaat, naar station i gaat ($i = 2, 3$);
- d_i : kans dat een klant, die station i verlaat, het gehele systeem verlaat ($i = 2, 3$);
- ρ_i : verkeersintensiteit bij station i ($i = 1, 2, 3$).

Kies het aantal wachtplaatsen ($N-3$) weer zodanig dat de kans op verlies van een klant tengevolge van een overbelast systeem 10^{-7} is.

Zie voor de diff. vergln. voor de kansverdeling :

$$\{P_{ijk}(t); i, j, k = 0, 1, \dots, N, i+j+k \leq N, t \geq 0\}$$

(7), Appendix.

In dit netwerk is station 1 onafhankelijk van de andere twee stations. Daarom volgt : $\rho_1 = \lambda \cdot \beta_1$.

Zij O_i het gemiddeld aantal klanten dat station i per tijdseenheid verlaat en I_i het gemiddeld aantal binnengekomen klanten per tijdseenheid (intern zowel als extern) voor station i ($i = 2, 3$).

Dan geldt, indien het systeem in stationaire toestand verkeert :

$$a_3 + (1-d_2)O_2 = I_3 ;$$

$$a_2 + (1-d_3)O_3 = I_2 ;$$

$$I_2 = O_2 ;$$

$$I_3 = O_3 .$$

$$\text{Dan volgt : } I_3 = \frac{(1-d_2)a_2\lambda + a_3\lambda}{d_2+d_3-d_2d_3} , \quad I_2 = \frac{(1-d_3)a_3\lambda + a_2\lambda}{d_2+d_3-d_2d_3} ,$$

en dus :

$$\rho_2 = \frac{(1-d_3)a_3\lambda + a_2\lambda}{(d_2+d_3-d_2d_3)\mu_2} , \quad \text{en} \quad \rho_3 = \frac{(1-d_2)a_2\lambda + a_3\lambda}{(d_2+d_3-d_2d_3)\mu_3} .$$

Resultaten :

De onderstaande resultaten zijn afgeleid voor de parameters :

$$d_2 = d_3 = 0.5, a_1 = 0.5, a_2 = a_3 = 0.25 .$$

Op tijdstip $t = 0$ zijn er geen klanten in het systeem aanwezig.

- a) $\beta_1 = 0.1, \beta_2 = \beta_3 = 0.2$ ($\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$);
- b) $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = \beta_3 = 0.4$ ($\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$);
- c) $\beta_1 = 0.3, \beta_2 = \beta_3 = 0.6$ ($\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$);
- d) $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.2$ ($\rho_1 = 0.2, \rho_2 = \rho_3 = 0.1$).

De relaxatie-tijd van dit netwerk definiëren we als volgt (zie (2) blz. 17 ; evenals in §5.3 slechts een hypothese) :

$$T = \max_{j=1,2,3} \{ \beta_j m_j (1-\rho_j)^{-2} \}$$

waarbij : $m_1 = 1$;

$$m_2 = m_3 = [1 - (1-d_2)(1-d_3)]^{-1}$$

(17)	N	T_1	T_5	T	T_1/T	T_5/T
a)	9	2.3	1.4	0.570	4.04	2.46
b)	13	6.2	3.7	1.745	3.55	2.12
c)	18	12.6	7.3	3.911	3.22	1.87
d)	13	2.6	1.6	0.655	3.97	2.44

§3. Netwerk II

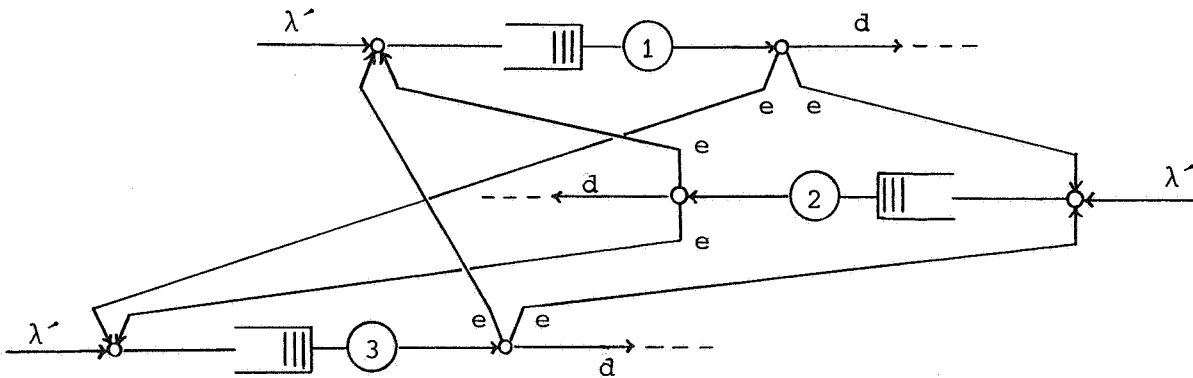
In deze paragraaf beschouwen we het volgende wachtrijmodel, waarbij de parameters de volgende betekenis hebben :

$\lambda = 1/3$: het gemiddeld aantal binnengekomen klanten (extern) per station per tijdseenheid;

$\beta = 1/\mu$: de gemiddelde bedieningsduur voor elk station;

d : de kans dat een klant, nadat zijn bedieningsduur bij een zeker station is verstreken, het gehele systeem verlaat;

ρ_i : verkeersintensiteit voor station i ($i = 1, 2, 3$).



$$e = \frac{1-d}{2}.$$

Daar de drie stations, door bovenstaande keuze van parameters, identiek zijn, kunnen we nu de volgende variabelen definiëren :

O : gemiddeld aantal klanten dat een station per tijdseenheid verlaat;

I : gemiddeld aantal binnengekomen klanten (extern zowel als intern) per tijdseenheid voor ieder station.

