



Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science

P. Groeneboom

Onderzoek volgtijden op de 2x2-strooks autosnelweg

Afdeling Mathematische Statistiek

Notitie MS-N8401

December

Bibliotheek
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Amsterdam

Investigation of headways on the 2+2 lane freeway

The Centre for Mathematics and Computer Science is a research institute of the Stichting Mathematisch Centrum, which was founded on February 11, 1946, as a nonprofit institution aiming at the promotion of mathematics, computer science, and their applications. It is sponsored by the Dutch Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.).

ONDERZOEK VOLGTIJDEN OP DE 2X2-STROOKS AUTOSNELWEG

P. GROENEBOOM

Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam

Metingen en volgtijden op de 2x2-strooks snelweg zijn met behulp van verschillende statistische modellen geanalyseerd. Hierbij werd de volgtijdenverdeling ontbonden in twee componenten, waarbij één component betrekking had op rijders die hun snelheid laten bepalen door hun voorganger (de z.g. "volgersverdeling") en de andere component op rijders waarbij dit niet het geval is (de z.g. "leidersverdeling"). Verschillende uit de literatuur bekende modellen werden verder ontwikkeld en in het bijzonder werden asymptotische varianties van de parameterschattingen bepaald. Bij de analyses kwamen duidelijke verschillen tussen de structuur van het verkeer op twee verschillende locaties aan het licht en de resultaten van het onderzoek leidden ook tot hypothesen over het soort verschil in structuur van het verkeer bij nat en droog weer.

TREFWOORDEN: semi-Poisson model, Brantston's gegeneraliseerde wachttijdenmodel.

Notitie MS-N8401

Centrum voor Wiskunde en Informatica

Postbus 4079, 1009 AB Amsterdam



1. Inleiding

In dit rapport worden de methodes beschreven waarmee volgtijden, gemeten door Rijkswaterstaat, dienst Verkeerskunde, op de 2x2-strooks snelweg zijn geanalyseerd. Aan het onderzoek is een oriënterend onderzoek voorafgegaan, verder aan te duiden met "vooronderzoek", waarvan de resultaten ter beschikking zijn gesteld aan Rijkswaterstaat; van dit vooronderzoek is alleen schriftelijk rapportage gemaakt (samen met computer print-outs). Tevens is in dit vooronderzoek programmatuur ontwikkeld.

Doel van het hoofdonderzoek was om een grote hoeveelheid gegevens van volgtijden bij Driebruggen en Zoetermeer te analyseren en methoden te ontwikkelen om de stabiliteit van de parameterschattingen te bepalen (uitgedrukt in de *varianties* van deze schattingen). Tevens werd een (geslaagde) poging gedaan om een semi-parametrische versie van het gegeneraliseerde wachttijdenmodel van Branston (1976) te ontwikkelen, verder aangeduid met *convolutiemodel*. Een volledig parametrische versie van dit model had bij het vooronderzoek de beste resultaten opgeleverd. De afleiding van de semi-parametrische versie van het model wordt beschreven onder 2.

Voor een volledige beschrijving van de in het volgende aan de orde komende modellen, waarbij de volgtijdverdeling wordt ontbonden in een "volgers"- en "leiders"-verdeling, verwijzen we naar de literatuur-opgave achter in dit rapport (in het bijzonder Branston (1976) en Wasielewski (1979)). Een primitievere versie van dit type model wordt gegeven in Breiman en Lawrence (1977). Bij al deze modellen wordt aangenomen dat de volgtijden een kansdichtheid van de vorm

$$(1.1) \quad f(t) = \psi f_V(t) + (1-\psi) f_L(t).$$

bezitten, waarbij f_L (f_V) de kansdichtheid van de leiders- (volgers-) verdeling is en ψ de fractie volgers. Bij de semi-parametrische modellen wordt bovendien aangenomen dat $f(t) = (1-\psi) f_L(t) = A\lambda e^{-\lambda t}$, voor waarden van t groter dan een bepaalde T (bij $T = 4$ seconden). In Breiman en Lawrence (1977) wordt aangenomen dat $f_L(t) = 0$ voor $t \leq T$, maar het lijkt realistischer om aan te nemen dat $f_L(t)$ volgens een vloeiende curve naar nul gaat als $t \rightarrow 0$, zoals in Wasielewski (1979) en onze semi-para-

metrische versie van Branston's convolutiemodel.

Bij ons onderzoek werden computerprogramma's geschreven door M. Bakker, R. van der Horst en N. Troianni.

2. Branston's convolutiemodel met niet gespecificeerde volgersverdeling

In het convolutiemodel van Branston wordt aangenomen dat de dichtheid van de volgtijdverdeling te schrijven is als

$$f(t) = \psi g(t) + (1-\psi) h(t),$$

waarbij g de dichtheid van de volgersverdeling is, h de dichtheid van de leidersverdeling en ψ de fractie volgers. De relatie tussen f en g wordt gespecificeerd door de volgende vergelijking:

$$(2.1) \quad f(t) = \psi g(t) + (1-\psi) \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t g(x) e^{\lambda x} dx,$$

(zie Branston ('76), vergelijking (4)). Stel nu $g_1(t) = \psi g(t)$ en $g_1(0) = 0$, $g_1(t) = 0$, $t \geq T$. Dan geldt:

$$(2.2) \quad \begin{cases} g_1(t) = f(t) - \frac{1-\psi}{\psi} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t g_1(x) e^{\lambda x} dx \\ \psi = \int_0^T g_1(u) du \end{cases}$$

We vormen dit nu om tot een differentiaal-vergelijking voor g_1 . We hebben

$$\begin{aligned} g_1'(t) &= f'(t) - \frac{1-\psi}{\psi} \lambda g_1(t) + \\ &+ \frac{1-\psi}{\psi} \lambda^2 \exp(-\lambda t) \int_0^t g_1(x) e^{\lambda x} dx \\ &= f'(t) - \lambda g_1(t) + \lambda f(t) - \frac{1-\psi}{\psi} \lambda g_1(t) \end{aligned}$$

Dus g_1 voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$g_1'(t) + (\lambda/\psi) g_1(t) = f'(t) + \lambda f(t)$$

voor $t \in [0, T]$ met de randconditie $g_1(0) = 0$. De oplossing is:

$$(2.3) \quad g_1(t) = \int_0^t \exp\left\{\frac{\lambda(u-t)}{\psi}\right\} (f'(u) + \lambda f(u)) du.$$

Partieel integreren geeft

$$\begin{aligned} \int_0^t f'(u) \exp\left(\frac{\lambda u}{\psi}\right) du &= f(t) \exp\left(\frac{\lambda t}{\psi}\right) \\ &- \left| \frac{\lambda}{\psi} f(u) \exp\left(\frac{\lambda u}{\psi}\right) du. \right. \end{aligned}$$

Dus we kunnen (2.3) herschrijven in de volgende vorm

$$(2.4) \quad g_1(t) = f(t) - \lambda \frac{1-\psi}{\psi} \int_0^t \exp\left\{\frac{\lambda(u-t)}{\psi}\right\} f(u) du.$$

Hieruit volgt dat ψ moet voldoen aan de vergelijking

$$(2.5) \quad \psi = \psi F(T) - (1-\psi) \int_0^T \exp\left\{\frac{\lambda(u-T)}{\psi}\right\} dF(u),$$

waarbij

$$(2.6) \quad F(t) = \int_0^t f(t) dt$$

(F is de (cumulatieve) verdelingsfunctie van de volgtijden).

3. Parameterschattingen in Branston's convolutiemodel met niet gespecificeerde volgersverdeling.

We bespreken eerst onder 3.1 de wijze waarop we de parameters zoals fractie volgers, gemiddelde volgtijdverdeling van de volgers geschat hebben en gaan dan onder 3.2 in op het (veel lastiger) probleem van de schatting van de varianties en correlaties van deze parameterschattingen. De resultaten van de onder 3.2 besproken analysemethode vormen waarschijnlijk het belangrijkste onderdeel van het onderzoek, omdat hierdoor inzicht verkregen wordt in de stabiliteit van de parameterschattingen.

3.1. Eerst wordt de parameter λ geschat door aan te nemen dat de verdelingsfunctie F van (alle) volgtijden zich voorbij een vast tijdstip T gedraagt als een exponentiële verdelingsfunctie. Dit geeft de gebruikelijke maximum likelihood schatting

$$(3.1) \quad \hat{\lambda} = n / \sum_{t_i \geq T} (t_i - T),$$

waarbij n het aantal volgtijden $\geq T$ is en de t_i 's de volgtijden aanduiden. In verband met de volgende afleidingen herschrijven we (3.1) op de volgende manier

$$(3.2) \quad \hat{\lambda} = (1 - F_N(T-)) / \int_{[T, \infty)} (x - T) dF_N(x),$$

waarbij $F_N(x)$ de fractie volgtijden $\leq x$ is (F_N is de *empirische verdelingsfunctie* van de waargenomen volgtijden, $F_N(T-1) = \lim_{t \uparrow T} F_N(t)$ en N het totaal aantal volgtijden is (we merken op dat $F_N(t-) \neq F_N(T)$, als er een volgtijd is met waarde T ; F_N maakt dan een sprong in T).

Wegens vergelijking (2.5) is ψ een oplossing van de vergelijking

$$(3.3) \quad H(\psi, F) = 0,$$

waarbij

$$(3.4) \quad H(\psi, F) = \psi (1 - F(T)) - (1 - \psi) \int_0^T \exp\left\{\frac{\lambda(u-T)}{\psi}\right\} dF(u).$$

De parameter ψ wordt nu geschat door de volgende vergelijking op te lossen die het steekproefequivalent is van (3.3):

$$(3.5) \quad H(\psi, F_N) = \psi (1 - F_N(T-)) - (1 - \psi) \int_{[0, T)} \exp\left\{\frac{\lambda(u-T)}{\psi}\right\} dF_N(u) = 0.$$

Hierbij nemen we $F_N(T-)$ en het interval $[0, T)$ in plaats van $F_N(T)$ en $[0, T]$, omdat we $\hat{\lambda}$ geschat hebben met behulp van alle waarnemingen $\geq T$ (en niet $> T$); dit is overigens een detail dat van weinig belang is. Uitschrijven van (3.5) geeft:

$$(3.6) \quad H(\psi, F_N) = \frac{n}{N} \psi - \frac{1-\psi}{N} \sum_{t_i < T} \exp\left\{\frac{\lambda(t_i - T)}{\psi}\right\}.$$

waarbij N weer het totaal aantal volgtijden in de steekproef aanduidt en n het aantal volgtijden $\geq T$. Het probleem om ψ te bepalen is op deze manier teruggebracht tot het bepalen van het nulpunt van een betrekkelijk eenvoudige functie. Een analoge methode is door ons toegepast om de fractie volgers te bepalen in het semi-Poisson model (gebruikmakend van de differentiaalvergelijking afgeleid in Weiss (1975)). Deze methode is eenvoudiger dan die welke in Wasiclewski (1979) wordt gehanteerd, waar twee integraalvergelijkingen simultaan moeten worden opgelost, en het statistisch gedrag van de resulterende schatting van ψ is ook gemakkelijker te analyseren.

