



Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science

A.J. van Es, M.N. Voors

Statistische analyse van gemiddelde meerpeilen
in het IJsselmeergebied

Afdeling Mathematische Statistiek

Notitie MS-N8502

*Statistical analysis of the average water-levels of the
lake in the IJsselmeer area*

The Centre for Mathematics and Computer Science is a research institute of the Stichting Mathematisch Centrum, which was founded on February 11, 1946, as a nonprofit institution aiming at the promotion of mathematics, computer science, and their applications. It is sponsored by the Dutch Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.).

62 P99
60 C, 25

INHOUD

1. Doelstelling.
2. Beschrijving van de gegevens en de situatie in het IJsselmeergebied.
3. Een aantal modellen.
4. Schattingen van de parameters en de quantielen.
5. Conclusies.

APPENDICES:**Appendix I - de data.**

1. Inhoud van de tapes.
2. De maximale peilen.
3. De tijdsperioden van de data op de eerste tape.
4. Grafische voorstelling van de data (twee perioden, eerste tape).
5. Het verschil tussen de tweede en derde tape.

Appendix II - de plots.

1. Plots maxima over de hele periode.
 - 1.1. Plots maxima over de hele periode, (derde tape).
 - 1.2. Plots maxima over de hele periode, IJsselmeer bij Markermeervariant, (tweede tape).
 - 1.3. Peilen boven -0.10, exponentiele plots, (derde tape).
2. Plots maxima per maand.
 - 2.1. Exponentiele plots derde tape.
 - 2.2. Exponentiele plots tweede tape.

Appendix III - Overige toetsingsresultaten en schattingen.

1. Toetsen op exponentialiteit.
2. Toetsen mbt. het GEV model.
3. Toetsen op normaliteit.
4. Overige schattingen.

Appendix IV - Wiskundige achtergrond.

1. De toetsen van Stephens.
2. De Cumulative Total Time on Test statistic.
3. De Modified Likelihood Ratio toets in het GEV model.
4. Betrouwbaarheidsintervallen.
 - 4.1. Het samengestelde exponentiele model.
 - 4.2. Het normale model
 - 4.3. Het GEV model en het Gumbel model.

Statistische analyse van gemiddelde meerpeilen in het IJsselmeergebied

A.J. van Es, M.M. Voors

1. DOELSTELLING.

1.1. We bespreken enige statistische aspecten van een door Rijkswaterstaat uitgevoerd onderzoek naar de huidige belasting van de dijken in het IJsselmeergebied. Bij dergelijke onderzoeken richt men zich gebruikelijk op een statistische analyse van de waterpeilen en in het bijzonder de extreem hoge waterpeilen.

Gewoonlijk splitst men een peil op een bepaalde plek en op een bepaald tijdstip t op als een som van drie termen

$$X(t) = P(t) + S(t) + Z(t),$$

waarbij $P(t)$ het gemiddelde meerpeil is op tijdstip t , $S(t)$ de opwaaiing is ter plaatse en $Z(t)$ de golfploop is tegen het talud van het dijkvak. Om te bepalen of een dijkvak voldoet dient dan te worden vastgesteld welke waarden van X in een willekeurig jaar worden overschreden met een kans 10^{-3} respectievelijk 10^{-4} .

1.2. Uit eerdere studies van Rijkswaterstaat is gebleken dat dit een zeer complex vraagstuk is. Ruwweg kan men de situatie in het IJsselmeergebied als volgt schetsen. De watertoevoer komt van de IJssel en de Overijsselse Vecht, alsmede van neerslag en de lozingen van gemalen. De waterafvoer wordt hoofdzakelijk geregeld door twee sluisen in de afsluitdijk. Daarbij dient rekening gehouden te worden met de dijk Enkhuizen-Lelystad die het IJsselmeergebied in twee delen deelt. Vanzelfsprekend is het ook van belang of er sprake is van een ingepolderde Markerwaard of van een groot Markermeer. Een belangrijke complicatie is het feit dat de sluisen bij de afsluitdijk niet of in beperkte mate kunnen lozen bij sterke noordwesterwind vanwege de opwaaiing aan de buitenzijde en tegelijkertijd de afwaaiing aan de binnenzijde.

1.3. Als onderdeel tot het bereiken van het uiteindelijke doel, het bepalen van de bovengenoemde waarden van X , is er een onderzoek gedaan naar de frequentieverdeling van de *gemiddelde peilen* P . In het bijzonder zijn de gemiddelde peilen bepaald die in een willekeurig jaar met kansen 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} en 10^{-4} overschreden worden. We noemen deze waarden verder de $1-10^{-1}$, ..., $1-10^{-4}$ quantielen van P . Centraal bij het bepalen van deze quantielen stond de vraag van welke extrapolatiemethode moest worden uitgegaan. Zijn er bijvoorbeeld argumenten aan te voeren waarom de klassieke extrapolatiemethode volgens de Gumbel verdeling de voorkeur geniet boven andere methoden?

2. BESCHRIJVING VAN DE GEGEVENS EN DE SITUATIE IN HET IJSSELMEERGEDIED.

2.1. De lozingsstrategie die door Rijkswaterstaat gevolgd wordt in het IJsselmeergebied is de volgende. Gedurende de periode van 1 oktober tot 1 april wordt er een streefpeil gehanteerd van NAP -0.40 m. Gedurende de rest van het jaar is er een hoger streefpeil. Telkens als het peil stijgt boven het streefpeil wordt er door de sluisen in de afsluitdijk net zolang zo veel mogelijk geloosd tot het streefpeil weer bereikt is waarna men het lozen vermindert of staakt tot het moment dat het peil weer gaat stijgen. Zoals al eerder opgemerkt treedt hierbij de complicatie op dat er bij sterke noordwesterwind niet of niet voldoende kan worden geloosd.

Het IJsselmeer is in twee stukken verdeeld door de dijk Enkhuizen-Lelystad. We duiden deze twee stukken in het vervolg aan met het IJsselmeer en het Markermeer. In dit rapport worden twee varianten bekeken, de zogenaamde Markerwaardvariant, waarbij we te maken hebben met een ingepolderde Markerwaard en dientengevolge een klein Markermeer in plaats van het huidige Markermeer, en de Markermeervariant, waarbij geen inpoldering heeft plaatsgevonden en we te maken hebben met een groot Markermeer. De nadruk zal liggen op de analyse van de *IJsselmeerpeilen bij de Markermeervariant*.