Indien het systeem in stationaire toestand verkeert, dan geldt :

$$(1-d)O + 1/3 = I,$$

$$I = O.$$

Daaruit volgt : $I = 1/(3d)$, en dus : $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \beta/(3d)$.

We beschouwen nu verder het bovenstaande netwerk van wachtrij-systemen met in totaal $N-3$ wachtplaatsen (keuze van N zoals in de voorgaande hoofdstukken). Zie voor het stelsel diff. vergln. voor de kansverdeling $\{P_{ijk}(t); i, j, k = 0, \dots, N, i+j+k \leq N, t \geq 0\}$ (7), Appendix.

Resultaten :

De hieronder volgende resultaten zijn afgeleid voor de parameterwaarden :

$d = 1/3, \beta = 0.1, 0.2, 0.3$.

Op tijdstip $t = 0$ zijn er geen klanten in het systeem aanwezig.

De relaxatie-tijd van dit netwerk is (hypothese, zie (2) blz. 17) :

$$T = \beta m / (1 - \sqrt{\rho_1})^2,$$

$$\text{waarbij } m = \frac{1 - e^2}{1 - 3e^2 - 2e^3}.$$

(18)	ρ	N	T_1	T_5	T	T_1/T	T_5/T
	0.1	10	1.78	1.12	0.302	5.89	3.71
	0.2	14	4.6	2.9	0.924	4.98	3.14
	0.3	18	9.4	5.7	2.070	4.54	2.75

HOOFDSTUK 7 SIMULATIE§1. Inleiding

Teneinde de d.m.v. het stelsel diff. vergln. verkregen resultaten te kunnen vergelijken met de 'werkelijkheid', hebben we het wachtrijlengte-proces van een aantal netwerken gesimuleerd.

Een simulatie-run start op tijdstip $t = 0$ met een lege wachtrij, en eindigt op tijdstip $t = 2 \cdot T_1$. (Voor de waarden van T_1 , zie voorgaande hoofdstukken.) We delen de simulatieduur op in twee intervallen :

$I_1 = [0, T_1]$, en $I_2 = [T_1, 2 \cdot T_1]$.

Voor $t \in I_2$ geldt dat $N(t)$ minder dan 1 % afwijkt van zijn stationaire waarde.

De totale simulatie bestaat uit 2000 onafhankelijke runs. Die runs zijn opgedeeld in groepen van 100.

Zij X_{ij} ($i = 1, \dots, 20$, $j = 1, 2$) de gemiddelde wachtrijlengte van groep i over het interval I_j .

Zij $\bar{X}_j = \sum_{i=1}^{20} X_{ij}/20$, $j = 1, 2$, de gemiddelde wachtrijlengte over het interval I_j .

Zij $V_j = \sum_{i=1}^{20} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2/20$, $j = 1, 2$.

Dan is $V_j/19$ een schatter voor de variantie van de wachtrijlengte ($t \in I_j$).

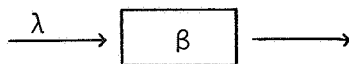
$$\text{Zij } T = \frac{\sqrt{20}(\bar{X}_2 - \mu)/\sigma}{\sqrt{(20 \cdot V_2/\sigma^2 \cdot 19)}} = \frac{\bar{X}_2 - \mu}{\sqrt{(V_2/19)}},$$

waarbij μ : exact gemiddelde van X_{i2} , $i = 1, \dots, 20$;

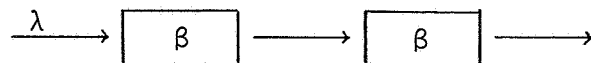
σ^2 : exacte variantie van X_{i2} , $i = 1, \dots, 20$.

Dan geldt dat T een t-verdeling heeft met 19 vrijheidsgraden. Aan de hand van die stochastische variabele T kunnen we nu een betrouwbaarheidsinterval voor $\bar{X}_2$ afleiden.

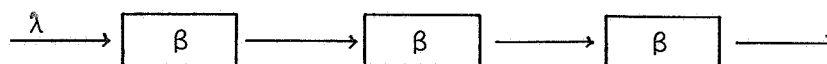
De volgende modellen zijn gesimuleerd :

(1) M/M/1

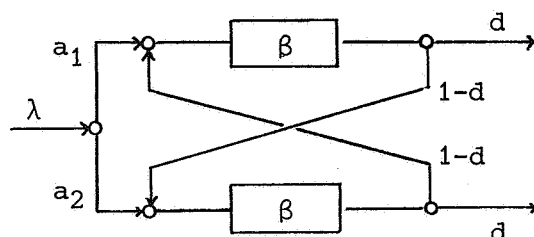
$$\lambda = 1, \beta = 0.1, 0.2, \dots, 0.6.$$

(2) Twee M/M/1 - stations in serie

$$\lambda = 1, \beta = 0.1, 0.2, \dots, 0.5.$$

(3) Drie M/M/1 - stations in serie

$$\lambda = 1, \beta = 0.1, 0.2, 0.3.$$

(4) Twee M/M/1 - stations met terugkoppeling

a_i = kans dat een klant voor zijn eerste bediening naar loket i gaat
($i = 1, 2$);

d = kans dat een klant na een bediening het systeem verlaat

$a_1 = a_2 = 0.5$, $d = 0.75$, $\beta = 0.15, 0.30, 0.45$.