Zij nu $\hat{\psi}$ de (grootste) oplossing van de vergelijking $H(\psi, F_N) = 0$. Dan kan deze schatting van ψ gebruikt worden om schattingen van het gemiddelde $\mu (= \mu_V)$ en de standaarddeviatie $\sigma (= \sigma_V)$ van de volgersverdeling te verkrijgen. Bij de schattingen van μ en σ maken we gebruik van vergelijking (2.4), die uit de differentiaalvergelijking voor de volgersverdeling werd afgeleid. Partiële integratie geeft de volgende relaties

$$\begin{aligned}
 \mu &= \int_0^T t g(t) dt \stackrel{(2.4)}{=} \frac{1}{\psi} \int_0^T t f(t) dt \\
 &- (\lambda/\psi^2) (1-\psi) \int_0^T t \left\{ \int_0^t \exp\left\{\frac{\lambda(u-t)}{\psi}\right\} dF(u) \right\} dt \\
 &= \frac{1}{\psi} \int_0^T t dF(t) + \frac{1-\psi}{\psi} T \int_0^T \exp\left\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\right\} dF(t) \\
 &- \left(\frac{1-\psi}{\psi}\right) \int_0^T \left\{ \int_0^t \exp\left\{\frac{\lambda(u-t)}{\psi}\right\} dF(u) \right\} dt - \frac{1-\psi}{\psi} \int_0^T t dF(t) \\
 &= \int_0^T t dF(t) + \frac{1-\psi}{\psi} T \int_0^T \exp\left\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\right\} dF(t) - \left(\frac{1-\psi}{\lambda}\right) \int_0^T dF(t) = \\
 &= \int_0^T t dF(t) + \frac{1-\psi}{\lambda\psi} \{\lambda T + \psi\} \int_0^T \exp\left\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\right\} dF(t) - \left(\frac{1-\psi}{\lambda}\right) F(T).
 \end{aligned}$$

We kunnen dus als schatting voor μ nemen:

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad \hat{\mu} &= \int_{[0,T)} t dF_N(t) + (1-\hat{\psi}) \left(\frac{\hat{\lambda}T+\hat{\psi}}{\hat{\lambda}\hat{\psi}} \right) \int_{[0,T)} \exp\left\{ \frac{\hat{\lambda}(t-T)}{\hat{\psi}} \right\} dF_N \\
 &- ((1-\hat{\psi})/\hat{\lambda}) F_N(T) = \sum_{t_i < T} t_i + \frac{N-n}{N} \frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\lambda}} + \\
 &+ (1-\hat{\psi}) \frac{\hat{\lambda}T+\hat{\psi}}{\hat{\lambda}\hat{\psi}} \sum_{t_i < T} \exp\left\{ \frac{\hat{\lambda}(t_i-T)}{\hat{\psi}} \right\},
 \end{aligned}$$

waarbij gesommeerd wordt over alle volgtijden $t_i < T$.

Op soortgelijke wijze wordt een schatting van σ^2 verkregen. Ten eerste kunnen we weer door partiële integratie de volgende relatie afleiden

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \int_0^T t^2 g(t) dt - \mu^2 = \frac{1}{\psi} \int_0^T t^2 f(t) dt \\
 &- \frac{\lambda}{\psi^2} (1-\psi) \int_0^T t^2 \int_0^t \left\{ \exp\left\{ \frac{\lambda(u-t)}{\psi} \right\} dF(u) \right\} dt - \mu^2 \\
 &= \int_0^T t^2 dF(t) + \left(\frac{1-\psi}{\psi} \right) T^2 \int_0^T \exp\left\{ \frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right\} dF(t) \\
 &+ 2 \left(\frac{1-\psi}{\psi} \right) \{ \lambda T + \psi \} \int_0^T \exp\left\{ \frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right\} dF(t) \\
 &- \frac{2\psi(1-\psi)}{\lambda^2} F(T) - 2 \left(\frac{1-\psi}{\lambda} \right) \int_0^T t dF(t) - \mu^2.
 \end{aligned}$$

(Kortheidshalve laten we hier de tussenstappen in de afleiding weg.)

We kunnen dus als schatting voor σ^2 nemen

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{t_i < T} t_i^2 + \frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\psi}} \frac{T^2}{N} \sum_{t_i < T} \exp\left\{ \frac{\hat{\lambda}(t_i-T)}{\hat{\psi}} \right\} \\
 &+ \frac{2}{N} \frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\lambda}^2} (\hat{\lambda}T + \hat{\psi}) \sum_{t_i < T} \exp\left\{ \frac{\hat{\lambda}(t_i-T)}{\hat{\psi}} \right\} \\
 &- \frac{2}{N} (N-n) \hat{\psi} (1-\hat{\psi}) - \frac{2}{N} \left(\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\lambda}} \right) \sum_{t_i < T} t_i - \hat{\mu}^2.
 \end{aligned}$$

3.2. We zullen nu de schatting van varianties en correlaties van de parameters bespreken. Hierbij zullen we voortdurend gebruikmaken van *Gâteaux-afgeleides* en een tamelijk algemene versie van de *impliciete functiestelling* (die nodig is omdat de parameter ψ geschat wordt door een vergelijking op te lossen). Deze technieken stellen ons in staat om de asymptotische varianties en correlaties van de parameterschattingen te bepalen, d.w.z. zij geven ons schattingen van de varianties en correlaties die gebruikt kunnen worden bij grote steekproefomvang.

Ter inleiding merken we op dat we in het geval van een *eindig* aantal parameters ook schattingen verkrijgen van de varianties en correlaties door bepaalde afgeleiden te berekenen; op deze wijze zijn schattingen verkregen van de varianties en correlaties van de parameterschattingen in Branston's convolutiemodel met *lognormale volgersverdeling* (zie bijlage 2). Het hier beschouwde geval is echter essentieel moeilijker, omdat we in feite te maken hebben met oneindig veel parameters, als we het type van de volgersverdeling niet specificeren met behulp van een eindig aantal parameters. Toch kunnen we een analoge techniek toepassen, waarbij echter de afgeleides genomen worden naar *functies* in plaats van scalair en tevens een algemenere versie van de impliciete functiestelling gebruikt moet worden.

De *Gâteaux afgeleide van een functie van verdelingsfuncties* wordt als volgt gedefinieerd. Stel E is een convexe verzameling van verdelingsfuncties die alle discrete verdelingsfuncties met eindig veel sprongen bevat. Dan wordt de *Gâteaux afgeleide in F van een functie $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$, in de richting van G* , gedefinieerd door

$$(3.9) \quad \rho'(F)_0(G-F) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ \rho(F + \varepsilon(G-F)) - \rho(F) \},$$

indien deze limiet bestaat. De notatie $\rho'(F)_0(G-F)$ duidt aan dat de "afgeleide" $\rho'(F)$ lineair werkt op $G-F$. Als voorbeeld berekenen we nu de afgeleide van de functie $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$(3.10) \quad \rho(G) = (1-G(T-)) / \int_{[T, \infty)} (x-T) dG(x),$$

waarbij we voor E de convexe verzameling verdelingsfuncties G nemen met eindig eerste absolute moment en voldoende aan $G(T) < 1$ (zodat $\int_{[T, \infty)} (x-T) dG(x) > 0$). Nu is $\rho(F_N) = \hat{\lambda}$ (zie (3.2)) en de berekening van de *Gâteaux afgeleide* zal ons een schatting van de variantie van $\hat{\lambda}$

geven.

We kunnen schrijven:

$$(3.11) \quad \rho(G) = 1/\eta(G) ,$$

waarbij

$$(3.12) \quad \eta(G) = (1-G(T-))^{-1} \int_{[T, \infty)} (x-T) dG(x) .$$

Met behulp van de kettingregel voor het differentiëren krijgen we

$$(3.13) \quad \rho'(F) \cdot (G-F) = - (\eta(F))^{-2} \eta'(F) \cdot (G-F) .$$

Toepassing van definitie (3.9) geeft:

$$\begin{aligned} \eta'(F) \cdot (G-F) &= \frac{G(T-) - F(T-)}{(1 - F(T-))^2} \int_{[T, \infty)} (x-T) dF(x) \\ &+ \frac{1}{1 - F(T-)} \int_{[T, \infty)} (x-T) d(G-F)(x) . \end{aligned}$$

Dus als we aannemen dat F een dichtheid heeft, die zich boven T gedraagt als een exponentiële dichtheid met parameter λ , krijgen we

$$\eta(F) = \frac{1}{\lambda} \text{ en}$$

$$\begin{aligned} (3.14) \quad \psi'(F) \cdot (F_N - F) &= -\lambda^2 \eta'(F) \cdot (F_N - F) = \\ &= - \frac{\lambda}{1-F(T)} (F_N(T-) - F(T)) \\ &- \frac{\lambda^2}{1-F(T)} \int_{[T, \infty)} (x-T) d(F_N - F)(x) \end{aligned}$$

($F(T) = F(T-)$, omdat F continu is). We kunnen nu $\rho'(F) \cdot (F_N - F)$ zien als een lineaire approximatie voor het verschil $\hat{\lambda} - \lambda = \rho(F_N) - \rho(F)$ en de asymptotische variantie van $\hat{\lambda}$ is gelijk aan de asymptotische variantie van $\rho'(F) \cdot (F_N - F)$ (het bewijs van deze bewering wordt gegeven in de appendix). De variantie van $\rho'(F) \cdot (F_N - F)$ berekenen we op de volgende manier.

Zij $\rho_1(x) = 1_{[T, \infty)}(x) (x-T)$ en $\rho_2(x) = 1_{[0, T)}(x)$. Dan hebben we voor een willekeurige waarneming X , met onderliggende verdeling F , de volgende relaties

$$\text{Var}(\rho_1(X)) = \int_T^{\infty} (x-T)^2 dF(x) - \left(\int_T^{\infty} (x-T) dF(x) \right)^2$$

$$(3.15) \quad \text{Var}(\rho_2(X)) = F(T) (1-F(T))$$

$$\text{Covar}(\rho_1(X), \rho_2(X)) = - \int_0^T dF(x) \int_T^{\infty} (x-T) dF(x) .$$

Dus als $X_1, \dots, X_N$ N onafhankelijke waarnemingen zijn, elk met verdelingsfunctie F , en als F_N de bijbehorende empirische verdelingsfunctie is, hebben we wegens (3.14) en (3.15):

$$\begin{aligned} \text{Var}(\rho'(F) \cdot (F_N - F)) &= \\ &= \text{Var}\left(\frac{\lambda}{N(1-F(T))} \sum_{i=1}^N \rho_2(X_i) - \frac{\lambda^2}{N(1-F(T))} \sum_{i=1}^N \rho_1(X_i)\right) \\ &= \frac{\lambda_1}{N(1-F(T))^2} F(T) (1-F(T)) + \\ &+ \frac{\lambda^4}{N(1-F(T))^2} \left\{ \int_T^{\infty} (x-T)^2 dF(x) - \left(\int_T^{\infty} (x-T) dF(x) \right)^2 \right\} \\ &- \frac{2\lambda^3}{N(1-F(T))^2} F(T) \int_T^{\infty} (x-T) dF(x) \\ &= \frac{\lambda^2 F(T)}{N(1-F(T))} + \frac{\lambda^4}{N(1-F(T))} \int_T^{\infty} (x-T)^2 \frac{dF(x)}{1-F(T)} \\ &- \frac{\lambda^4}{N} \left(\int_T^{\infty} (x-T) \frac{dF(x)}{1-F(T)} \right)^2 \\ &- \frac{2\lambda^3}{N(1-F(T))} F(T) \int_T^{\infty} (x-T) \frac{dF(x)}{1-F(T)} \\ &= \frac{\lambda^2 F(T)}{N(1-F(T))} + \frac{2\lambda^2}{N(1-F(T))} \\ &- \frac{\lambda^2}{N} - \frac{2 F(T) \lambda^2}{N(1-F(T))} = \frac{\lambda^2}{N(1-F(T))} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \text{Var}(\rho'(F) \cdot (F_N - F)) = \frac{\lambda^2}{N(1-F(T))}$$

en dit is tevens de asymptotische variantie van $\hat{\lambda}$. Als schatting van de variantie van $\hat{\lambda}$ kunnen we dus nemen

$$(3.16) \quad \text{var}(\hat{\lambda}) = \hat{\lambda}^2/n = \frac{\hat{\lambda}^2}{N(1-F_N(T-))}$$