2.2. De door Rijkswaterstaat aangeleverde gegevens besloegen de periode 1932-1966, dwz. een periode van 34 jaar en binnen elk jaar besloegen de gegevens alleen de winterperiode, 1 oktober-1 april, omdat alleen in die periode extreem hoge peilen optreden. De gegevens bestaan niet uit echte gemeten meerpeilen zoals ze zich hebben voorgedaan in de door ons beschouwde 34 jaar. Aangezien er zich in de betreffende periode een aantal veranderingen hebben voorgedaan in het IJsselmeergebied die voor onze probleemstelling heel relevant zijn, zoals b.v. de aanleg van de Noord-Oostpolder en van de Flevopolderdijk, en omdat b.v. ook een variant met een ingepolderde Markerwaard bekeken moest worden zijn de geleverde gegevens resultaten van computerberekeningen uigaaende van een huidige situatie van het IJsselmeergebied onder een van de twee genoemde varianten. Deze berekende gegevens zijn gebaseerd op echte gemeten peilen op een aantal punten en gemeten afvoeren van rivieren en gemalen. Het spreekt voor zich dat er bij deze berekeningen benaderingen zijn gebruikt waardoor de data dus bestaan uit benaderde waarden waarvan we mogen veronderstellen dat ze in dit opzicht een homogene reeks vormen toegespitst op een huidige situatie onder een van de beide varianten (zie Rijkswaterstaat (1984)).

2.3. Gedurende het onderzoek hebben we drie tapes met data ontvangen waarvan we *de derde tape als basis voor onze analyses* hebben genomen. In de laatste paragraaf van deze sectie bespreken we kort de verschillen tussen deze tapes.

De door ons uiteindelijk verkozen derde tape bevatte als belangrijkste gegevens tweemaal per dag berekende gemiddelde meerpeilen in het IJsselmeer en het Markermeer onder beide varianten over de hele periode 1 oktober - 1 april. Voor een overzicht van de overige gegevens zie appendix I.1. Het grootste deel van onze analyses betrof de 34 maxima van deze peilen over de periode 1 oktober - 1 april, alsmede de 34×6 maxima per maand. Deze maxima zijn te vinden in appendix I.2.

2.4. De gegevens die we in eerste instantie hebben ontvangen op de eerste tape besloegen niet de hele periode 1 oktober - 1 april maar slechts een kleiner deel ervan waarin het maximale peil van die winterperiode optrad. Een overzicht van de perioden waarvan we de gegevens op de eerste tape ontvingen is gegeven in appendix I.3 en een grafische voorstelling van de data van twee zulke perioden (Markerwaardvariant) is te vinden in appendix I.4.

Aangezien zowel de wind, en daarmee de lozingen door de afsluitdijk, als de afvoer van de IJssel tijdsafhankelijk is, leek het ons noodzakelijk dat we niet alleen de gegevens over deelperioden zouden hebben maar 34 tijdreeksen over de hele winterperiode 1 oktober - 1 april. Toen deze reeksen geleverd waren op een tweede tape bleken ze op de overeenkomstige tijdstippen niet overeen te stemmen met de gegevens van de eerste tape, wat na nader overleg met Rijkswaterstaat bleek te zijn veroorzaakt doordat bij de berekeningen van de data een lopend gemiddelde berekend was over de zogenaamde restterm in de berekeningen. Aangezien we ons speciaal interesseerden voor extreme peilen leek dit lopend gemiddelde ons zeer ongewenst. De

derde tape bestond uit dezelfde gegevens als de tweede tape met dit verschil dat ze deze keer berekend waren zonder lopend gemiddelde over de restterm. Achteraf bleken de extreme meerpeilen op de derde tape niet veel te verschillen van de peilen op de tweede tape. Voor een illustratie hiervan zie appendix I.5.

Zoals eerder vermeld hebben we de derde tape als basis voor onze berekeningen genomen. Om de mogelijkheid te bieden enig inzicht te verkrijgen over het verschil in de twee laatste tapes zijn in de appendices ook sommige dingen voor de tweede tape berekend.

3. EEN AANTAL MODELLEN.

3.1. Een van de mogelijke manieren om de gevraagde quantielen te bepalen is de volgende. Beschouw de 34 jaarmaxima van de gemiddelde meerpeilen P . Veronderstel dat dit 34 onafhankelijke realisaties zijn van stochasten M_1, \dots, M_{34} die allen gelijke verdelingsfunctie F hebben en los de volgende vergelijking op

$$F(x_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} P(M \leq x_\alpha) = \alpha, \quad (3.1)$$

voor $\alpha = 1 - 10^{-1}, 1 - 10^{-2}, 1 - 10^{-3}$ en $1 - 10^{-4}$. De zo bepaalde waarden x_α zijn dan de gevraagde quantielen. Het probleem is hierbij natuurlijk welke verdelingsfunctie F we in de vergelijking (3.1) moeten invullen. Het zal blijken dat deze keuze heel veel invloed heeft op de waarden x_α , zeker voor α dicht bij 1. Alvorens we een aantal specifieke modellen, dwz. keuzen voor F , zullen bespreken maken we eerst wat algemene opmerkingen.

3.2. In de meest ideale situatie weten we op fysische gronden wat voor verdeling M heeft of tot welke familie van verdelingen F behoort, b.v. de familie van de exponentiele verdelingen. In het eerste geval kunnen de waarden x_α direct berekend worden. In het tweede geval kan men, veronderstellende dat M b.v. exponentieel verdeeld is, de parameters van de betreffende exponentiele verdeling schatten op grond van de data en vergelijking (3.1) oplossen met de geschatte verdelingsfunctie op de plaats van F . Het spreekt vanzelf dat we van de geschatte verdelingsfunctie dan alleen maar willen dat hij voor grote waarden van x_α goed lijkt op de echte verdelingsfunctie.

In ons geval hebben we niet een dusdanig inzicht in de fysische omstandigheden dat we in een van de twee bovenstaande gevallen verkeren. We kunnen niet op puur fysische gronden aannemen dat de staart van de verdeling van M b.v. exponentieel is, of normaal.