Dat resulteert in de verkeersintensiteiten $\rho : 0.1, 0.2, 0.3$.

§2. Resultaten

(19).

(1), blz. 28	$\rho = 0.1$	$\rho = 0.2$	$\rho = 0.3$	$\rho = 0.4$	$\rho = 0.5$	$\rho = 0.6$
$\bar{X}_1$	0.09718	0.21586	0.35069	0.55576	0.85433	1.33489
V_1	0.00025	0.00103	0.00120	0.00129	0.00326	0.00833
$\bar{X}_2$	0.11488	0.25367	0.43626	0.66539	0.97752	1.48968
V_2	0.00047	0.00101	0.00225	0.00281	0.00633	0.01278
95 % betr.b.h. interval voor $\bar{X}_2$	(0.11488 ± 0.01041)	(0.25367 ± 0.01529)	(0.43626 ± 0.02278)	(0.66539 ± 0.02544)	(0.97752 ± 0.03821)	(1.48968 ± 0.05428)
$\rho/(1-\rho)$	0.11111	0.250	0.42857	0.66667	1.0	1.50

(20).

(2), blz. 28	$\rho = 0.1$	$\rho = 0.2$	$\rho = 0.3$	$\rho = 0.4$	$\rho = 0.5$
$\bar{X}_1$	0.17566	0.39980	0.70514	1.08926	1.65715
V_1	0.00053	0.00155	0.00274	0.00287	0.00995
$\bar{X}_2$	0.22024	0.48691	0.86707	1.33093	2.00816
V_2	0.00059	0.00172	0.00314	0.00976	0.01527
95 % betr.b.h. interval voor $\bar{X}_2$	(0.22024 ± 0.01169)	(0.48691 ± 0.01993)	(0.86707 ± 0.02691)	(1.33093 ± 0.04743)	(2.00816 ± 0.05934)
$2\rho/(1-\rho)$	0.22222	0.50	0.85714	1.33333	2.0

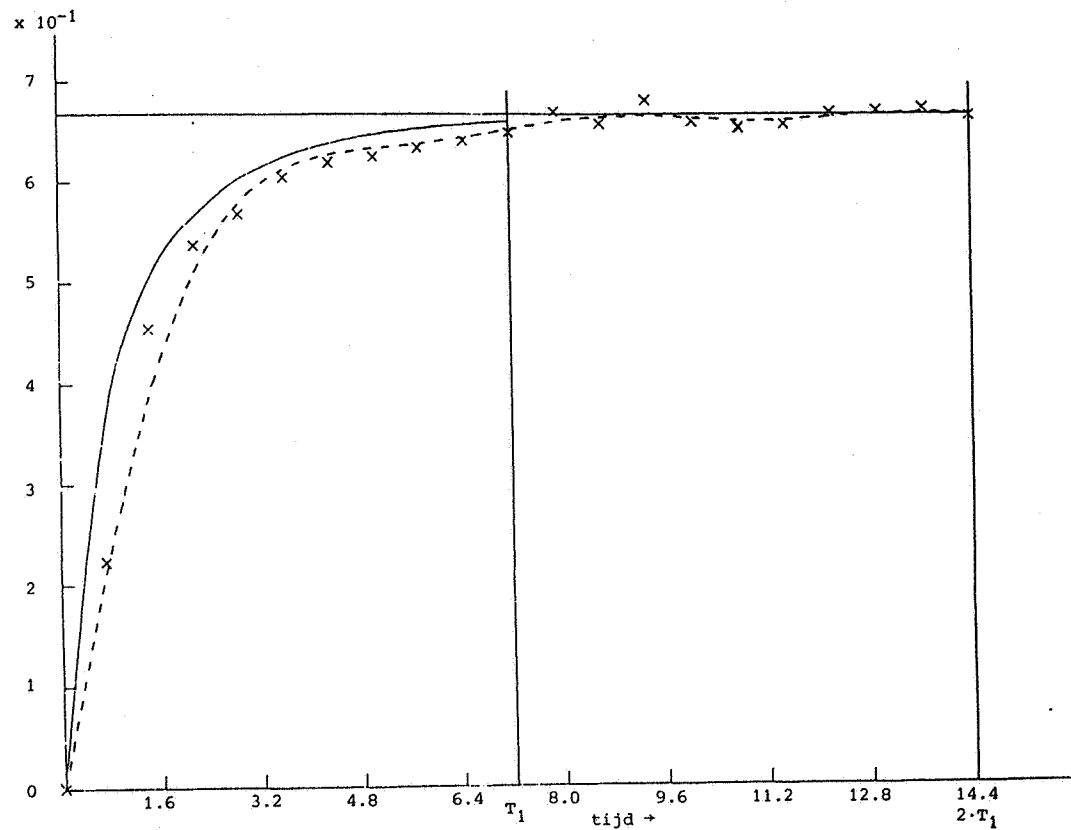
(21) (3), blz. 28	$\rho = 0.1$	$\rho = 0.2$	$\rho = 0.3$
$\bar{X}_1$	0.26218	0.57454	1.02762
V_1	0.00100	0.00140	0.00427
$\bar{X}_2$	0.33719	0.76430	1.30614
V_2	0.00257	0.00377	0.01020
95 % betr.b.h. interval voor $\bar{X}_2$	(0.33719 ± 0.02433)	(0.76430 ± 0.02947)	(1.30614 ± 0.04850)
$3\rho/(1-\rho)$	0.33333	0.750	1.28571