Voor het schatten van de variantie van $\hat{\psi}$ gebruiken we de impliciete functiestelling. De parameter ψ voldoet aan de vergelijking

$$H(\psi, F) = \psi(1-F(T)) - (1-\psi) \int_0^T \exp\left\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\right\} dF(t) = 0$$

(zie (3.3) en (3.4)). Om een schatting van de variantie van $\hat{\psi}$ te krijgen, moeten we de Gâteaux afgeleide $\psi'(F)$. $(F_N - F)$ berekenen. Nu is voor onbekende verdelingsfunctie G impliciet gegeven als oplossing van de vergelijking $H(\psi, G) = H(\psi(G), G) = 0$. Wegens de impliciete functiestelling geldt nu

$$(3.17) \quad \psi'(F) \cdot (G-F) = - \left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\right)^{-1} H'_F(\psi, F) \cdot (G-F),$$

waarbij de notatie $H'_F(\psi, F)$ aanduidt dat we de partiële afgeleide nemen met betrekking tot het tweede argument van de functie H en waarbij de afgeleides geëvalueerd worden in het punt $(\psi, F) = (\psi(F), F)$, waarbij $\psi = \psi(F)$ de fractie volgers in de onderliggende verdeling F is. Door middel van soortgelijke berekeningen als boven uitgevoerd voor $\lambda'(F)$ vinden we

$$\begin{aligned} (3.18) \quad H'_F(\psi, F) \cdot (F_N - F) &= \\ &= -(F_N(T-) - F(T))\psi - (1-\psi) \int_{[0, T)} \exp\left\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\right\} d(F_N - F) \\ &+ (1-\psi) \int_0^T \left(\frac{T-t}{\psi}\right) \exp\left\{\frac{-\lambda(t-T)}{\psi}\right\} dF(t) \cdot \lambda'(F) \cdot (F_N - F) \end{aligned}$$

Verder geldt:

$$\begin{aligned} (3.19) \quad H'_\psi(\psi, F) &= 1-F(T) + \int_0^T \exp\left\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\right\} dF(t) \\ &- \frac{1-\psi}{\psi^2} \int_0^T \lambda(T-t) \exp\left\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\right\} dF(t) \end{aligned}$$

Na enig rekenwerk vinden we nu met behulp van (3.17), (3.18) en (3.19):

$$\begin{aligned}
(3.20) \quad \text{Var}(\psi' (F) \cdot (F_N - F)) &= \\
&= \frac{1}{N} C^{-2} \{ \psi^2 F(T) (1-F(T)) + \\
&+ (1-\psi)^2 \left(\int_0^T \exp\left\{ \frac{2\lambda(t-T)}{\psi} \right\} dF(t) \right. \\
&- \left. \left(\int_0^T \exp\left(\frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right) dF(t) \right)^2 \right) + \\
&+ (1-\psi)^2 \left(\int_0^T \left(\frac{T-t}{\psi} \right) \exp\left\{ \frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right\} dF(t) \right)^2 \cdot \\
&N \text{Var}(\lambda) + 2\psi(1-\psi) (1-F(T)) \int_0^T \exp\left\{ \frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right\} dF \}
\end{aligned}$$

waarbij C gegeven wordt door de rechterzijde van (3.19). We kunnen de variantie van ψ dus schatten door in (3.20) overal de steekproef-equivalenten van F , ψ en λ te substitueren (dus F_N , $\hat{\psi}$ en $\hat{\lambda}$). Dit geeft

$$\begin{aligned}
\hat{\text{Var}}(\hat{\psi}) &= N^{-1} D_1^{-2} \left\{ \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N} \right) \hat{\psi}^2 + \right. \\
&+ (1-\hat{\psi})^2 (C_3 - C_1^2) + N C_2^2 \left(\frac{1-\psi}{\psi} \right)^2 \hat{\text{Var}}(\hat{\lambda}) \\
&+ 2 \hat{\psi} (1-\hat{\psi}) \frac{n}{N} C_1 \left. \right\},
\end{aligned}$$

waarbij

$$\begin{aligned}
C_1 &= N^{-1} \sum_{t_i < T} \exp\left\{ \frac{\hat{\lambda}(t_i - T)}{\hat{\psi}} \right\} \\
C_2 &= N^{-1} \sum_{t_i < T} (T - t_i) \exp\{\hat{\lambda}(t_i - T)/\hat{\psi}\} \\
C_3 &= N^{-1} \sum_{t_i < T} \exp\{2\hat{\lambda}(t_i - T)/\hat{\psi}\} \\
D_1 &= n/N + C_1 - ((1-\hat{\psi})/\hat{\psi}^2) \hat{\lambda} C_2.
\end{aligned}$$

De varianties van $\hat{\mu}_V$ en $\hat{\delta}_V$ zijn geschat met behulp van dezelfde methode. Ook de covarianties en correlaties tussen de parameters zijn op deze wijze geschat. Steeds is de methode: vervang twee parameterschattingen $\hat{\theta}_1$ en $\hat{\theta}_2$

door hun lineaire approximaties $\theta_1^t(F) \cdot (F_N - F)$ en $\theta_2^t(F) \cdot (F_N - F)$ en bereken de covarianties van deze lineaire approximaties. Voor de volledige resultaten verwijzen we naar de appendix.

4. Vergelijking met andere methodes

In ons voor-onderzoek gaf Branston's convolutiemodel met lognormale volgersverdeling de beste aanpassing. We hadden toen echter het convolutiemodel met niet gespecificeerde volgersverdeling nog niet ontwikkeld en ook het semi-Poisson model werd alleen bekeken met een volgersverdeling van een bepaald parametrisch type (zoals gamma of lognormaal).

Het convolutiemodel met lognormale volgersverdeling vertoont de volgende nadelen.

- 1) De aanname dat de volgersverdeling lognormaal is nogal willekeurig en heeft geen probabilistische achtergrond (zoals bijv. de aanname dat de staartverdeling exponentieel is *wel* een probabilistische achtergrond heeft: de veronderstelling dat we te maken hebben met een (verstoorde) Poisson proces).
- 2) De uitkomsten zijn tamelijk afhankelijk van de klasse-indeling; bij fijnere klasse-indelingen lukt de analyse vaak helemaal niet en dit wordt voornamelijk veroorzaakt door het feit dat de lognormale verdeling dan niet goed meer door de volgersverdeling gelegd kan worden. Aan de andere kant ligt het juist voor de hand om bij de volgtijden van bijv. 0.3 tot 4 seconden een fijnere klasse-indeling te maken dan klassen van een halve seconde, omdat (vooral links) in dit interval de meeste waarnemingen liggen.
- 3) De berekeningen kosten veel machinetijd, omdat bij elke analyse numerieke integralen moeten worden uitgerekend en dit bovendien nog iteratief geschiedt (tot de beste aanpassing is bereikt). De analyses kosten 10 tot 100 keer zoveel machinetijd als de door ons ontwikkelde half parametrische versies van het convolutiemodel en het semi-Poisson model.

Daarom is tenslotte voor de totale analyses een methode gebruikt waarbij de volgersverdeling vrij wordt gelaten (het convolutiemodel met niet gespecificeerde volgersverdeling). We hebben echter ook nog het semi-Poisson model

met niet gespecificeerde volgersverdeling verder ontwikkeld, waarbij we zijn afgeweken van de in Wasielewski (1979) gehanteerde methodes. We zullen dit hier nu kort bespreken.

Weiss (1975) heeft al opgemerkt dat in het convolutiemodel met vrijgelaten volgersverdeling de parameter ψ die de fractie volgers aangeeft voldoet aan de vergelijking

$$(4.1) \quad \int_0^T \exp\left(-\frac{A}{\psi} e^{-\lambda x}\right) f(x) dx - \psi \exp\left(-\frac{A}{\psi} e^{-\lambda T}\right) = 0,$$

waarbij $A = (1-F(T)) \exp(\lambda T)$, f de dichtheid van de totale volgtijdverdeling is en T een tijd zodat de dichtheid $g(t)$ van de volgersverdeling nul is voor $t \geq T$ (in feite staat dit niet expliciet in Weiss (1975), maar het is gemakkelijk uit zijn vergelijkingen af te leiden).

In Wasielewski (1979) wordt ψ bepaald door een integraalvergelijking in *dichtheden* op te lossen, tegelijk met de bepaling van ψ (zie Wasielewski (1979), p. 53,54). Deze methode kan echter geheel vermeden worden door eerst ψ op te lossen uit de vergelijking

$$(4.2) \quad H(\psi, F_N) = \int_{[0, T)} \exp\left(-\frac{\hat{A}}{\psi} e^{-\hat{\lambda} x}\right) dF_N(x) - \psi \exp\left(-\frac{\hat{A}}{\psi} e^{-\hat{\lambda} T}\right) = 0,$$

waarbij $\hat{\lambda} = n / \sum_{t_i \geq T} (t_i - T)$, $\hat{A} = (n/N) \exp(\hat{\lambda} T)$, F_N de empirische verdelingsfunctie en n het aantal waarnemingen $\geq T$ is ($\hat{\lambda}$ is dus hetzelfde als in het convolutiemodel met niet gespecificeerde volgersverdeling). Vervolgens kunnen momenten van de volgersverdeling geschat worden door gebruik te maken van de in Weiss (1975) afgeleide differentiaalvergelijking. De (asymptotische) varianties en covarianties van de schattingen bepalen we weer door Gâteaux afgeleides te berekenen en gebruik te maken van de impliciete functiestelling (zie de appendix).

Een vergelijking van resultaten van genoemde drie methodes bij gegevens van de linkerrijstrook wordt gegeven in tabel 1. Hierin is te zien dat het kwalitatieve beeld dat de drie methodes geven hetzelfde is en dat vooral de resultaten van de twee semi-parametrische modellen een opmerkelijke overeenkomst vertonen. Op de rechterrijstrook is deze overeenstemming er echter helemaal niet, maar in dat geval krijgen we ook meestal grote waarden voor de geschatte varianties van de parameterschattingen (d.w.z. de parameterschattingen zijn hier zeer instabiel).

In Wasielewski (1979) worden varianties van de parameterschattingen geschat door 15 maal een steekproef met teruglegging uit de oorspronkelijke steekproef te doen (waarbij de grootte van de "gerepliceerde" steekproef steeds gelijk genomen wordt aan die van de oorspronkelijke steekproef; zie Wasielewski (1979), p. 45) en door telkens de parameterschattingen opnieuw te berekenen ("bootstrapping"). Tevens berekent hij numeriek bepaalde afgeleiden. Bij de door ons gehanteerde techniek is deze procedure in het geheel niet nodig, omdat we met behulp van de Gâteaux afgeleides en de impliciete functiestelling expliciete uitdrukkingen voor de asymptotische varianties verkregen hebben, die waarschijnlijk bovendien nauwkeuriger schattingen van de varianties geven (15 keer repliceren lijkt ons veel te weinig om goede schattingen te krijgen). Overigens zijn de schattingen van de varianties van dezelfde orde van grootte in de door ons gehanteerde methode en de door Wasielewski gehanteerde methode.

Een samenvattende analyse van alle data is tenslotte uitgevoerd met het convolutiemodel met niet gespecificeerde volgersverdeling, omdat deze methode wiskundig en ook programmeertechisch het best te behandelen is en bovendien consistente resultaten oplevert. Het is echter geruststellend dat op de linkerrijstrook het semi-Poisson model dezelfde schatting van de fractie volgers geeft, wat erop wijst dat beide methodes de groepsstructuur op de linkerrijstrook goed detecteren.