3.3. Een andere beargumentering van een bepaalde familie van verdelingen waar F toe zou moeten behoren zou geleverd kunnen worden door de zogenaamde *extreme waarden theorie* (zie b.v. Leadbetter, Lindgren en Rootzén (1983)). Deze theorie behandelt de verdeling van maxima van grote steekproeven. Onder zekere voorwaarden bestaat de limiet verdeling van de stochasten

$$M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i \quad (3.2)$$

voor $n \rightarrow \infty$ en behoort deze tot een van drie families van verdelingen, de Fisher-Tippett typen I, II en III die overeenkomen met de Gumbel verdelingen op $(-\infty, \infty)$, de Fréchet verdelingen op $[x_0, \infty)$ en de "omgeklapte" Weibull verdelingen op $(-\infty, x_0]$, waarbij x_0 een willekeurige drempelwaarde is. De laatste twee families zijn drie parameter families en de Gumbel verdelingen vormen een twee parameter familie. Bij de klassieke versie van deze zogenaamde extreme waarden stelling wordt verondersteld dat X_1, X_2, \dots, X_n onafhankelijke gelijk verdeelde stochasten zijn. Hierbij zijn in ons geval de X_i de dagelijkse waterstanden en is M_n een jaarmaximum of een maandmaximum. De stelling blijkt echter ook te gelden voor andere steekproeven, bv. voor stationaire steekproeven waarbij de onafhankelijkheid niet meer wordt vereist. In ons geval weten we echter dat het proces van de gemiddelde peilen P in de winterperiode niet stationair is, en we hebben ook geen andere theoretische rechtvaardiging waarom de extreme waarden stelling hier zou gelden. We beschouwen de drie typen extreme waarden verdelingen dan ook naast een aantal andere verdelingen als mogelijke verdelingen F van de jaarmaxima, dus zonder andere verdelingen uit te sluiten.

Aangezien de drie extreme waarden verdelingen samen in te passen zijn in een grote familie van verdelingen, de gegeneraliseerde extreme waarden verdeling (GEV), hoeven we ze niet apart te behandelen bij het schatten van de quantielen. Wel zullen we onderzoeken of we niet net zo goed alleen de Gumbel verdeling hadden kunnen gebruiken.

3.4. Zoals eerder reeds vermeld zijn we eigenlijk alleen geïnteresseerd in de rechterstaart van de verdeling van M . We moeten daarom naast *enkelvoudige modellen*, waarbij we aannemen dat F in z'n geheel behoort tot een bepaalde klasse van verdelingen, ook rekening houden met *samengestelde modellen* waarbij we veronderstellen dat de verdelingsfunctie F vanaf een bepaalde waarde d een staart heeft uit een bepaalde klasse van verdelingen, b.v. een exponentiele staart.

In de volgende sectie bespreken we een aantal specifieke modellen voor de jaarmaxima. De daarop volgende sectie bevat een analyse van de maxima over de zes maanden, oktober, ..., maart, afzonderlijk.

3.1. Modellen voor de jaarmaxima.

3.5. Als eerste stap bij het zoeken naar modellen hebben we de 34 jaarmaxima uitgezet op waarschijnlijkheidspapier voor zes verschillende typen verdelingen, te weten normaal, exponentieel, Gumbel, Fréchet, Weibull en lognormaal papier. Voor een beschrijving van het gebruik van waarschijnlijkheidspapier en een verklaring van de plotjes zie VAN ES en VAN PUTTEN (1983). De plotjes zijn gemaakt voor zowel het IJsselmeer, het Markermeer en het randmeer van de eventuele Markerwaard. Om het mogelijk te maken de verschillen te bekijken tussen de tweede en de derde tape hebben we naast de plotjes van de data op de derde tape ook enige plotjes van de data op de tweede tape in appendix III.1. opgenomen. We beschouwen hier nu verder alleen het *IJsselmeer bij de Markermeervariant*.

Op grond van de plotjes hebben we besloten de volgende modellen te behandelen: het samengestelde exponentiele model, het GEV model en het normale model. Verder zullen we nog enige opmerkingen maken over de overige plots.

Vaak wordt het normale model bij dit soort onderzoeken niet in aanmerking genomen. We hebben dit model echter op grond van onze 34 jaarmaxima niet kunnen verwerpen. Evenmin hebben we hiervoor een fysische reden.

3.6. In het vervolg duiden we met F_n de empirische verdelingsfunctie aan van een steekproef X_1, \dots, X_n

$$F_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{aantal } X_j \leq x}{n} \quad (3.3)$$

Bij ons zijn X_1, \dots, X_n de maximale peilen en is n gelijk aan 34. Waarschijnlijkheidspapier plaatjes (probability plots) zijn niets anders dan getransformeerde grafieken van F_n . Bij de door ons gegeven plotjes is in feite een licht aangepaste versie van F_n gebruikt (zie VAN ES & VAN PUTTEN (1983)).

3.1.1. Het samengestelde exponentiele model.

3.7. We veronderstellen in dit model dat de verdelingsfunctie F van de 34 jaarmaxima voldoet aan

$$1 - F(x) = e^{-\lambda(x-\mu)} \text{ voor } x \geq d \quad (3.4)$$

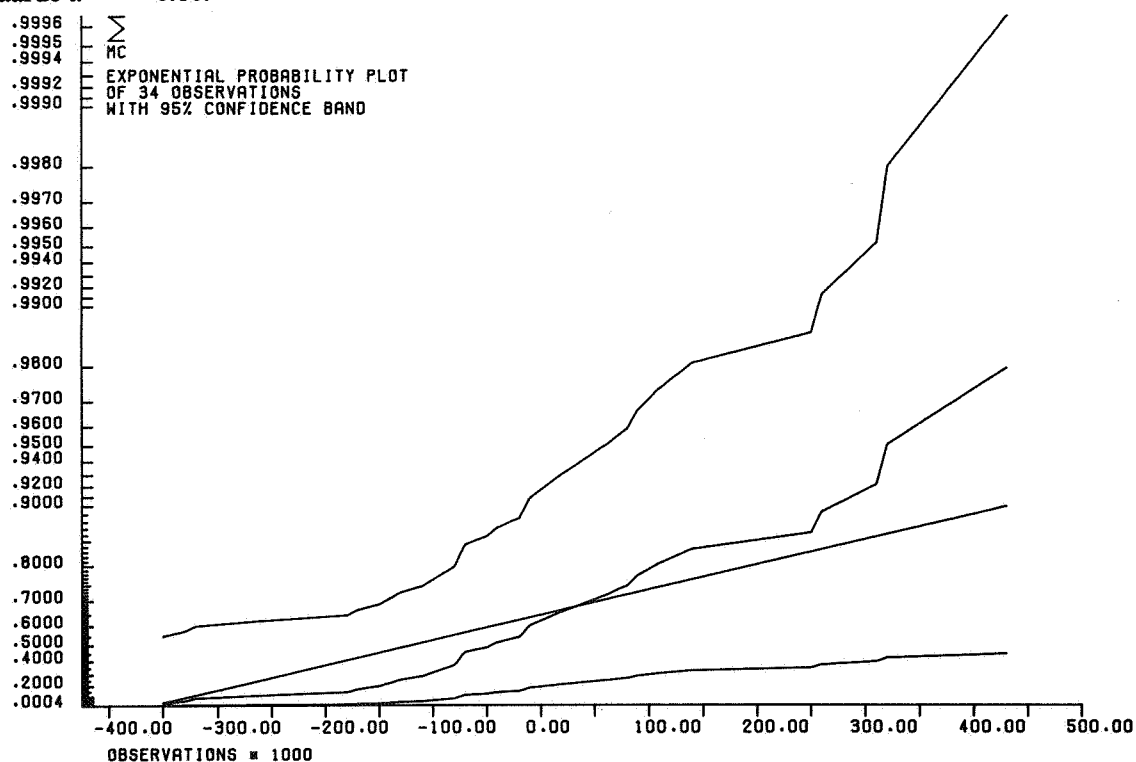
($\lambda \geq 0, -\infty < \mu < \infty$).