(22) (4), blz. 29	$\rho = 0.1$	$\rho = 0.2$	$\rho = 0.3$
$\bar{X}_1$	0.17812	0.40467	0.69537
V_1	0.00068	0.00139	0.00135
$\bar{X}_2$	0.23039	0.50066	0.86791
V_2	0.00049	0.00239	0.00571
95 % betr.b.h. interval voor $\bar{X}_2$	(0.23039 ± 0.01065)	(0.50066 ± 0.02349)	(0.86791 ± 0.03629)
$2\rho/(1-\rho)$	0.22222	0.50	0.85714

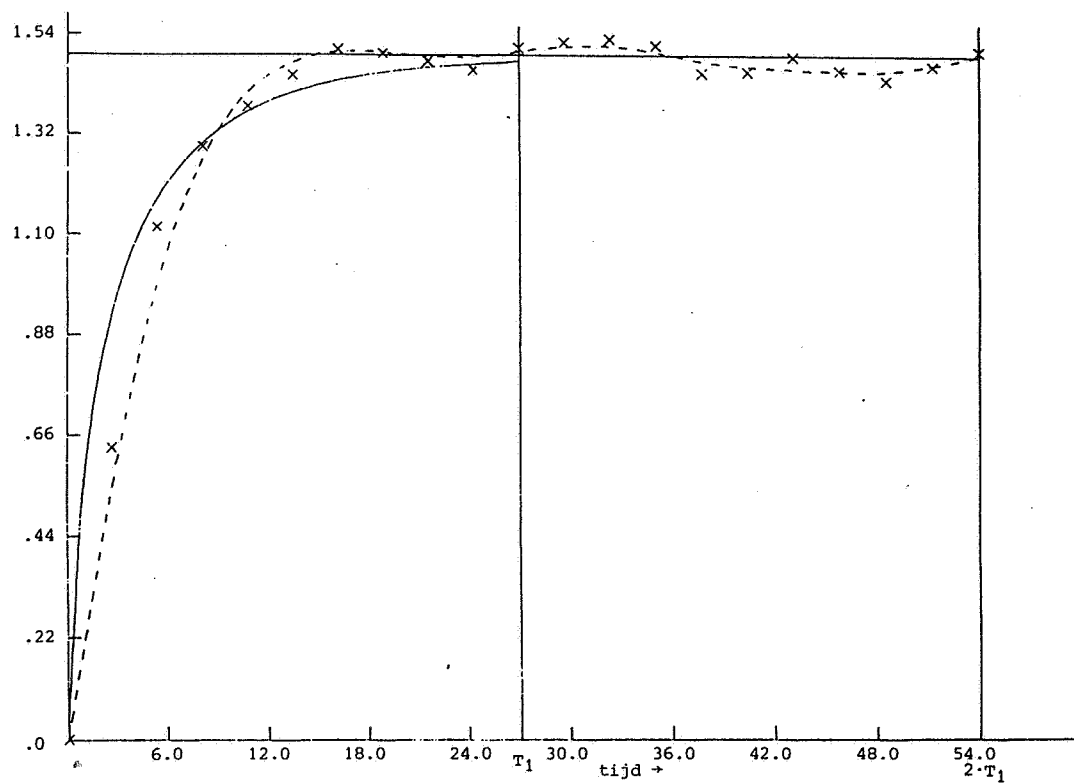
Uit bovenstaande resultaten blijkt dat in alle gevallen de stationaire waarde van $N(t)$, ($t \in I_2$), binnen het 95 % betrouwbaarheidsinterval voor $\bar{X}_2$ ligt.

§3. Grafische weergave van enkele resultaten uit §7.2

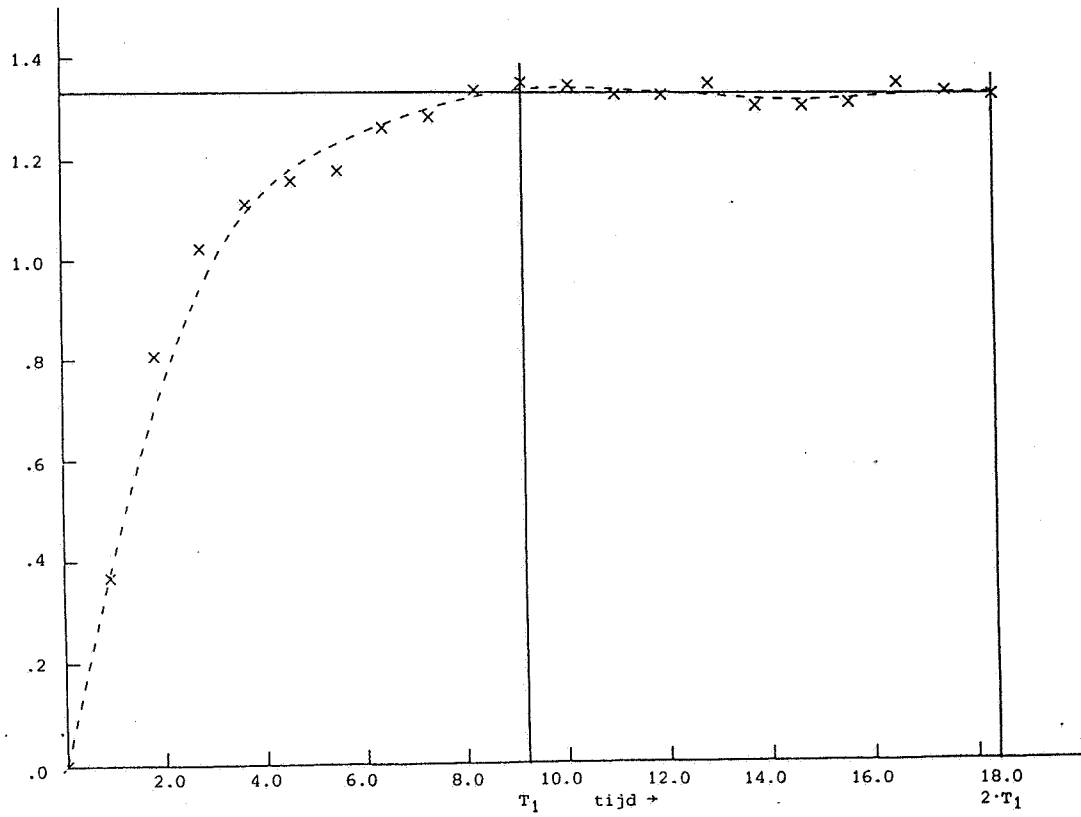
In de nu volgende grafieken (blz. 31 t/m 33), is het gemiddeld aantal klanten (berekend d.m.v. simulatie) uitgezet tegen de tijd. De vertiacale lijnen geven de tijdstippen $t = T_1$, en $t = 2 \cdot T_1$ weer. De horizontale lijn geeft het gemiddeld aantal klanten in het systeem aan, indien het wachtrijmodel in stationaire toestand verkeert. Met 'X' geven we de gesimuleerde waarden aan. De onderbroken lijn is een vloeiende lijn 'langs' die punten (kleinste kwadraten methode, zie (14)). In de figuren 2, en 3 is ook de oplossing van het overeenkomstige stelsel diff. vergln. weergegeven (ononderbroken lijn).