5. Samenvatting en conclusies.

Doel van het onderzoek was om een theoretische verdeling te vinden die een goede aanpassing geeft voor de volgtijden op linker- resp. rechterrijstrook van een 2x2 snelweg. Bij de toetsing van hypothesen dat een steekproef van volgtijden uit een bepaalde theoretische verdeling komt, wordt er van uitgegaan dat de volgtijden in de steekproef (althans bij benadering) als onafhankelijk beschouwd mogen worden. Empirisch onderzoek heeft aangetoond *dat deze aanname inderdaad gemaakt mag worden* (zie Breiman (1969)), *in tegenstelling tot wat men hierover a priori geneigd zou zijn aan te nemen* (Breiman zegt hierover: "Another commonly accepted belief in the field has been that successive time headways are strongly dependent in heavy flow and have a sizable negative correlation. We have investigated this for a wide range of concentrations and have found the surprising but gratifyingly simple result that the sequence of time headways for cars in the same lane are independent").

In een voetnoot merkt hij op dat er alleen bij hoge intensiteiten soms afhankelijkheid lijkt te ontstaan). Deze aanname van onafhankelijkheid moet gemaakt worden bij de gebruikelijke "goodness of fit" toetsen en is dus blijkbaar niet zo onrealistisch.

In het vooronderzoek werden chi-kwadraat toetsen op aanpassing uitgevoerd, waarbij de volgtijden ingedeeld werden in 31 klassen, waarbij één klasse de volgtijden > 15 seconden bevatte en de overige volgtijden in klassen van volgtijden vallend in een interval van een halve seconde werden ingedeeld (dus $0 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - 1$, $1 - 1\frac{1}{2}$ enz.). Hierbij bleek dat de enige "standaard"-verdeling die een enigszins redelijke aanpassing gaf de 3-parameter lognormale verdeling was, maar dat deze aanpassing alleen redelijk was op de *rechterrijstrook* en niet op de linkerrijstrook. Ook werd de aanpassing aan *mengsels* van verdelingen zoals een gamma en exponentiële of gamma's met verschillende parameters onderzocht; deze gaven geen bevredigende aanpassing en hadden de bijkomende onaangename eigenschap dat zij "bobbels" midden in de resulterende dichtheidsfunctie vertoonden die bij de waargenomen verdelingen in het algemeen niet voorkwamen.

Aangezien echter de staart van de verdelingen steeds duidelijk exponentieel was, lag het voor de hand om te zoeken naar een verdeling die de vorm heeft van een exponentiële verdeling boven een bepaalde waarde T en beneden T gesplitst wordt in twee (of meer) verdelingen waarbij één van de verdelingen in deze decompositie een dichtheid heeft van de vorm $\alpha(t) \exp(-\lambda t)$, waarbij $\alpha(t)$ monotoon naar nul gaat als $t \rightarrow 0$. Twee modellen die deze ontbinding geven zijn het semi-Poisson model van Buckley (zie Buckley ('68) en Wasielewski ('79)) en het convolutiemodel of "generalized queueing model" van Branston (zie Branston ('76)). In beide modellen wordt de volgtijdverdeling van volgtijden $< T$ gesplitst in een verdeling van volgtijden van "vrije rijders" de zg. "leidersverdeling" en een verdeling van volgtijden van "gebonden rijders" de zg. "volgersverdeling", maar het mechanisme waarmee deze splitsing tot stand komt is verschillend voor de twee modellen.

In het vooronderzoek is de aanpassing van het semi-Poisson model en het convolutiemodel met een van te voren gespecificeerd parametrisch type volgersverdeling (zoals een gamma- of lognormale verdeling) onderzocht. Hierbij bleek het convolutiemodel met een lognormale volgersverdeling de beste aanpassing te geven. In ons hoofdonderzoek bleek echter dat de uitkomsten nogal afhankelijk waren van de klasse-indeling. Bovendien bleek dat de (geschatte) varianties van de parameterschattingen op de rechter-

rijstrook in het algemeen zeer groot waren en dat de informatiematrix die voor het berekenen van deze schattingen geïnventeerd moest worden vaak niet positief definitief was, wat impliceert dat het "goodness of fit" probleem geen stabiele oplossing had bij deze methode.

Om te onderzoeken of de teleurstellende resultaten in het begin van het hoofdonderzoek mogelijk aan de arbitraire keuze van de lognormale verdeling als volgersverdeling te wijten waren, is in het vervolgonderzoek een semi-parametrische versie van Branston's convolutiemodel ontwikkeld waarbij geen parametrische aannames over de volgersverdeling gedaan worden. *Dit leverde echter op de rechterrijstrook geen verbetering van de resultaten op en we moeten concluderen dat het model op de rechterrijstrook niet voldoet.* Ook is een semi-parametrische versie van het semi-Poisson model onderzocht (analoog aan de methode gevolgd in Wasielewski (1979)) en hiervoor geldt dezelfde conclusie. *Voor de rechterrijstrook lijkt dus voorlopig de 3-parameter lognormale verdeling de meest aangewezen verdeling om aan te passen aan de gevonden volgtijdverdeling.* (uit overwegingen van eenvoud). We weten echter dat deze verdeling op de linkerrijstrook nu juist een bijzonder slechte aanpassing geeft en daarom is de linkerrijstrook verder geanalyseerd met één van de semi-parametrische modellen: het convolutie-model met niet gespecificeerde volgersverdeling. Dit model is gekozen uit overwegingen van eenvoud, snelheid van convergentie van het computerprogramma en stabiliteit van de parameterschattingen. Tevens worden de moeilijkheden met de klasse-indelingen die er waren bij het parametrische model vermeden.

Een overzicht van de resultaten wordt gegeven in de bijgevoegde tabellen. Ten eerste moeten we hierbij opmerken dat de donker-licht factor geen duidelijke invloed had op de resultaten en dat de intensiteit van het verkeer de belangrijkste bron van variabiliteit lijkt te zijn.

Uit de schattingen van de standaarddeviaties van de parameters $\hat{\lambda}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\mu}_V$ en $\hat{\sigma}_V$ blijkt dat de schattingen redelijk stabiel zijn behalve bij de (hoge) intensiteiten 2222 en 2395 waarbij er te weinig waarnemingen in de staart van de verdeling waren (resp. 23 en 11) om λ nauwkeurig te schatten. Dit verschijnsel doet zich overigens niet zo sterk voor in het enige andere geval van een gering aantal waarnemingen in de staart (16 waarnemingen bij een intensiteit van 2649), wat betekent dat in dit geval ook zeer grote volgtijden onder de waarnemingen in de staart voorkwamen; waardoor een nauwkeuriger schatting van λ mogelijk was.

Zoals te verwachten valt, is er een hoge positieve correlatie tussen de intensiteit en de fractie volgers ($r = .88$ in deze gegevens) en een hoge negatieve correlatie tussen intensiteit en gemiddelde volgtijd ($r = -.85$). Ook de gemiddelde volgtijd van de volgers lijkt wat af te nemen bij toenemende intensiteit ($r = -.24$), maar dit effect is veel minder duidelijk. Er is een tamelijk hoge correlatie tussen de intensiteit en de schatting $\hat{\lambda}$ van de parameter λ van de (exponentiële) staartverdeling wat eenvoudig zegt dat de staart van de verdeling dunner wordt bij toenemende intensiteit. Ook vallen de zeer hoge correlaties van $\hat{\mu}_T/\hat{\sigma}_T$ en $\hat{\mu}_L/\hat{\sigma}_L$ met $\hat{\lambda}$ op (beide correlaties zijn $.92$), terwijl de correlaties van $\hat{\mu}_T$ en $\hat{\mu}_L$ met $\hat{\lambda}$ negatief zijn (resp. $-.57$ en $-.78$). Dit betekent dat de spreiding van de totale verdeling en de "leidersverdeling" sneller afnemen dan de corresponderende gemiddeldes, bij het dunner worden van de staart van de verdeling.

Tenslotte komen we aan een heel belangrijk punt: *zijn er verschillen te constateren, veroorzaakt door locatie of weertype?*

- A. *Verskil in weertype.* Als we bij Driebruggen de resultaten voor nat en droog weer vergelijken, lijkt de gemiddelde volgtijd van de volgers μ_V en ook de fractie volgers hoger te zijn bij nat weer. Dit leidt tot de hypothesen. *Bij nat weer zal (althans bij de locatie Driebruggen) de gemiddelde groepsgrootte op de linkerrijstrook groter zijn dan bij droog weer. Tevens zullen de volgtijden binnen een groep hoger zijn bij nat weer.*

Bij Zoetermeer zijn niet genoeg gegevens beschikbaar om een vergelijking tussen nat en droog weer te maken, hoewel het wel weer suggestief is, dat de grootste $\hat{\mu}_V$ ($\hat{\mu}_V = 1.53$) gevonden werd bij nat weer bij Zoetermeer, richting Den Haag.

Het effect van mist is bij deze gegevens nog niet duidelijk. Hierover zouden meer gegevens verzameld moeten worden.

- B. *Verskil in locatie.* Bij vergelijkbare intensiteiten is er een duidelijk verschil tussen Driebruggen en Zoetermeer wat betreft de fractie volgers ψ , de gemiddelde volgtijd van de "leiders" μ_L en de totale standaardafwijking van de volgtijdverdeling σ_T : ψ , μ_L en σ_T lijken alle hoger

te zijn bij Driebruggen. Als we bedenken dat μ_L een maat is voor de "gaten tussen de groepen", lijkt het volgende kwalitatieve beeld te ontstaan: *bij Driebruggen zijn de groepen op de linkerrijstrook gemiddeld groter en tevens zijn de gaten tussen de groepen gemiddeld groter dan bij Zoetermeer.*

Er zijn nog onvoldoende gegevens beschikbaar om iets te kunnen zeggen over mogelijke invloeden van de factor donker-licht.

Lijst van symbolen

λ	parameter van de staartverdeling (aangenomen wordt dat de staart dichtheid van de volgtijdverdeling van de vorm $A e^{-\lambda t}$ is, voor een zekere constante A).
ψ	fractie volgers
μ_V	gemiddelde volgtijd van de volgersverdeling
μ_L	gemiddelde volgtijd van de leidersverdeling
μ_T	gemiddelde volgtijd van de totale volgtijdverdeling
σ_V	standaardafwijking van de volgersverdeling
σ_L	standaardafwijking van de leidersverdeling
σ_T	standaardafwijking van de totale volgtijdverdeling.

Bij een parameterschatting $\hat{\theta}$ van een parameter θ duidt $\hat{\sigma}(\hat{\theta})$ de geschatte asymptotische standaardafwijking van de parameterschatting $\hat{\theta}$ aan.

I	intensiteit van het verkeer op één rijstrook (aantal voertuigen per uur)
T	volgtijd waarboven geen volgtijden van "volgers" worden geacht voor te komen. Op de linkerrijstrook werd steeds $T = 4$ aangehouden.
N	totaal aantal waarnemingen
n	aantal waargenomen volgtijden $\geq T$ seconden.

Tabel 1

Convolutiemodel met lognormale volgersverdeling. Linkerrijstrook.
Locatie Driebruggen

I	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}(\hat{\lambda})$	$\hat{\psi}$	$\hat{\sigma}(\hat{\psi})$	$\hat{\mu}_V$	$\hat{\sigma}_V$
660	.13	.007	.47	.022	1.20	.61
840	.13	.008	.58	.022	1.20	.65
1050	.19	.014	.55	.032	1.04	.49
1270	.24	.015	.52	.029	0.96	.42
1510	.26	.013	.63	.020	1.03	.46
1700	.24	.015	.74	.017	1.11	.52
1950	.26	.013	.78	.012	1.05	.47

Convolutiemodel met niet gespecificeerde volgersverdeling. Zelfde data, T = 4.