Zij $E(x) = 1 - e^{-x}$ ($x \geq 0$) de standaard Exponentiele verdelingsfunctie dan is $E^{-1}(F(x))$ vanaf d een rechte lijn.

$$E^{-1}(F(x)) = -\ln(1 - F(x)) = \lambda(x - \mu) \text{ voor } x \geq d \quad (3.5)$$

In de onderstaande plot is $-\ln(1 - F_n(x))$ uitgezet tegen x . Op grond van deze plot hebben we besloten tot

een waarde $d = -0.10$.



FIGUUR 3.1. Jaarmaxima IJsselmeerpeilen (tape 3, Markermeervariant).

Het is eenvoudig in te zien dat als de verdeling van een stochast X voldoet aan (3.4) dat $X|X \geq d$ weer exponentieel verdeeld is, immers voor $x \geq d$ geldt

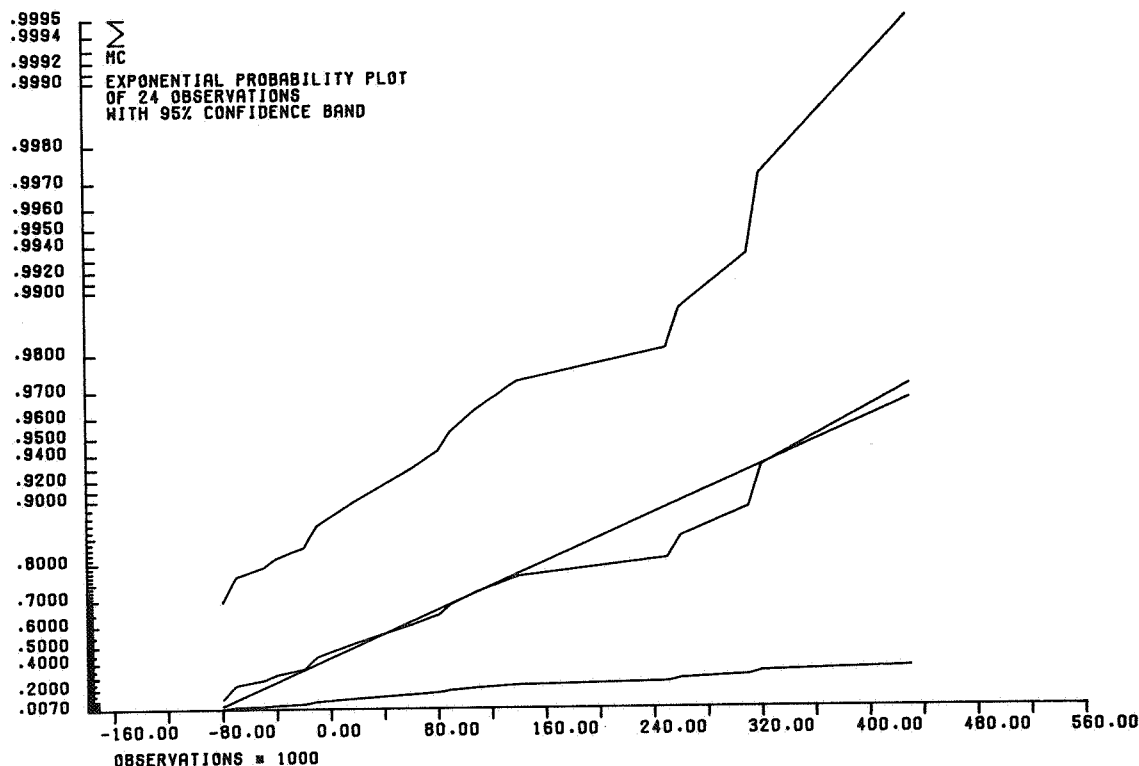
$$P(X > x | X \geq d) = P(X > x) / P(X \geq d) = e^{-\lambda(x-d)} \quad (3.6)$$

Hieruit volgt dat we de parameter λ kunnen schatten op grond van de steekproef van de waarnemingen groter of gelijk aan $d = -0.10$. Dit suggereert de schatter

$$\hat{\lambda} = 1 / (\bar{x}_{\geq d} - d), \quad (3.7)$$

waarbij $\bar{x}_{\geq d}$ het gemiddelde is van de waarnemingen groter of gelijk aan d .

De onderstaande plot is een plot van deze waarnemingen (bij $d = -0.10$ zijn het er 24).



FIGUUR 3.2. Jaarmaxima IJsselmeerpeilen ≥ -0.10 (tape 3, Markermeervariant).

3.8. Voor toetsing van dit model hebben we gebruik gemaakt van twee toetsen die te vinden zijn in Stephens (1974, 1976) en de Cumulative Total Time on Test statistic te vinden in Barlow et al. (1972), pp. 263-271. De beide toetsen van Stephens zijn een aangepaste Kolmogorov-Smirnov toets (KS) en een aangepaste Anderson-Darling toets (AD). Voor een korte beschrijving van deze toetsen zie appendix IV.1.

De nulhypothese die we toetsen zijn:

- H_0 : exponentialiteit, de jaarmaxima zijn $\text{Exp}(\mu, \lambda)$ verdeeld, μ en λ onbekend.
 H'_0 : exponentialiteit vanaf -0.10 , dwz. de jaarmaxima $+ 0.10$ zijn $\text{Exp}(0, \lambda)$ verdeeld, λ onbekend.

We hebben H_0 getoetst door de toetsingsgrootheden van Stephens uit te rekenen voor de steekproef $X_1 - X_{\min}, X_2 - X_{\min}, \dots, X_{34} - X_{\min}$, waarbij de nul weggelaten is. Hierbij zijn X_1, \dots, X_{34} de jaarmaxima en is X_{\min} het kleinste jaarmaximum. Onder H_0 is deze nieuwe steekproef (omvang 33!) opnieuw exponentieel verdeeld, maar nu met drempelwaarde nul, zodat we de toetsen van Stephens kunnen toepassen. We geven de toetsingsresultaten voor het IJsselmeer bij Markermeervariant. Voor de ander gevallen zie appendix III.1.