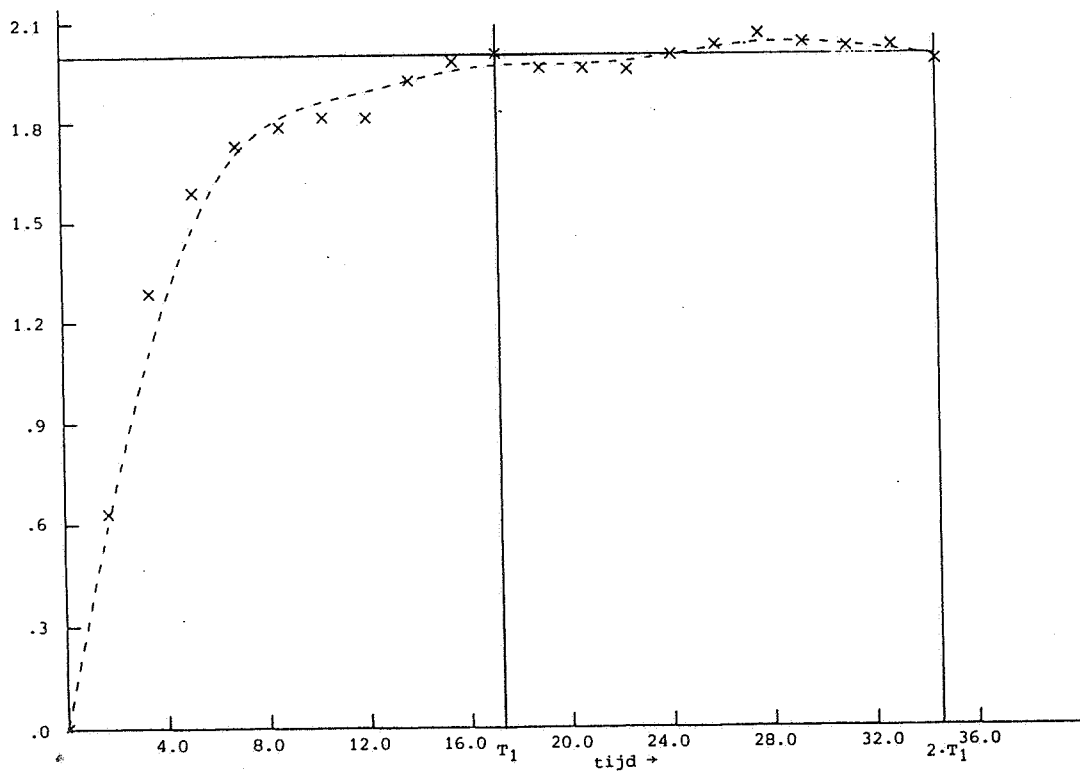
Figuur 4.
Simulatie M/M/1 - station ; $\rho = 0.4$, $\lambda = 1$.