I	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}(\hat{\lambda})$	$\hat{\psi}$	$\hat{\sigma}(\hat{\psi})$	$\hat{\mu}_V$	$\hat{\sigma}_V$
660	.12	.005	.52	.021	1.28	.71
840	.13	.007	.59	.023	1.18	.61
1050	.17	.014	.60	.036	1.12	.62
1270	.23	.017	.61	.038	1.12	.64
1510	.25	.015	.67	.026	1.08	.56
1700	.22	.016	.80	.017	1.18	.63
1950	.25	.014	.81	.014	1.09	.54

Semi-Poisson model met niet gespecificeerde volgersverdeling. Zelfde data, T = 4.

I	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}(\hat{\lambda})$	$\hat{\psi}$	$\hat{\sigma}(\hat{\psi})$	$\hat{\mu}_V$	$\hat{\sigma}_V$
660	.12	.005	.51	.021	1.29	.73
840	.13	.007	.59	.023	1.20	.64
1050	.17	.014	.60	.036	1.13	.65
1270	.23	.017	.60	.038	1.12	.66
1510	.25	.015	.67	.025	1.09	.58
1700	.22	.016	.79	.018	1.19	.65
1950	.25	.014	.81	.014	1.10	.57

Tabel 2

Uitkomsten, gerangschikt naar intensiteit.

Alle gegevens hebben betrekking op de *linkerrijstrook*

No.	I	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}(\hat{\lambda})$	$\hat{\psi}$	$\hat{\sigma}(\hat{\psi})$	$\hat{\mu}_V$	$\hat{\sigma}(\hat{\mu}_V)$	$\hat{\sigma}_V$	$\hat{\sigma}(\hat{\sigma}_V)$
1	408	.199	.025	.47	.088	1.17	.209	.58	.290
2	620	.132	.008	.42	.033	1.39	.090	.84	.074
3	660	.117	.005	.52	.021	1.28	.048	.71	.052
4	668	.147	.008	.38	.037	1.19	.110	.64	.136
5	727	.141	.005	.49	.019	1.36	.046	.77	.044
6	822	.155	.008	.51	.028	1.21	.066	.72	.073
7	840	.132	.007	.58	.023	1.18	.046	.61	.061
8	855	.142	.012	.63	.032	1.47	.062	.78	.054
9	864	.139	.011	.60	.031	1.28	.063	.73	.067
10	867	.173	.011	.55	.030	1.53	.063	.81	.051
11	878	.151	.007	.59	.020	1.38	.038	.66	.042
12	945	.177	.015	.58	.036	1.46	.076	.92	.052
13	951	.168	.012	.56	.035	1.20	.074	.66	.090
14	999	.204	.007	.52	.021	1.25	.045	.73	.046
15	1034	.190	.023	.62	.048	1.49	.093	.83	.071
16	1050	.172	.014	.60	.036	1.12	.072	.63	.099
17	1085	.218	.014	.55	.034	1.27	.071	.82	.062
18	1161	.203	.017	.62	.037	1.22	.069	.62	.086
19	1183	.185	.020	.71	.032	1.49	.054	.68	.056
20	1206	.233	.019	.61	.040	1.28	.073	.60	.093
21	1228	.177	.014	.69	.028	1.16	.049	.54	.073
22	1252	.187	.016	.70	.029	1.23	.050	.64	.063
23	1270	.229	.017	.61	.038	1.12	.073	.64	.092
24	1289	.282	.019	.59	.039	1.32	.070	.79	.060
25	1299	.193	.018	.70	.031	1.23	.055	.68	.063
26	1343	.236	.016	.63	.033	1.11	.061	.60	.083
27	1354	.299	.028	.53	.077	1.10	.149	.56	.207
28	1372	.315	.028	.56	.067	1.21	.120	.59	.148
29	1433	.297	.022	.62	.041	1.22	.069	.75	.066
30	1510	.251	.015	.67	.026	1.08	.044	.56	.065
31	1514	.223	.016	.75	.022	1.23	.034	.52	.050
32	1545	.353	.025	.69	.032	1.45	.046	.67	.044

No.	I	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}(\lambda)$	$\hat{\psi}$	$\hat{\sigma}(\hat{\psi})$	$\hat{\mu}_V$	$\hat{\sigma}(\hat{\mu}_V)$	$\hat{\sigma}_V$	$\hat{\sigma}(\hat{\sigma}_V)$
33	1556	.202	.017	.79	.020	1.29	.032	.62	.039
34	1642	.256	.022	.73	.030	1.12	.049	.60	.067
35	1667	.224	.018	.78	.020	1.20	.032	.58	.043
36	1693	.199	.015	.85	.013	1.37	.022	.67	.023
37	1700	.217	.016	.80	.017	1.18	.028	.63	.035
38	1785	.360	.042	.65	.075	1.05	.118	.44	.213
39	1850	.309	.027	.81	.022	1.40	.032	.67	.032
40	1863	.282	.034	.76	.040	1.08	.060	.41	.120
41	1891	.462	.040	.66	.064	1.16	.088	.50	.124
42	1904	.269	.021	.77	.024	1.05	.036	.45	.066
43	1923	.298	.039	.79	.038	1.17	.055	.60	.070
44	1929	.375	.040	.68	.063	1.01	.095	.44	.172
45	1950	.249	.014	.81	.014	1.09	.021	.54	.031
46	2102	.437	.061	.82	.040	1.30	.049	.62	.053
47	2162	.303	.042	.87	.024	1.23	.035	.63	.042
48	2222	.914	.191	.84	.089	1.45	.067	.52	.067
49	2395	1.057	.319	.85	.135	1.37	.092	.55	.081
50	2448	.518	.042	.79	.038	1.06	.044	.41	.080
51	2488	.453	.033	.84	.021	1.09	.026	.49	.039
52	2649	.344	.086	.97	.010	1.42	.020	.60	.021

No.	I	$\hat{\mu}_T$	$\hat{\mu}_V$	$\hat{\mu}_L$	$\hat{\mu}_T/\hat{\sigma}_T$	$\hat{\mu}_V/\hat{\sigma}_V$	$\hat{\mu}_L/\hat{\sigma}_L$	$\hat{\sigma}_T$
1	408	3.85	1.17	6.20	.86	2.01	1.23	4.48
2	620	5.82	1.39	8.96	.84	1.66	1.18	6.93
3	660	5.43	1.28	9.84	.74	1.81	1.15	7.37
4	668	5.38	1.19	8.00	.85	1.85	1.67	6.31
5	727	4.94	1.36	8.45	.80	1.76	1.18	6.21
6	822	4.38	1.21	7.64	.78	1.68	1.18	5.59
7	840	4.28	1.18	8.73	.70	1.94	1.15	6.13
8	855	4.09	1.47	8.49	.74	1.88	1.20	5.53
9	864	4.15	1.28	8.49	.71	1.74	1.17	5.81
10	867	4.15	1.53	7.32	.84	1.89	1.25	4.91
11	878	4.10	1.38	8.02	.76	2.08	1.20	5.40
12	945	3.81	1.46	7.10	.82	1.59	1.24	4.67
13	951	3.79	1.20	7.14	.77	1.82	1.19	4.95
14	999	3.60	1.25	6.14	.85	1.72	1.24	4.24
15	1034	3.47	1.49	6.75	.83	1.80	1.27	4.19
16	1050	3.43	1.21	6.94	.73	1.78	1.19	4.68
17	1085	3.32	1.27	5.86	.85	1.55	1.26	3.91
18	1161	3.09	1.22	6.15	.79	1.96	1.24	3.91
19	1183	3.03	1.49	6.90	.79	2.19	1.27	3.85
20	1206	2.97	1.28	5.56	.86	2.14	1.29	3.46
21	1228	2.93	1.16	6.80	.71	2.16	1.20	4.14
22	1252	2.84	1.23	6.58	.73	1.93	1.22	3.89
23	1270	2.82	1.12	5.49	.80	1.74	1.24	3.53
24	1289	2.78	1.32	4.87	.93	1.66	1.34	2.98
25	1299	2.77	1.23	6.40	.74	1.82	1.23	3.75
26	1343	2.67	1.11	5.35	.80	1.85	1.25	3.35
27	1354	2.66	1.10	4.45	.92	1.98	1.31	2.89
28	1372	2.61	1.21	4.38	.97	2.03	1.36	2.70
29	1433	2.51	1.23	4.59	.91	1.64	1.33	2.74
30	1510	2.38	1.08	5.06	.80	1.95	1.26	2.99
31	1514	2.37	1.23	5.72	.78	2.06	1.26	3.04
32	1545	2.33	1.45	4.28	1.08	2.17	1.47	2.16
33	1556	2.32	1.29	6.24	.75	2.07	1.25	3.08
34	1642	2.19	1.12	5.02	.80	1.89	1.27	2.75
35	1667	2.16	1.20	5.66	.76	2.07	1.26	2.82
36	1693	2.12	1.37	6.40	.78	2.06	1.26	2.73
37	1700	2.12	1.18	5.80	.74	1.87	1.24	2.86

No.	I	$\hat{\mu}_T$	$\hat{\mu}_V$	$\hat{\mu}_L$	$\hat{\mu}_T/\hat{\sigma}_{12}$	$\hat{\mu}_V/\hat{\sigma}_V$	$\hat{\mu}_L/\hat{\sigma}_L$	$\hat{\sigma}_T$
38	1785	2.01	1.05	3.83	.94	2.37	1.36	2.15
39	1850	2.03	1.40	4.64	1.00	2.08	1.40	2.03
40	1863	1.93	1.08	4.62	.83	2.62	1.30	2.34
41	1891	1.90	1.16	3.33	1.11	2.31	1.50	1.71
42	1904	1.89	1.05	4.77	.79	2.33	1.27	2.40
43	1923	1.87	1.17	4.52	.87	1.95	1.33	2.15
44	1929	1.86	1.01	3.68	.93	2.28	1.36	2.00
45	1950	1.84	1.09	5.10	.77	2.00	1.26	2.34
46	2102	1.71	1.30	3.59	1.18	2.09	1.51	1.45
47	2162	1.67	1.23	4.54	.95	1.96	1.35	1.75
48	2222	1.62	1.45	2.54	2.06	2.78	2.10	.78
49	2395	1.50	1.37	2.31	2.04	2.49	2.11	.74
50	2448	1.47	1.06	2.99	1.16	2.57	1.51	2.26
51	2488	1.45	1.09	3.30	1.11	2.20	1.46	1.31
52	2649	1.51	1.42	4.32	1.60	2.35	1.46	.95

Tabel 3

Uitsplitsing gegevens naar locatie en weertype (de nummers verwijzen naar de nummers in tabel 2).

A. Driebruggen, droog weer en daglicht:

uitkomsten no. 3, 5, 6, 7, 13, 16, 21, 23, 26, 30, 33, 34, 35, 37, 42 en 45.

Driebruggen, nat weer en daglicht:

uitkomsten no. 11, 19, 22, 31 en 36.

Driebruggen, droog weer en schemer/duister:

uitkomsten no. 25 en 40.

Driebruggen, nat weer en schemer/duister:

uitkomst no. 8.

Driebruggen, mist:

uitkomst no. 9 (donker) en 18 (licht).

B. Zoetermeer, richting Gouda, droog weer en daglicht:

uitkomsten no. 4, 12, 17, 27, 29, 38, 43, 44, 47, 50 en 51.

Zoetermeer, richting Gouda, nat weer en daglicht:

uitkomsten no. 28 en 46.

C. Zoetermeer, richting Den Haag, droog weer en daglicht:

uitkomsten no. 2, 14, 24, 39, 41, 49 en 51.

Zoetermeer, richting Den Haag, nat weer en daglicht:

uitkomst no. 10.

Zoetermeer, richting Den Haag, droog weer en schemer/duister:

uitkomst no. 1.

Zoetermeer, richting Den Haag, lichte mist:

uitkomsten no. 15, 20, 32 en 48.