	KS	AD	CTTT	aantal waarnemingen
H_0	1.788	3.693	4.101	33
H'_0	0.922	0.631	0.143	24
krit.waarden $\alpha = 0.05$	1.094	1.341	± 1.960	

Hypothese H_0 wordt door alle drie de toetsen verworpen op 5% niveau terwijl hypothese H'_0 door geen van de drie toetsen verworpen wordt. Op grond van deze resultaten kunnen we het samengestelde exponentiele model dus niet verwerpen.

3.1.2. Het GEV model.

3.9. De drie typen extreme waarden verdelingen kunnen worden beschreven door een drie parameter familie, de zogenaamde gegeneraliseerde extreme waarden verdeling (GEV)

$$F(x|\theta, x_0, \sigma) = \exp \left[- \left\{ 1 - \theta \left(\frac{x - x_0}{\sigma} \right) \right\}^{1/\theta} \right], \quad \sigma > 0, \quad (3.8)$$

waarbij x ligt in de volgende intervallen

$$-\infty < x \leq x_0 + \sigma / \theta \quad \text{als } \theta > 0 \quad (\text{"omgeklapte" Weibull})$$

$$-\infty < x < \infty \quad \text{als } \theta = 0 \quad (\text{Gumbel})$$

en

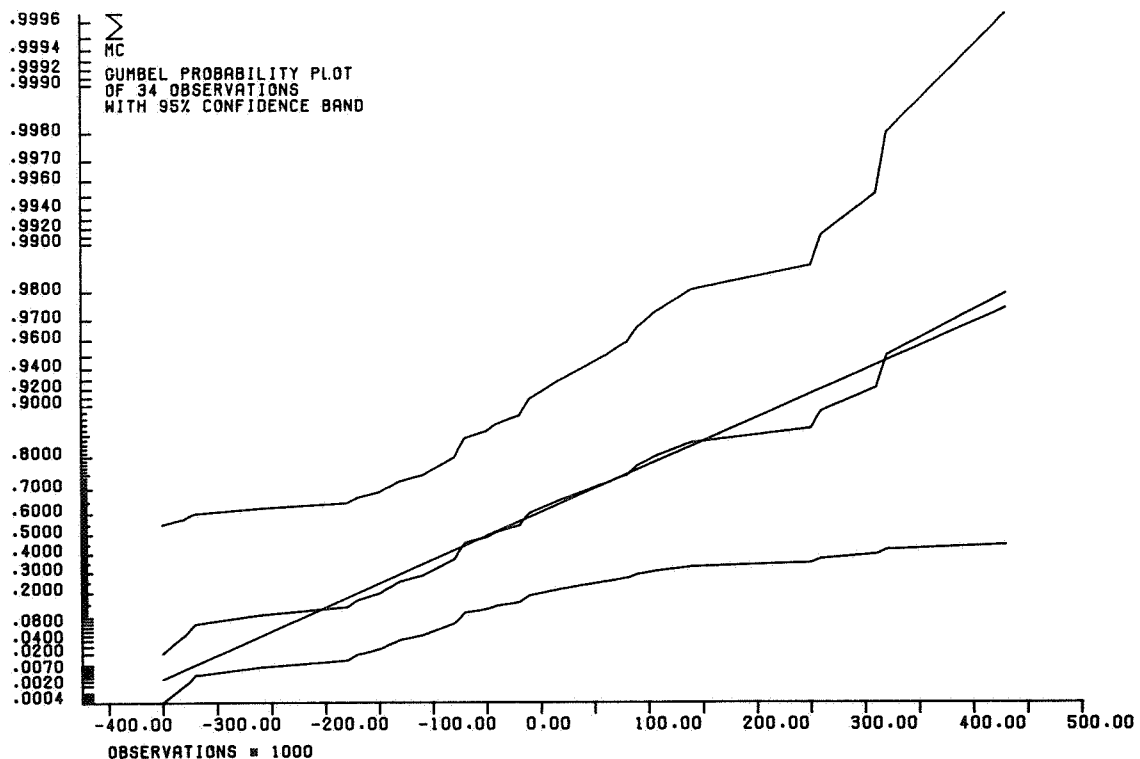
$$x_0 + \sigma / \theta \leq x < \infty \quad \text{als } \theta < 0 \quad (\text{Fréchet})$$

Merk op dat $\theta = 0$, Gumbel, een limietgeval is van de beide andere verdelingen, immers

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} F(x|\theta, x_0, \sigma) = \exp \left[- \exp \left(-(x - x_0) / \sigma \right) \right]. \quad (3.9)$$

Omdat maximale meerpeilen geen vaste bovengrens hebben sluiten we de omgeklapte Weibull verdeling uit als mogelijke kandidaat voor F , de verdeling van de jaarmaxima. We beschouwen dus alleen $\theta \leq 0$, dus Gumbel en Fréchet verdelingen.

Onder het Gumbel model is $-\ln(-\ln(F(x|0, x_0, \sigma)))$ een rechte lijn. In de volgende plot is $-\ln(-\ln(F_n(x)))$ uitgezet tegen x .