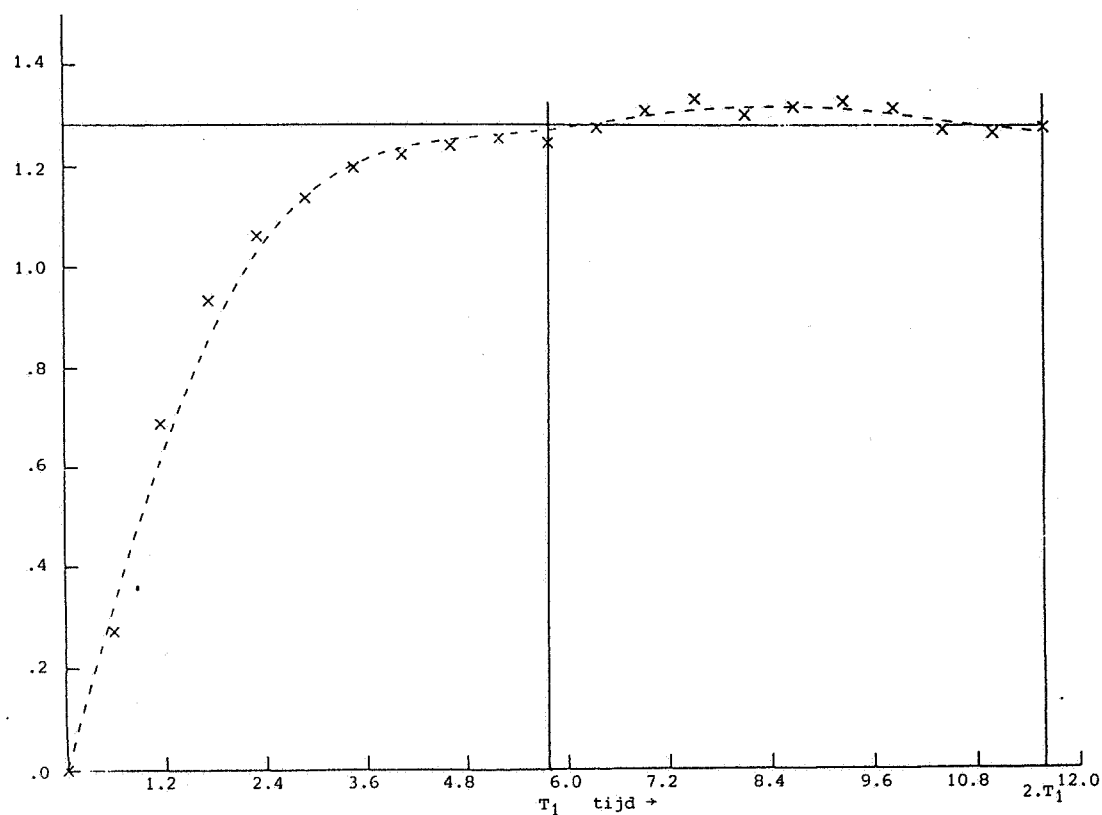
Figuur 5.
Simulatie M/M/1 - station ; $\rho = 0.6$, $\lambda = 1$.



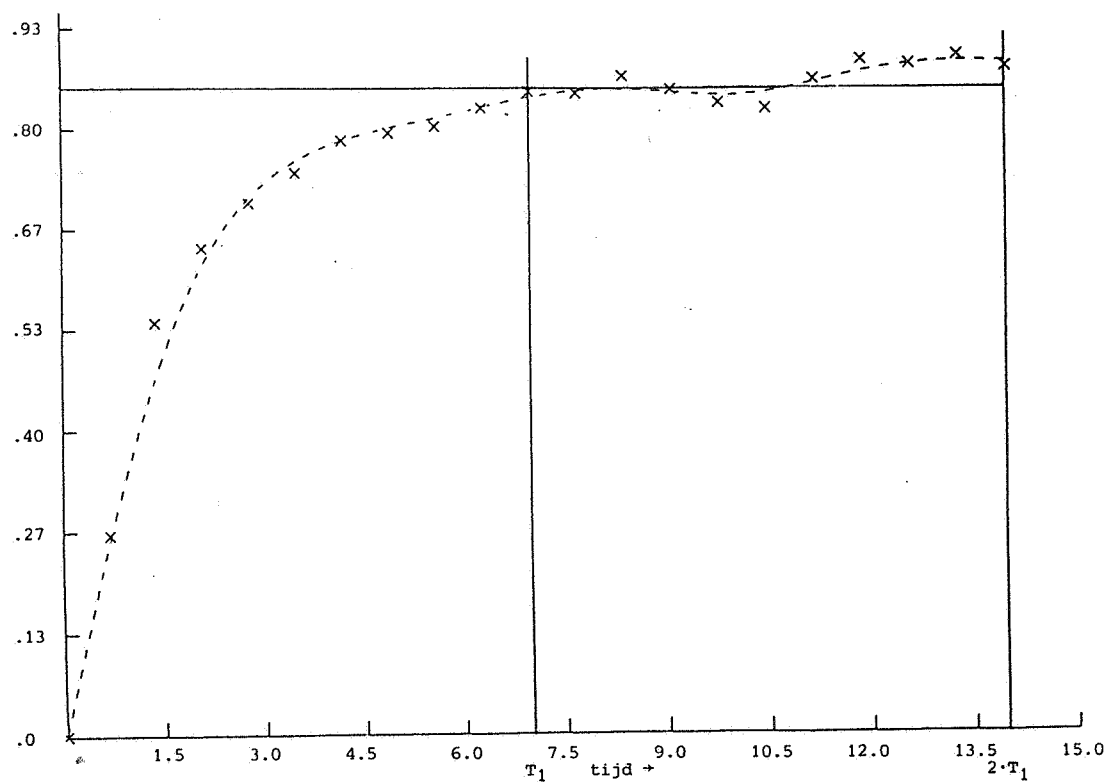
Figuur 6.
Simulatie twee M/M/1 - stations in serie ; $\rho = 0.4$, $\lambda = 1$.



Figuur 7.
Simulatie twee M/M/1 - stations in serie ; $\rho = 0.5$, $\lambda = 1$.



Figuur 8.
Simulatie drie M/M/1 - stations in serie ; $\rho = 0.3$, $\lambda = 1$.



Figuur 9.
Simulatie twee M/M/1 - stations met terugkoppeling ; $\rho = 0.3$, $\lambda = 1$.