Appendix A. Asymptotische varianties en covarianties van de parameterschattingen in het convolutiemodel met niet gespecificeerde volgersverdeling.

$$(A1) \quad \text{var}(\hat{\lambda}) \sim \lambda^2 / (N(1-F(T)))$$

$$(A2) \quad \text{var}(\hat{\psi}) \sim \frac{1}{N} \left\{ \int_0^T \rho_1^2(t) dF(t) - \left(\int_0^T \rho_1(t) dF(t) \right)^2 \right\} + \alpha_1^2 \text{var}(\hat{\lambda}),$$

waarbij

$$\rho_1(t) = C^{-1} (\psi + (1-\psi) \exp\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\}),$$

$$\begin{aligned} \text{met } C = H'_\psi(\psi, F) &= 1 - F(T) + \int_0^T \exp\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\} dF(t) \\ &- \frac{1-\psi}{\psi^2} \int_0^T (T-t) \exp\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\} dF(t) \quad (\text{zie (3.19)}) \end{aligned}$$

$$\text{en } \alpha_1 = -C^{-1} \int_0^T \left(\frac{1-\psi}{\psi}\right) (T-t) \exp\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\} dF(t)$$

$$(A3) \quad \text{var}(\hat{\mu}_V) \sim \frac{1}{N} \left\{ \int_0^T \rho_2^2(t) dF(t) - \left(\int_0^T \rho_2(t) dF(t) \right)^2 \right\} + \alpha_2^2 \text{var}(\hat{\lambda})$$

waarbij

$$\rho_2(t) = t - \left(\frac{1-\psi}{\lambda} - \psi C^{-1} \beta_1\right) + (1-\psi) \left\{ \frac{\lambda T + \psi}{\lambda \psi} + C^{-1} \beta_1 \right\} \exp\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\},$$

met

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{\lambda} F(T) - \left(\frac{T}{\psi} + \frac{1}{\lambda}\right) \int_0^T \exp\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\} dF \\ &+ \frac{1-\psi}{\psi^3} (\lambda T + \psi) \int_0^T (T-t) \exp\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\} dF = \frac{\partial \mu}{\partial \psi}, \text{ met } \mu = \mu_V \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \beta_2 - \frac{1-\psi}{\psi} \beta_1 C^{-1} \int_0^T (T-t) \exp\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\} dF \\ \text{met } \beta_2 &= -\frac{1-\psi}{\lambda^2} \int_0^T \exp\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\} dF - \frac{1-\psi}{\lambda \psi^2} (\lambda T + \psi) \int_0^T (T-t) \exp\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\} dF \\ &+ \frac{1-\psi}{\lambda^2} F(T) = \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

$$(A4) \quad \text{var}(\hat{\sigma}_V) \sim \frac{1}{4N\sigma^2} \left\{ \int_0^T \rho_4^2(t) dF(t) - \left(\int_0^T \rho_4(t) dF(t) \right)^2 \right\} + \beta_4^2 \text{var}(\hat{\lambda}) / (4\sigma^2)$$

waarbij $\sigma^2 = \sigma_V^2$, $\rho_4 = \beta_3 \rho_1 - 2\mu \rho_2 + \rho_3$;

$$\text{met } \rho_3(t) = t^2 - 2\left(\frac{1-\psi}{\lambda}\right) \left\{ \frac{\psi}{\lambda} + t \right\} + \exp\left\{ \frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right\} \left(\frac{1-\psi}{\psi} T^2 + \frac{2(1-\psi)}{\lambda^2} (\lambda T + \psi) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{en } \beta_3 = \frac{\partial}{\partial \psi} \sigma^2 = & - \left\{ \frac{1}{\psi} T^2 + \frac{2(\lambda T + \psi)}{\lambda^2} - \frac{2(1-\psi)}{\lambda^2} \right\} \int_0^T \exp\left\{ \frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right\} dF(t) \\ & + \frac{\lambda(1-\psi)}{\psi^3} T^2 \int_0^T (T-t) \exp\left\{ \frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right\} dF(t) \\ & + 2 \frac{1-\psi}{\lambda \psi^2} (\lambda T + \psi) \int_0^T (T-t) \exp\left\{ \frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right\} dF(t) \\ & - \frac{2(1-2\psi)}{\lambda^2} F(T) + \frac{2}{\lambda} \int_0^T t dF(t) \end{aligned}$$

en waarbij

$$\begin{aligned} \beta_4 = & \frac{-\beta_3}{C} \left(\frac{1-\psi}{\psi} \right) \int_0^T (T-t) \exp\left\{ \frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right\} dF(t) \\ & - 2\mu \left\{ \beta_2 - \left(\frac{1-\psi}{\psi} \right) \beta_1 C^{-1} \int_0^T (T-t) \exp\left\{ \frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right\} dF(t) \right\} + \beta_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{met } \beta_5 = \frac{\partial}{\partial \lambda} \sigma^2 = & - \left(\frac{1-\psi}{\psi} \right) T^2 \int_0^T \frac{T-t}{\psi} \exp\left\{ \frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right\} dF(t) \\ & + \left\{ 2T \left(\frac{1-\psi}{\lambda^2} \right) - 4 \left(\frac{1-\psi}{\lambda^3} \right) (\lambda T + \psi) \right\} \cdot \int_0^T \exp\left\{ \frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right\} dF(t) + \\ & + \frac{4\psi(1-\psi)}{\lambda^3} F(T) + \frac{2(1-\psi)}{\lambda^2} \int_0^T t dF(t) \\ & - 2 \frac{1-\psi}{\lambda^2 \psi} (\lambda T + \psi) \int_0^T (T-t) \exp\left\{ \frac{\lambda(t-T)}{\psi} \right\} dF(t) \end{aligned}$$

$$(A5) \quad \text{covar}(\hat{\lambda}, \hat{\psi}) \sim \alpha_1 \text{var}(\hat{\lambda})$$

$$(A5) \quad \text{covar}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}_V) \sim \alpha_2 \text{var}(\hat{\lambda})$$

$$(A6) \quad \text{covar}(\hat{\lambda}, \hat{\sigma}_V) \sim \frac{\beta_4}{2\sigma} \text{var}(\hat{\lambda})$$

$$\begin{aligned}
 (A7) \quad \text{covar}(\hat{\psi}, \hat{\mu}_V) &\sim N^{-1} \left\{ \int_0^T \rho_1 \rho_2 dF - \int_0^T \rho_1 dF \int_0^T \rho_2 dF \right\} \\
 &\quad - \text{var}(\hat{\lambda}) \cdot \frac{1-\psi}{\psi} c^{-1} \alpha_2 \int_0^T (T-t) \exp\left\{\frac{\lambda(t-T)}{\psi}\right\} dF
 \end{aligned}$$

$$(A8) \quad \text{covar}(\hat{\psi}, \hat{\sigma}_V) \sim \frac{1}{2N\sigma} \left\{ \int_0^T \rho_1 \rho_4 dF - \int_0^T \rho_1 dF \int_0^T \rho_4 dF \right\} + \alpha_1 \beta_4 \text{var}(\hat{\lambda}) / (2\sigma).$$

$$(A9) \quad \text{covar}(\hat{\mu}_V, \hat{\sigma}_V) \sim \frac{1}{2N\sigma} \left\{ \int_0^T \rho_1 \rho_4 dF - \int_0^T \rho_1 dF \int_0^T \rho_4 dF \right\} + \alpha_2 \beta_4 \text{var}(\hat{\lambda}) / (2\sigma).$$

Appendix B. Parameterschattingen en schattingen van hun varianties en covarianties in het convolutiemodel met niet gespecificeerde volgersverdeling.

Notaties: N is het totaal aantal waarnemingen, n het aantal waarnemingen $\geq T$; $t_1, \dots, t_N$ duiden de volgtijden in de steekproef (ter grootte N) aan.

Parameterschattingen

$$(B.1) \quad \hat{\lambda} = n / \sum_{t_i \geq T} (t_i - T)$$

(B.2) $\hat{\psi}$ is de grootste oplossing van de vergelijking

$$\psi = \left(\frac{1-\psi}{n} \right) \sum_{t_i < T} \exp \left\{ \frac{\hat{\lambda} (t_i - T)}{\psi} \right\}$$

Voor $\hat{\mu}_V$ en $\hat{\sigma}_V$ hebben we de volgende hulpgrootheden nodig

$$B_1 = N^{-1} \sum_{t_i < T} t_i$$

$$B_2 = N^{-1} \sum_{t_i < T} t_i^2$$

$$C_1 = N^{-1} \sum_{t_i < T} \exp \left\{ \frac{\hat{\lambda} (t_i - T)}{\hat{\psi}} \right\}$$

Met behulp hiervan worden berekend

$$(B.3) \quad \hat{\mu}_V = B_1 - \frac{N-n}{N} (1-\hat{\psi}) / \hat{\lambda} + \frac{(1-\hat{\psi}) (\hat{\lambda} T + \hat{\psi})}{\hat{\lambda} \hat{\psi}} C_1$$

$$(B.4) \quad \hat{\sigma}_V^2 = B_2 + \left(\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\psi}} \right) T^2 C_1 + 2 \left(\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\lambda}^2} \right) (\hat{\lambda} T + \hat{\psi}) C_1 - \frac{2\hat{\psi} (1-\hat{\psi})}{\hat{\lambda}^2} \frac{N-n}{N} - \frac{2(1-\hat{\psi})}{\hat{\lambda}} B_1 - \hat{\mu}^2$$

Schattingen van de (co)varianties van de parameterschattingen

Hulpgrootheden:

$$C_2 = N^{-1} \sum_{t_i < T} (T - t_i) \exp \left\{ \frac{\hat{\lambda} (t_i - T)}{\hat{\psi}} \right\}$$

$$C_3 = N^{-1} \sum_{t_i < T} \exp\{2\hat{\lambda}(t_i - T)/\hat{\psi}\}$$

$$D_1 = \frac{n}{N} + C_1 - \left(\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\psi}}\right) \hat{\lambda} C_2$$

Nu is

$$(B.5) \quad \hat{\text{var}}(\hat{\lambda}) = \hat{\lambda}^2/n$$

$$(B.6) \quad \hat{\text{var}}(\hat{\psi}) = \frac{1}{N} (1/D_1^2) \left\{ \frac{n}{N} (1-\frac{n}{N}) \hat{\psi}^2 + (1-\hat{\psi})^2 (C_3 - C_1^2) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\psi}}\right)^2 C_2^2 N \hat{\text{var}}(\hat{\lambda}) + 2 \hat{\psi}(1-\hat{\psi}) \frac{n}{N} C_1 \right\}$$

$$(B.7) \quad \hat{\text{covar}}(\hat{\lambda}, \hat{\psi}) = -D_1^{-1} \left(\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\psi}}\right) C_2 \hat{\text{var}}(\hat{\lambda}) .$$