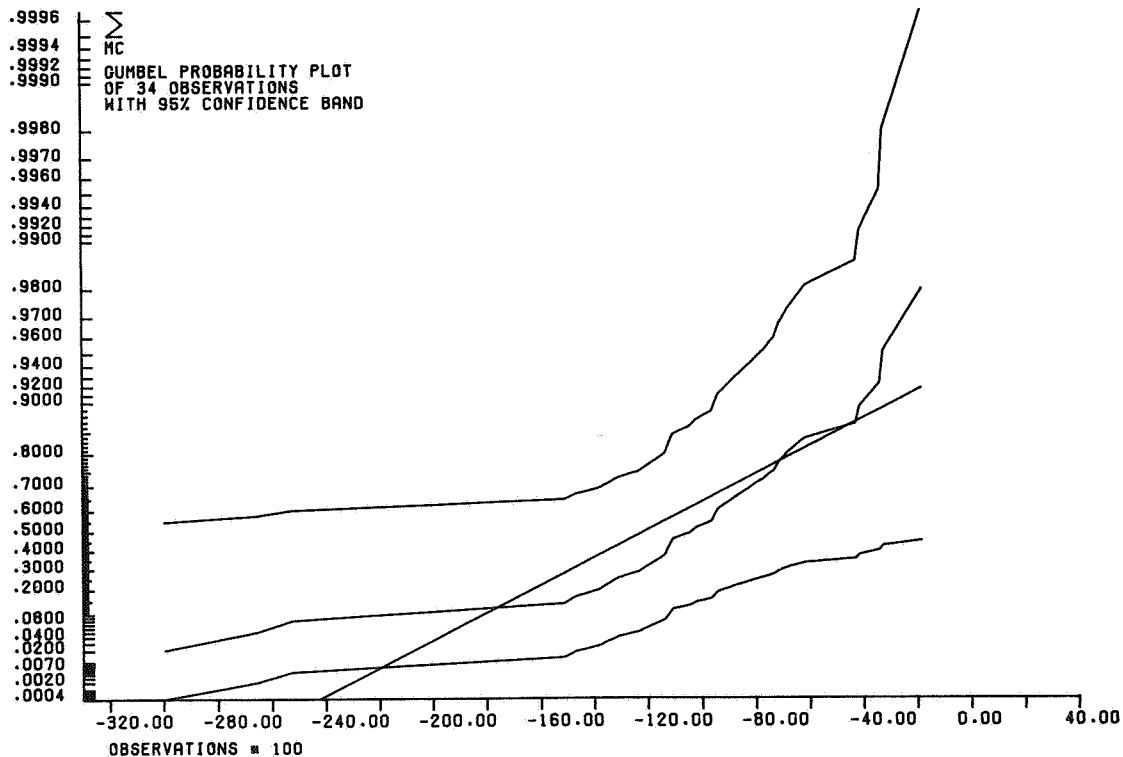


FIGUUR 3.3. Jaarmaxima IJsselmeerpeilen (tape 3, Markermeervariant).

Aangezien de Fréchet verdelingen een drie parameter familie vormen kunnen we een dergelijke plot niet direct maken in dat geval. Het kan echter wel als we de drempelwaarde $\mu = x_0 + \sigma/\theta$ zouden weten. Dan geldt immers voor een X die $F(x|\theta, x_0, \sigma)$, $\theta < 0$, verdeeld is

$$P(\ln(X - \mu) \leq x) = P(X \leq \mu + e^x) = F(\mu + e^x | \theta, x_0, \sigma) = \exp \left[-\exp \left(\frac{1}{\theta} (x + \ln(-\theta) - \ln \sigma) \right) \right]. \quad (3.10)$$

We zien dus dat $\ln(X - \mu)$ Gumbel verdeeld is. Als we nu de voor de hand liggende drempelwaarde $\mu = -0.40$ (streefpeil) kiezen en de getransformeerde jaarmaxima uitzetten op Gumbel papier dan verkrijgen we de volgende plot.



FIGUUR 3.4. $\ln(\text{peilen} + 0.40)$, IJsselmeer (tape 3, Markermeervariant)

Het spreekt vanzelf dat de keuze voor -0.40 vrij willekeurig was en dat er misschien drempelwaarden zijn waarbij de grafiek rechter zou zijn geworden. Als we de drempel naar $-\infty$ laten gaan dan vinden we de Gumbelplot, Fig 3.3. weer terug. Bij het schatten van de parameters wordt de drempelwaarde ook mee geschat, hij is bij het schatten van de quantielen niet willekeurig gekozen!

Het schatten van de parameters met behulp van maximum likelihood schatters wordt beschreven in PRESCOTT and WALDEN (1980, a,b, 1983). Het toetsingsprobleem $\theta=0$ tegen $\theta \neq 0$, dwz. Gumbel tegen GEV alternatieven, wordt besproken in HOSKING (1984). Veel recente referenties zijn te vinden in EMBRECHTS et al. (1985).

3.10. We zullen ons nu concentreren op de vraag of de klassieke extrapolatiemethode van Gumbel in dit geval gerechtvaardigd is, dwz. of de Gumbel verdeling moeten gebruiken of een andere (extreme waarde) verdeling. We doen dit door Gumbel te toetsen tegen algemene alternatieven met drie toetsen van STEPHENS (zie STEPHENS (1977)) en een toets van Gumbel tegen GEV alternatieven aanbevolen in HOSKING (1984).

Voor toetsing van Gumbel tegen algemene alternatieven gebruiken we de toetsingsgrootheden W^2 , U^2 en A^2 te vinden in STEPHENS (1977). A^2 is een aanpassing van de Anderson-Darling toets en W^2 en U^2 zijn aanpassingen van twee andere klassieke goodness of fit toetsen (zie appendix IV.1). De nulhypothese is

H_0 : de jaarmaxima zijn Gumbel (μ, σ) verdeeld, μ en σ onbekend.

We geven de resultaten voor het IJsselmeer bij Markermeervariant. Voor de andere gevallen zie appendix III.2.

	W^2	U^2	A^2	aantal waarnemingen
H_0	0.074	0.071	0.534	34
krit.waarden $\alpha=0.05$	0.124	0.117	0.757	

Geen van deze drie toetsen verwerpt het Gumbel model op 5% niveau.

Voor de toetsing van Gumbel $(\theta=0)$ tegen GEV alternatieven $(\theta \neq 0)$ nemen we het artikel van Hosking als leidraad. In dit artikel wordt een aantal toetsingsgrootheden voor dit probleem vergeleken dmv. een simulatie studie. Uit deze studie kwam de modified likelihood ratio toets, MLR toets, naar voren als een van de beste voor kleine steekproeven. Voor een beschrijving van de MLR toets zie appendix IV.3.

De berekende waarde van de toetsingsgrootheid T_{LR}^* is

$$T_{LR}^* = 1.57 \quad (n=34, L(X, \hat{\eta}) = 10.23, L(X, \tilde{\eta}) = 9.38). \quad (3.11)$$

De kritieke waarden voor $\alpha = 0.05$ en $\alpha = 0.10$ gebaseerd op de X_1^2 verdeling zijn respectievelijk 3.84 en 2.71. De nulhypothese (Gumbel) wordt dus noch bij eenzijdig toetsen noch bij tweezijdig toetsen verworpen op 5% niveau.