§4. Test op stationairiteit van $N(t)$ op interval $[T_1, 2 \cdot T_1]$

In (11, blz. 579) wordt een statistische test beschreven, aan de hand waarvan we kunnen beslissen of een proces stationair is.

Daarvoor delen we het tweede interval, I_2 op in 10 deelintervallen. Zij Z_i de waarneming van het i^e deelinterval ($i = 1, \dots, 10$).

Zij $S(k) = \bar{Y}_{10} - \bar{Y}_k$,

waarbij : $\bar{Y}_k = \sum_{i=1}^k Z_i/k$, $k = 1, \dots, 10$.

De test is gebaseerd op de volgende stochastische variabele :

$$\hat{h} = \hat{s}^2 [3\hat{\sigma}^2 \hat{t}(1-\hat{t})]^{-1},$$

met :

$\hat{s}$: globaal maximum van $\{kS(k)/\sqrt{10}\}$, $k = 1, \dots, 10$;

$\hat{k}$: lokatie van dat maximum;

$\hat{\sigma}^2$: schatter voor variantie ($t \in I_2$); wij kiezen : $\hat{\sigma}^2 = v_2/19$;

$\hat{t}$: $\hat{k}/10$.

Er geldt dan dat $\hat{h}$ een F-verdeling bezit, met 3 en 19 vrijheidsgraden.

Voor die F-verdeling geldt :

$\Pr\{ F < f\}$	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
f	1.487	2.397	3.127	3.903	5.010

Voor lage verkeersintensiteiten zijn de simulatie-gegevens op te weinig random getallen gebaseerd (aantal binnengekomen klanten < 5000) om daaruit gerechtvaardigde conclusies te kunnen trekken.

Resultaten :

(23)	netwerk	ρ	$\hat{h}$
1)	M/M/1	0.3	1.018
2)	"	0.4	0.271
3)	"	0.5	0.756
4)	"	0.6	0.234
5)	2 M/M/1 in serie	0.2	0.174
6)	" "	0.3	3.416
7)	" "	0.4	0.309
8)	" "	0.5	3.450
9)	3 M/M/1 in serie	0.2	5.181
10)	" "	0.3	0.493
11)	2 M/M/1 met terugkoppeling	0.2	0.363
12)	" "	0.3	4.586

Uit de bovenstaande tabel volgt dat de resultaten (9) en (12) onbevredigend zijn. Acht van de twaalf resultaten liggen binnen het 90 % betrouwbaarheidsinterval voor $\hat{h}$.

§1. Vergelijkingen

In (9) geeft Kobayashi een formule, gebaseerd op diffusie-benadering, voor het tijdstip T_0 waarop het G/G/1 - wachtrijmodel zijn stationaire toestand heeft bereikt, indien op tijdstip $t = 0$ met een lege wachtrij gestart is.

Die formule luidt:

$$T_0 = \frac{\tau \beta [C_s^2 + \rho C_a^2]}{(1-\rho)^2},$$

waarbij :

$\tau \approx 5$;

C_s : variatiecoëfficiënt van de bedieningsduur verdeling;

C_a : variatiecoëfficiënt van het arriveringsproces.

Methode van berekening:

Zij het continue proces $x(t)$ een benadering voor het discrete proces $N(t)$.

Zij $p(x,t)$ de kansdichtheid van $x(t)$, $t > 0$.

Dan voldoet $p(x,t)$ aan de volgende diff. vergl. :

$$p(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi[(x - x_0 - bt)/\sqrt{(at)}] - \exp(2bx/a) \Phi[-(x + x_0 + bt)/\sqrt{(at)}] \right], \quad (x > 0, t > 0),$$

waarbij :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \sqrt{(2\pi)} \exp(-z^2/2) dz ;$$

$$a = C_a \lambda + C_s \mu ;$$

$$b = \lambda - \mu ;$$

$$x(0) = x_0.$$

λ en μ hebben de zelfde betekenis als in de voorgaande hoofdstukken.

D.m.v. de transformatie :

$$y = x \cdot |b/a|, \text{ en } \tau = t \cdot |b^2/a|,$$

en numerieke berekening van de dan ontstane diff. vergl. volgt de formule voor T_0 . De constante τ wordt met behulp van grafieken 'op het oog' bepaald.

Voor het M/M/1 - wachtrijmodel volgt dan ($\lambda = 1$) :

$$T_0 = \frac{5\rho(1+\rho)}{(1-\rho)^2}.$$

We vergelijken dit resultaat met de gegevens uit §1.3 tabel (2) .

(24)	ρ	T_0	T_1
	0.1	0.68	0.65
	0.2	1.9	1.8
	0.3	4.0	3.8
	0.4	7.8	7.2
	0.5	15.0	13.7
	0.6	30.0	27.0
	0.7	66.1	58.4
	0.8	180.0	156.1
	0.9	855.0	729.3

Zij T_1 en T (relaxatie-tijd) zoals in de inleiding gedefiniëerd. In (3) is voor netwerken met K $M/M/\infty$ - stations in serie de verhouding T_1/T voor een aantal waarden van K berekend (zie (3) blz. 14). Hierbij is aangenomen dat er op tijdstip $t = 0$ geen klanten in het systeem aanwezig zijn. Het blijkt dat van alle netwerken met K $M/M/\infty$ - stations en gelijke relaxatie-tijden, het model met de stations in serie geplaatst, het langzaamst naar zijn stationaire toestand convergeert (wat betreft het gemiddeld aantal klanten in het systeem). D.w.z. dat de verhouding T_1/T voor het $M/M/\infty$ - 'serie-model' een bovengrens is voor de waarde van T_1/T voor alle $M/M/\infty$ - netwerken met overeenkomstig aantal stations.