Voor de berekening van de overige schattingen hebben we nog de volgende hulpgrootheden nodig

$$D_2 = \frac{N-n}{N\hat{\lambda}} - \left(\frac{T}{\hat{\lambda}^2} + \frac{1}{\hat{\lambda}}\right) C_1 + (1-\hat{\psi}) \left(\frac{\lambda T + \hat{\psi}}{\hat{\psi}^3}\right) C_2$$

$$D_3 = \frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\lambda}^2} \frac{N-n}{N} - (1-\hat{\psi}) C_1/\hat{\lambda}^2 - (1-\hat{\psi}) \left(\frac{\hat{\lambda}T + \hat{\psi}}{\hat{\lambda}\hat{\psi}^2}\right) C_2$$

$$D_4 = - \left\{ \frac{T^2}{\hat{\lambda}^2} + 2 \left(\frac{\hat{\psi} + \lambda T}{\hat{\lambda}^2} \right) - \frac{2(1-\hat{\psi})}{\hat{\lambda}^2} \right\} C_1 + \frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\lambda}\hat{\psi}^2} \{ \hat{\lambda}^2 \hat{\psi}^{-1} T + 2(\hat{\lambda}T + \hat{\psi}) \} C_2 \\ - \frac{2(1-2\hat{\psi})}{\hat{\lambda}^2} \frac{N-n}{N} + \frac{2}{\hat{\lambda}} B_1$$

$$D_5 = - \frac{(1-\hat{\psi})T^2}{\hat{\psi}^2} C_2 + \left\{ 2T \left(\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\lambda}^2} \right) - 4 \left(\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\lambda}^3} \right) (\hat{\lambda}T + \hat{\psi}) \right\} C_1 - 2 \frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\psi}\hat{\lambda}^2} (\hat{\lambda}T + \hat{\psi}) C_2 + \\ + \frac{4\hat{\psi}(1-\hat{\psi})(N-n)}{\hat{\lambda}^3 N} + 2(1-\hat{\psi}) B_1/\hat{\lambda}^2 .$$

$$E_1 = D_3 - \frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\psi}} D_2 C_2/D_1 .$$

$$E_2 = - D_4 C_2 \left(\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\psi}}\right) D_1^{-1} - 2\mu E_1 + D_5 .$$

De schattingen van de overige varianties worden nu opgebouwd met behulp van deze uitdrukkingen en de functies f_1 , f_2 , f_3 en f_4 die alleen in de waargenomen volgtijden $< T$ hoeven te worden geëvalueerd.

$$f_1(t) = D_1^{-1} \{ \hat{\psi} + (1-\hat{\psi}) \cdot \exp\{\frac{\hat{\lambda}(t-T)}{\hat{\psi}}\} \}$$

$$f_2(t) = t - (\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\lambda}} - \hat{\psi} D_1^{-1} D_2) + (1-\hat{\psi}) \{ \frac{\hat{\lambda}T+\hat{\psi}}{\hat{\lambda}\hat{\psi}} + D_1^{-1} D_2 \} \exp\{\frac{\hat{\lambda}(t-T)}{\hat{\psi}}\}$$

$$f_3(t) = t^2 + \{ (\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\psi}}) T^2 + 2(\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\lambda}^2}) (\hat{\lambda}T+\hat{\psi}) \} \cdot \exp\{\frac{\hat{\lambda}(t-T)}{\hat{\psi}}\} - \frac{2(1-\hat{\psi})t}{\hat{\lambda}} - 2\hat{\psi}(1-\hat{\psi})/\hat{\lambda}^2$$

$$f_4(t) = f_3(t) + D_4 f_1(t) - 2\hat{\mu} f_2(t).$$

Dan:

$$(B.8) \quad \hat{\text{var}}(\hat{\mu}) = \frac{1}{N} \{ \frac{1}{N} \sum_{t_i < T} f_2^2(t_i) - (\frac{1}{N} \sum_{t_i < T} f_2(t_i))^2 \} + E_1^2 \hat{\text{var}}(\hat{\lambda})$$

$$(B.9) \quad \hat{\text{covar}}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = E_1 \hat{\text{var}}(\hat{\lambda})$$

$$(B.10) \quad \hat{\text{covar}}(\hat{\psi}, \hat{\mu}) = \frac{1}{N} \{ \frac{1}{N} \sum_{t_i < T} f_1(t_i) f_2(t_i) - \frac{1}{N^2} (\sum_{t_i < T} f_1(t_i)) (\sum_{t_i < T} f_2(t_i)) \} - (\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\psi}}) C_2 E_1 \hat{\text{var}}(\hat{\lambda})/D_1$$

$$(B.11) \quad \hat{\text{var}}(\hat{\sigma}) = \frac{1}{4N\hat{\sigma}^2} \{ \frac{1}{N} \sum_{t_i < T} f_4^2(t_i) - (\frac{1}{N} \sum_{t_i < T} f_4(t_i))^2 \} + E_2^2 \hat{\text{var}}(\hat{\lambda})/(4\hat{\sigma}^2)$$

$$(B.12) \quad \hat{\text{covar}}(\hat{\lambda}, \hat{\sigma}) = \frac{E_2}{2\hat{\sigma}} \hat{\text{var}}(\hat{\lambda})$$

$$(B.13) \quad \hat{\text{covar}}(\hat{\psi}, \hat{\sigma}) = \frac{1}{2N\hat{\sigma}} \{ N^{-1} \sum_{t_i < T} f_1(t_i) f_4(t_i) - \frac{1}{N^2} \sum_{t_i < T} f_1(t_i) \sum_{t_i < T} f_4(t_i) \} - \frac{1}{2\hat{\sigma}} (\frac{1-\hat{\psi}}{\hat{\psi}}) C_2 E_2 \hat{\text{var}}(\hat{\lambda})/D_1$$

$$+ E_1 E_2 \text{var}(\hat{\lambda})$$

$$(B.14) \quad \widehat{\text{covar}}(\hat{\psi}, \hat{\sigma}) = \frac{1}{2N\hat{\sigma}} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t_i < T} f_2(t_i) f_4(t_i) - \frac{1}{N^2} \sum_{t_i < T} f_2(t_i) \sum_{t_i < T} f_4(t_i) \right\}$$

Appendix C. Rechtvaardiging van de berekeningswijze van de asymptotische (co)varianties.

We schetsen hier slechts het bewijs voor de bepaling van de asymptotische variantie van $\hat{\lambda}$ en laten de analoge bewijzen voor andere varianties (en ook covarianties) achterwege.

Gebruikmakend van (3.11) en (3.12) in sectie 3 vinden we:

$$(C.1) \quad \hat{\lambda} - \lambda = 1/\eta(F_N) - 1/\eta(F) = -(\eta(F_N) - \eta(F))/(\eta(F_N)\eta(F)).$$

Stel $\bar{F}(T) = 1 - F(T)$ en $\bar{F}_N(T) = 1 - F_N(T-)$. Dan geldt:

$$\eta(F_N) - \eta(F) = A_N + B_N + C_N + D_N,$$

waarbij

$$A_N = \frac{\bar{F}_N(T-) - \bar{F}(T)}{\bar{F}(T) \bar{F}_N(T)} \int_{[T, \infty)} (x-T) d(F_N - F)$$

$$B_N = \left\{ \frac{\bar{F}_N(T-) - \bar{F}(T)}{\bar{F}(T) \bar{F}_N(T)} - \frac{\bar{F}_N(T-) - \bar{F}(T)}{(\bar{F}(T))^2} \right\} \int_{[T, \infty)} (x-T) dF$$

$$C_N = \frac{\bar{F}_N(T-) - \bar{F}(T)}{(\bar{F}(T))^2} \int_{[T, \infty)} (x-T) dF$$

$$D_N = \frac{1}{\bar{F}(T)} \int_{[T, \infty)} (x-T) d(F_N - F)$$

We hebben $A_N = O_p(1/N)$ en evenzo $B_N = O_p(1/N)$, als $N \rightarrow \infty$.

Dit volgt uit de centrale limietstelling, toegepast op $\sqrt{N}(\bar{F}_N(T-) - \bar{F}(T))$ en $\sqrt{N} \int_{[T, \infty)} (x-T) d(F_N - F)$.

Omdat $\sqrt{N}(C_N + D_N)$ asymptotisch normaal is, met verwachting 0 en variantie

$$V = \frac{1}{\bar{F}(T)} \left\{ \int_T^\infty (x-T)^2 d\left(\frac{F(x)}{\bar{F}(T)}\right) - \left(\int_T^\infty (x-T) d\left(\frac{F(x)}{\bar{F}(T)}\right) \right)^2 \right\}$$

is dus ook $\sqrt{N}(\eta(F_N) - \eta(F))$ asymptotisch normaal met verwachting 0 en variantie V . Uit (C.1) volgt nu dat de asymptotische variantie van $\hat{\lambda}$ (gebaseerd op N waarnemingen) gelijk is aan $\frac{\lambda^4}{N} V$, en onder de aanname dat $\frac{F(X)-F(T)}{\bar{F}(T)} = 1 - \exp \{-\lambda(x-T)\}$ voor $x \geq T$, is dit gelijk aan

$$\frac{\lambda^2}{N \bar{F}(T)}$$

Voor een rechtvaardiging van het gebruik van de impliciete functiestelling kan een beroep gedaan worden op Theorem C, p. 255 van Serfling (1980), hoewel in dit geval nog extra argumenten nodig zijn om de zaak volledig rond te krijgen. Aangezien dit soort toepassingen van de impliciete functiestelling echter regelmatig opduiken bij semi-parametrische modellen, zal een algemeen toepasbare versie van de impliciete functiestelling (bij niet noodzakelijk lineaire ruimtes) in een apart rapport behandeld worden.

Appendix D. Parameterschattingen in het semi-Poisson model met niet gespecificeerde volgersverdeling.

$$(D.1) \quad \hat{\lambda} = n / \sum_{t_i \geq T} (t_i - T)$$

$$(D.2) \quad \hat{A} = (n/N) \exp(\hat{\lambda}T) .$$

(Deze schattingen zijn identiek aan die welke gebruikt worden in Wasielewski (1979)).

(D.3) $\hat{\psi}$ wordt opgelost uit de vergelijking (in ψ):

$$(D.4) \quad H(\hat{\lambda}, \hat{A}, F_N, \psi) = \int_{[0,T)} \exp\left\{-\frac{\hat{A}}{\psi} e^{-\hat{\lambda}x}\right\} dF_N(x) - \psi \exp\left\{-\frac{\hat{A}}{\psi} e^{-\hat{\lambda}T}\right\} = 0 .$$

(Hierbij wordt afgeweken van Wasielewski (1979), en gebruik gemaakt van vergelijking (6) in Weiss (1975) en de aanname dat de onderliggende dichtheid $f(t) = A\lambda e^{-\lambda t}$, voor $t \geq T$, zodat we kunnen schrijven

$$\int_T^\infty f(t) \exp\left\{-\frac{A}{\psi} e^{-\lambda t}\right\} dt = \psi (1 - \exp\left\{-\frac{A}{\psi} e^{-\lambda T}\right\}) .)$$

$$(D.5) \quad \hat{\mu}_V = \frac{1}{\hat{\psi}} (T \exp\left\{\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}T}\right\} \int_{[0,T)} \exp\left\{-\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}t}\right\} dF_N$$

$$- \int_0^T \exp\left\{\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}t}\right\} dt \int_{[0,T)} \exp\left\{-\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}t}\right\} dF_N$$

$$+ \int_{[0,T)} \left\{ \int_0^T \exp\left\{\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}u}\right\} du \right\} \exp\left\{-\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}t}\right\} dF_N) .$$

(De integralen $\int_0^t \exp\left\{\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}u}\right\} du$ moeten hierbij numeriek worden bepaald.)

$$(D.6) \quad \hat{\sigma}_V^2 = \frac{1}{\hat{\psi}} (T^2 \exp\left\{\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}T}\right\} \int_{[0,T)} \exp\left\{-\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}t}\right\} dF_N$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_{[0,T)} \exp\left\{-\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}t}\right\} \int_0^t u \left\{\exp\left\{\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}u}\right\}\right\} du dF_N \\
& - 2 \int_0^T t \exp\left\{\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}t}\right\} dt \int_0^T \exp\left\{-\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}t}\right\} dF_N - \hat{\mu}^2.
\end{aligned}$$

(De integralen $\int_0^t u \exp\left\{\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}u}\right\} du$ moeten hierbij eveneens numeriek worden bepaald).

$$(D.7) \quad \hat{\sigma}^2(\hat{\lambda}) = \hat{\lambda}^2/n$$

$$(D.8) \quad \hat{\sigma}^2(\hat{A}) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{N-n}{N} \hat{A}^2 + T^2 \hat{A}^2 \hat{\lambda}^2 \right\}$$

De schatting van de variantie van $\hat{\psi}$ wordt verkregen met behulp van de volgende hulpgrootheden.