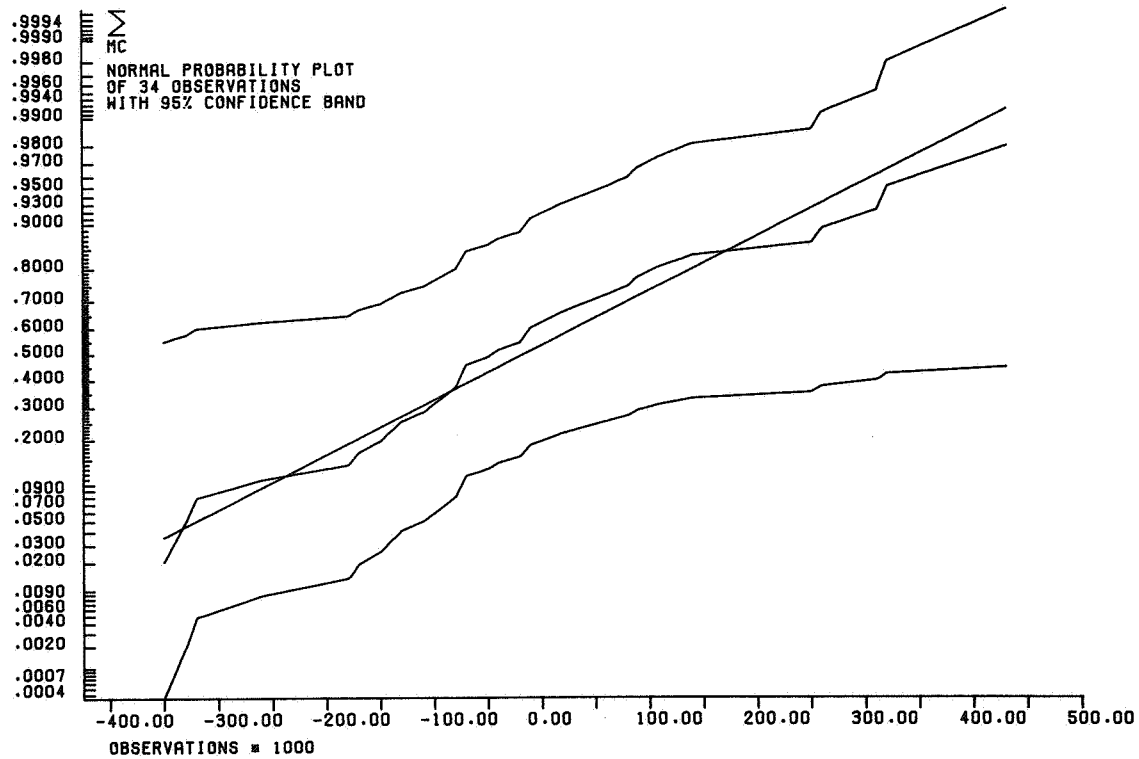
3.1.3. Het normale model.

3.11. Zij Φ de standaard normale verdelingsfunctie $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$.

Als $F_{\mu, \sigma}$ een $N(\mu, \sigma^2)$ verdelingsfunctie is, dwz. normaal met verwachting μ een variantie σ^2 , dan is $\Phi^{-1} F_{\mu, \sigma}$ een rechte lijn, immers zij X $N(\mu, \sigma^2)$ verdeeld dan

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(F_{\mu, \sigma}(x)) &= \Phi^{-1}(P(X \leq x)) = \Phi^{-1}(P((X - \mu) / \sigma \leq (x - \mu) / \sigma)) = \\ &= \Phi^{-1} \Phi((x - \mu) / \sigma) = (x - \mu) / \sigma. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De volgende grafiek is een grafiek van $\Phi^{-1}(F_n(x))$ uitgezet tegen x .



FIGUUR 3.5. Jaarmaxima IJsselmeerpeilen (tape 3, Markermeervariant).

De maximum likelihood schatters van de parameters μ en σ zijn $\hat{\mu} = \bar{x}$, het steekproefgemiddelde, en $\hat{\sigma} = s$, de steekproef standaarddeviatie.

3.12. Voor toetsing van dit model hebben we net als bij het samengestelde exponentiele model een aangepaste Kolmogorov - Smirnov toets (KS) en een aangepaste Anderson-Darling toets (AD) (STEPHENS 1974, 1976) gebruikt.

De nulhypothese die getoetst wordt is

H_0 : de jaarmaxima zijn normaal verdeeld, μ en σ onbekend.

We geven het resultaat voor het IJsselmeer bij de Markermeervariant. Voor de overige gevallen zie appendix III.3.

	KS	AD	aantal waarnemingen
H_0	0.615	0.498	34
krit.waarde $\alpha=0.05$	0.895	0.787	

kurtosis = -0.188 , skewness = 0.398.

Voor een beschrijving van een eenvoudige toets op normaliteit, gebaseerd op de skewness en kurtosis zie BICKEL and DOKSUM (1977). De bijbehorende kritieke waarden zijn te vinden in PEARSON and HARTLEY (1970). Geen van de berekende waarden gaf aanleiding tot verwerpen van de normaliteit op 5% niveau.

3.1.4. Overige modellen.

3.13. Naast de reeds eerder besproken plotjes zijn in appendix II.1.1. ook een Weibull en een lognormale probability plot te vinden. Hoewel de lognormale plot vanaf een bepaalde waarde een vrij rechte lijn laat zien hebben we dit model toch niet besproken. Dit heeft als reden dat de lognormale verdeling voor sommige waarden van haar parameters een redelijk exponentiele rechterstaart heeft (zie NELSON (1982), p. 34). We hebben de parameters van de lognormale verdeling ruw geschat en haar parameters wezen inderdaad op een exponentiele staart. Verdere bespreking van dit model had ons inziens niet veel zin omdat dit naast het Gumbel en het samengestelde exponentiele model het derde model van dit type zou zijn.