Het blijkt echter dat die waarde ook een bovengrens is voor de door ons berekende modellen met overeenkomstig aantal stations.

Zij C_k de door ons gevonden maximale verhouding T_1/T voor een netwerk met k stations ($k = 1, 2, 3$). Zij V_k de verhouding T_1/T voor het netwerk met k $M/M/\infty$ - stations in serie ($k = 1, 2, 3$).

Dan volgt :

# stations (K)	C_k	V_k (μ_k)	
1	3.10 (μ_1)	4.61	μ_1 : zie tabel (2) blz. 3;
2	5.30 (μ_2)	5.99	μ_2 : zie tabel (15) blz. 21;
3	5.89 (μ_3)	7.30	μ_3 : zie tabel (18) blz. 27;
			μ_4 : zie (3) blz. 14.

§2. Conclusies

In alle, door ons berekende gevallen, is gebleken dat de verhouding T_ε/T , ($\varepsilon = 1, 5$) dalend is voor stijgende verkeersintensiteit ρ . Die verhouding stijgt naarmate het netwerk meer stations bevat. De verhoudingen die wij hebben waargenomen liggen in de volgende intervallen :

(25) netwerk	T_1/T in interval (μ_5)
M/M/1 - station	[2.13 , 3.10]
M/M/2 - station	[2.10 , 4.32]
2 M/M/1 - stations in serie	[2.26 , 3.95]
2 M/M/1 - stations met terugkoppeling	[2.41 , 5.30]
3 M/M/1 - stations in serie	[2.79 , 4.67]
3 M/M/1 - stations met terugkoppeling	[3.22 , 5.89]

μ_5 : voor een beperkt aantal geselecteerde waarden van ρ .

Het is natuurlijk mogelijk de verhouding T_1/T groter of kleiner te krijgen dan in tabel (24) staat aangegeven. Daarvoor moet de gemiddelde bedieningsduur extreem laag of extreem hoog gekozen worden. Echter voor de meest voorkomende gevallen zullen de bovenstaande verhoudingen een goede indicatie geven voor het tijdstip waarop het netwerk van wachtrij-systemen zijn stationaire toestand bereikt heeft.

De relaxatie-tijd voor een netwerk met meer dan 2 knooppunten is in (2) als hypothese opgevoerd. Uit de bovenstaande resultaten volgt dat de verhouding T_1/T voor die netwerken (met drie knooppunten) geen extreme afwijking vertoont t.o.v. de resultaten voor netwerken met 1 of 2 knooppunt(en).

LITERATUURLIJST

- 1) Beentjes, P.A. *Numal, a library of procedures in Algol-60, Vol. 5,*
M.C. Syllabus 47.5,
P.W. Hemker (ed.),
Centre for Mathematics and Computer Science,
Amsterdam, 1981.
- 2) Blanc, J.P.C. & *Relaxation times for Queueing Systems,*
Doorn, E.A. v. Te verschijnen in : Proceedings of the CWI Symposium
Mathematics and Computer Science, J.K. Lenstra (eds.),
J.W. de Bakker, M. Hazewinkel,
CWI Monograph 1, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- 3) Blanc, J.P.C. *The transient behaviour of Networks with infinite*
 server nodes,
Report OS-R8408, Centre for Mathematics and Computer
Science, Amsterdam, 1984.
- 4) Cohen, J.W. *The Single Server Queue,*
Rev. ed., North-Holland, Amsterdam, 1982.
- 5) Doorn, E.A. v. *Stochastic Monotonicity and Queueing Applications*
 of Birth-Death Processes,
Lecture Notes in Statistics 4, Springer-Verlag,
New York, 1981.
- 6) England, R. *Error Estimates for Runge-Kutta type solution to*
 Systems of Ordinary Differential Equations,
The Computer Journal, Vol 12, (166 - 169), 1969.
- 7) Hop, H. *Tijdsafhankelijk gedrag van wachtrij-processen,*
 en de praktische toepassing van relaxatie-tijden.
Afstudeer Skriptie in opdracht van Prof. Dr. Ir.
Cohen, Rijksuniversiteit Utrecht, Utrecht, 1984.
- 8) Jackson, J.R. *Networks of Waiting Lines,*
Oper. Res. 5, (518 - 521), 1957.
- 9) Kobayashi, H. *Application of the Diffusion Approximation to*
 Queueing Networks II : Nonequilibrium Distributions
 and Applications to Computer Modeling,
Journal of the A.C.M., Vol. 21, No. 3 (459 - 469),
1974.
- 10) Odoni, A.R. & *An Empirical Investigation of the transient behaviour*
Roth, E. *of Stationary Queueing Systems,*
Oper. Res. 31, (432 - 455), 1983.
- 11) Schruben, L.W. *Detecting Initialization Bias in Simulation Output,*
Oper. Res. 30, (569 - 590), 1982.
- 12) Takács, L. *Introduction to the Theory of Queues,*
Oxford University Press, New York, 1962.
- 13) Weber, R.R. *The Interchangeability of $\cdot/M/1$ Queues in Series,*
Jour. Appl. Prob. 16, (690 - 695), 1979.
- 14) Diversen *Komplot, ACCU-Reeks No. 10,*
7^e druk, april 1983,
Rijksuniversiteit Utrecht, Utrecht.

ONTVANGEN 1 1 DEC. 1984