$$B_1 = \int_{[0,T)} \exp\left\{-\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}t}\right\} dF_N$$

$$B_2 = \int_{[0,t)} \exp\left\{-\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}t}\right\} dF_N$$

$$B_3 = \int_{[0,T)} \exp\left\{-\hat{\lambda}t - \frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}t}\right\} dF_N$$

$$B_4 = \int_{[0,T)} t \exp\left\{-\hat{\lambda}t - \frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}t}\right\} dF_N$$

(merk op dat dit allemaal gewone sommen zijn, numerieke integratie is niet vereist. Bijv.

$$B_1 = N^{-1} \sum_{t_i < T} \exp\left\{-\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}t_i}\right\},$$

waarbij gesommeerd wordt over de volgtijden $t_i < T$).

$$C_1 = -\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}^2} B_3 + \left(1 + \frac{\hat{A}e^{-\hat{\lambda}T}}{\hat{\psi}}\right) \exp\left\{-\frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}T}\right\}$$

$$C_2 = \exp\left\{-\hat{\lambda}T - \frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}T}\right\} - \frac{1}{\hat{\psi}} B_3$$

$$C_3 = \frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} B_4 - \hat{A}T \exp\{-\hat{\lambda}T - \frac{\hat{A}}{\hat{\psi}} e^{-\hat{\lambda}T}\}$$

De schatting van $\text{var}(\hat{\psi})$ wordt nu:

$$\begin{aligned} (D.9) \quad \hat{\sigma}^2(\hat{\psi}) &= C_1^{-2} \{ C_2^2 \hat{\sigma}^2(\hat{A}) + C_3^2 \hat{\sigma}^2(\hat{\lambda}) + N^{-1} (B_2 - B_1^2) + \\ &+ 2C_2C_3 \frac{nT}{N} \exp(\hat{\lambda}T) \hat{\sigma}^2(\hat{\lambda}) - \frac{2}{N} C_2 \hat{A}B_1 \} . \end{aligned}$$

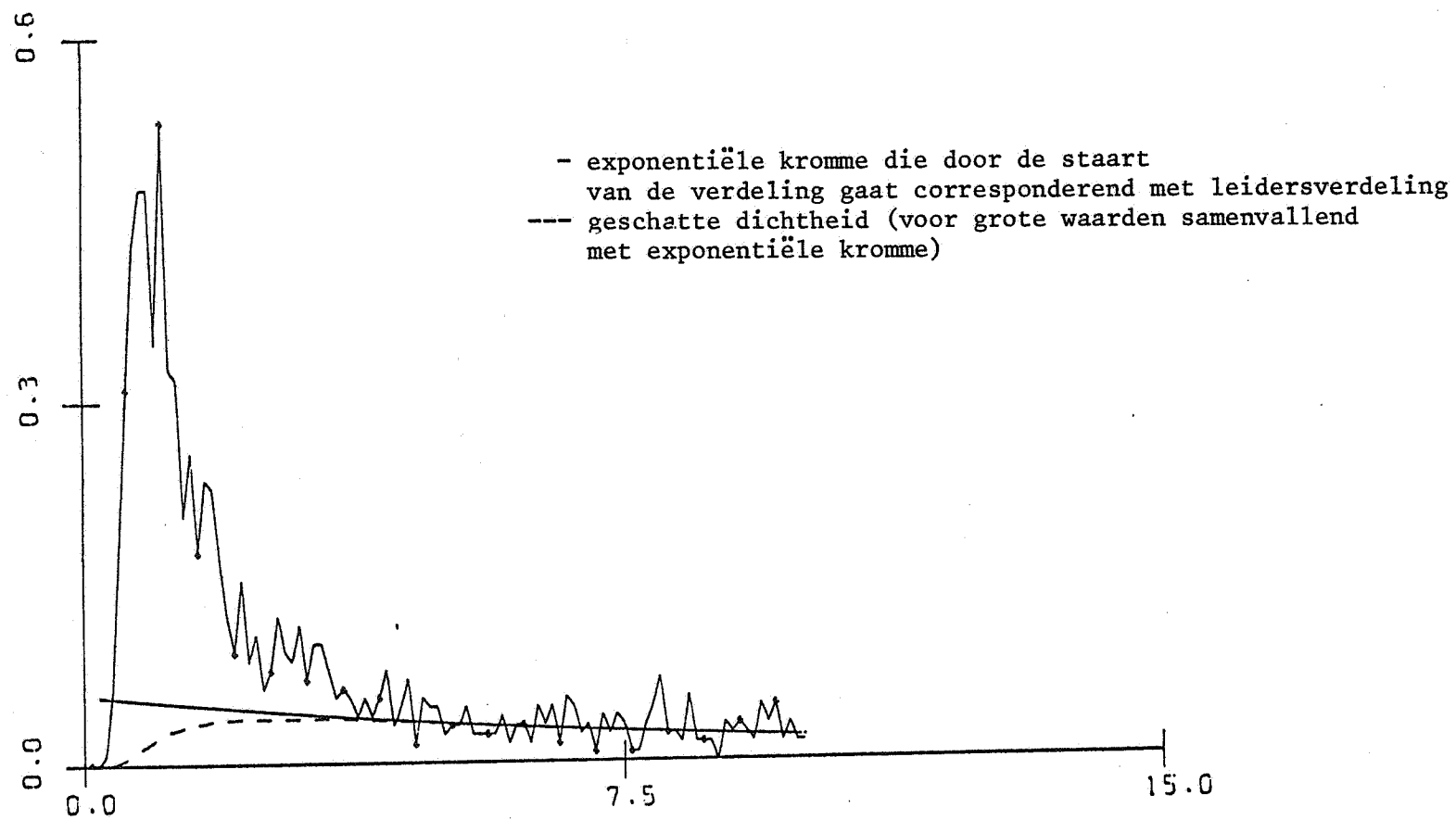
LITERATUUR

Afkortingen: TR duidt het tijdschrift "Transportation Research" aan en TS het tijdschrift "Transportation Science".

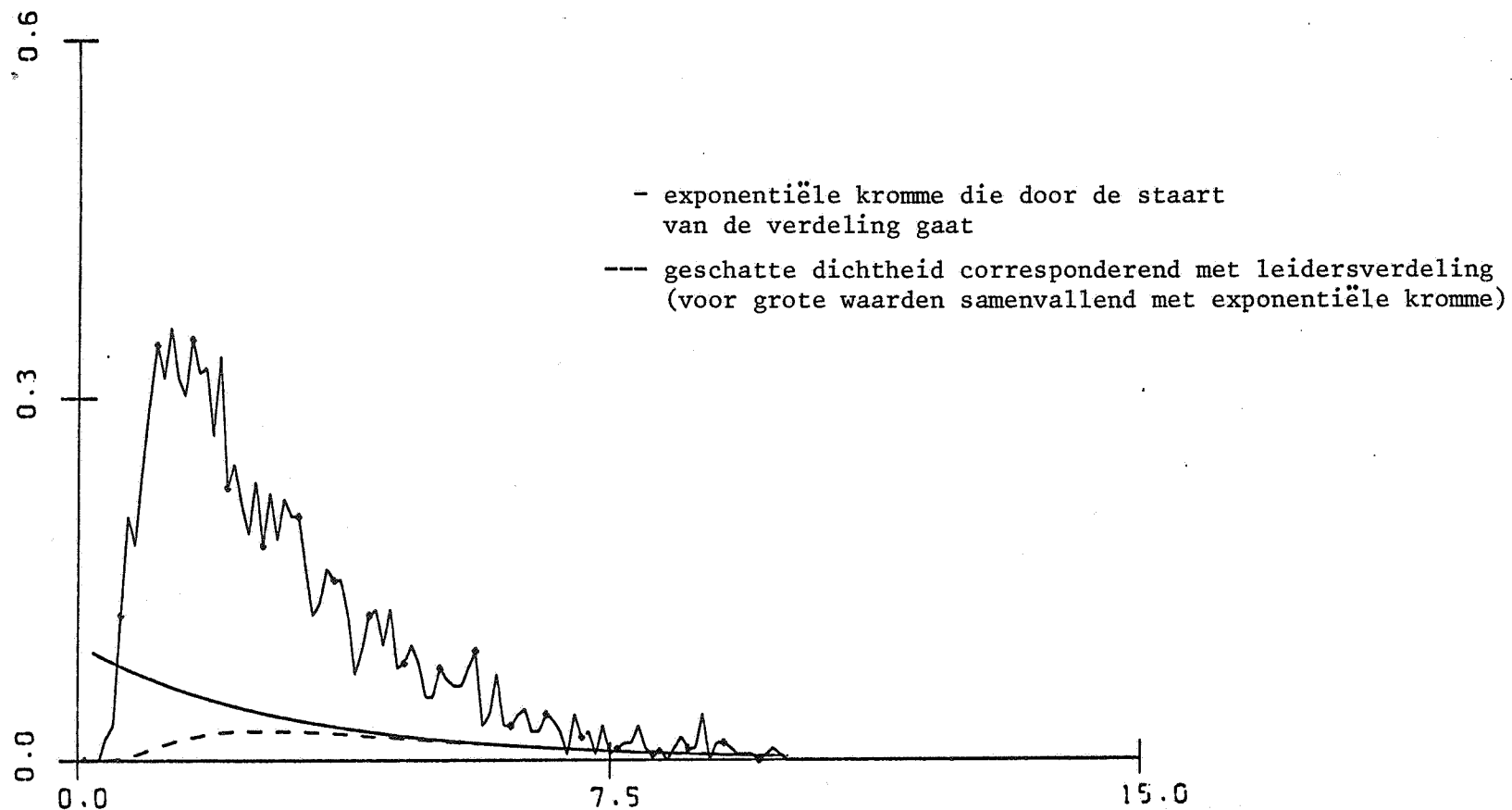
1. Botma, H., J.H. Papendrecht en D. Westland (1980), *Validation of capacity estimators based on the decomposition of the distribution of headways*, Research Rapport CS/1/80.1 TH Delft, Afdeling Verkeerskunde.
2. Branston, D. (1976), *Models of single lane time headway distributions*, TS vol. 10, no. 2, 125-148.
3. Breiman, L. (1969), *Data and models in homogeneous one-way traffic flow*, TR vol. 3, 235-249.
4. Breiman, L. en R.L. Lawrence (1973), *Time scales, fluctuations and constant flow periods in uni-directional traffic*, TR vol. 7, 77-105.
5. Breiman, L. en R.L. Lawrence (1977), *A simple stochastic model for freeway traffic*, TR vol. 11, 177-182.
6. Breiman, L., R.L. Lawrence, D. Goodwin en B. Bailey (1977), *The statistical properties of freeway traffic*, TR vol. 11, 221-228.
7. Buckley, D.J. (1968), *A semi-Poisson model of traffic flow*, TS vol. 2, 107-133.
8. Serfling, R.J. (1980), *Approximation theorems in mathematical statistics*, Wiley, New York.
9. Wasielewski, P. (1979), *Car-following headways on freeways interpreted by the semi-Poisson headway distribution model*, TR vol. 13, 36-55.
10. Weiss, G.H. (1975), *Solution to an integral equation in the study of semi-Poisson headway distributions*, TR vol. 9, 86-87.

Ook werd geraadpleegd het rapport:

"De stationaire verkeersstroom op de 2x2-strooks autosnelweg", Nota 80-03, Dienst Verkeerskunde, Rijkswaterstaat.



Volgtijdenverdeling op linkerrijstrook bij een intensiteit van
660 voertuigen per uur, gemeten bij Driebruggen (waarden tot 10 seconden)



Volgtijdenverdeling op de rechterrijstrook bij een intensiteit van 1250 voertuigen per uur, gemeten bij Driebruggen (waarden tot 10 seconden)