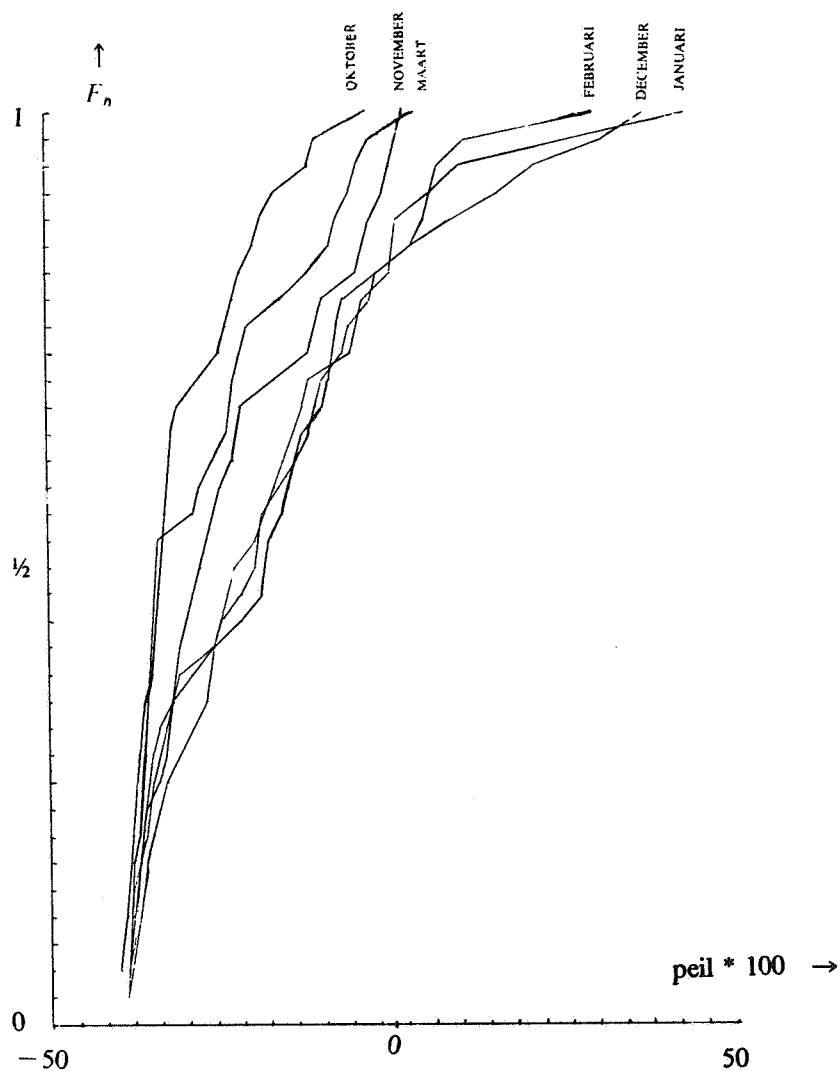
We kunnen de mogelijke voor ons extrapolatie probleem relevante modellen ruwweg indelen in vier typen al naar gelang de rechterstaart voldoet aan een van de volgende voorwaarden (afgezien van locatie en schaalparameters):

- (i) $1-F(x) \sim x^{-\gamma}$, $x \rightarrow \infty$ ($\gamma > 0$), (b.v. Fréchet)
- (ii) $1-F(x) \sim e^{-x}$, $x \rightarrow \infty$ (b.v. Gumbel, sam. exp.)
- (iii) $1-F(x) = 0$ voor $x \geq \mu$ (b.v. omgeklapte Weibull)
- (iv) $1-F(x) \sim e^{-x^\gamma}$, $x \rightarrow \infty$ ($\gamma > 0$) (b.v. Weibull).

De gevallen i), ii) en iii) zijn bevat in het GEV model. Hoewel het door ons ook beschouwde normale model strikt genomen niet onder iii) of iv) valt, immers $1-\Phi(x) \sim (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, heeft dit model wel met de modellen iii) en iv) (met $\gamma > 1$) gemeen dat het een rechterstaart heeft die dunner ("lighter tails") is dan bij modellen die onder i) en ii) vallen. Aangezien we bij eerdere analyses van data op de eerste tape onder het normale model vrijwel dezelfde (weliswaar ruwe) schattingen van de quantielen kregen als onder het Weibull model hebben we het veel ingewikkeldere Weibull model niet verder bekeken.

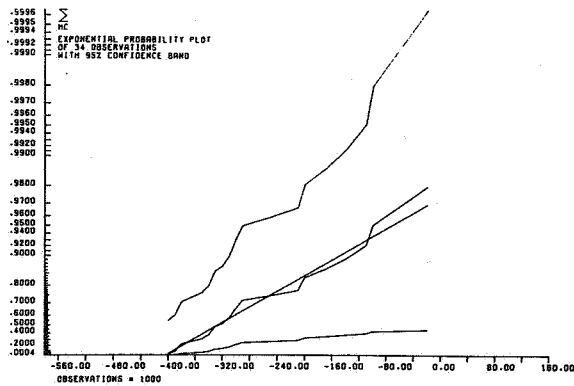
3.2. Analyse van de maandmaxima.

3.14. Om enig inzicht te verkrijgen in de tijdsafhankelijkheid van de peilen hebben we naast de jaarmaxima ook maandmaxima berekend, dwz. we beschouwen de zes steekproeven van maximale peilen in oktober, november, etc. De steekproeven zijn te vinden in appendix I.2.2. Van deze steekproeven hebben we de empirische verdelingen, zie (3.3), berekend.

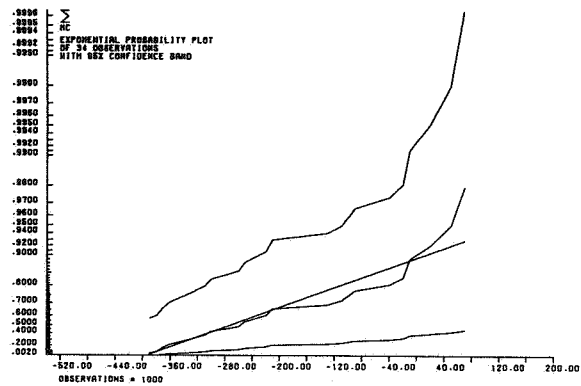


FIGUUR 3.6. *Empirische verdelingen maandmaxima.*

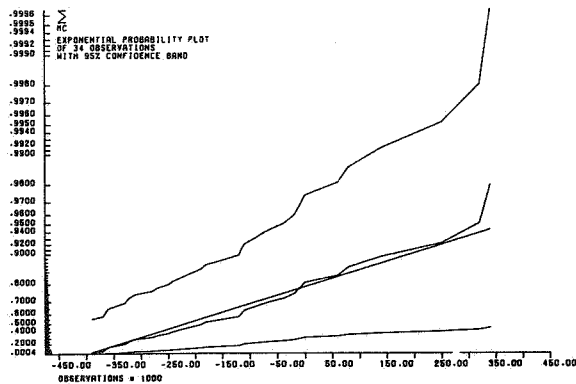
Uit deze figuur blijkt al dat de maximale peilen over de maanden december, januari en februari ongeveer gelijkverdeeld zijn en beduidend hoger zijn dan de maximale peilen over de overige drie maanden. Om enig inzicht te verkrijgen in de vorm van de verdelingen hebben we ook exponentiele plots gemaakt.



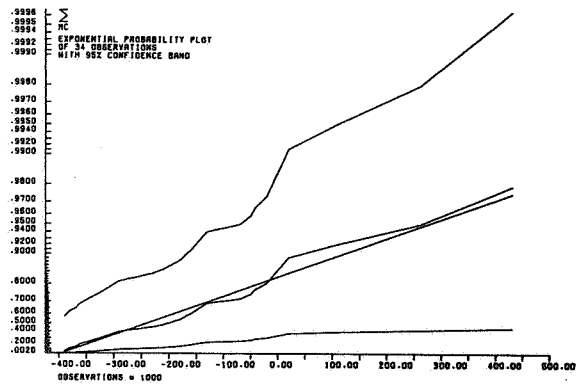
oktober



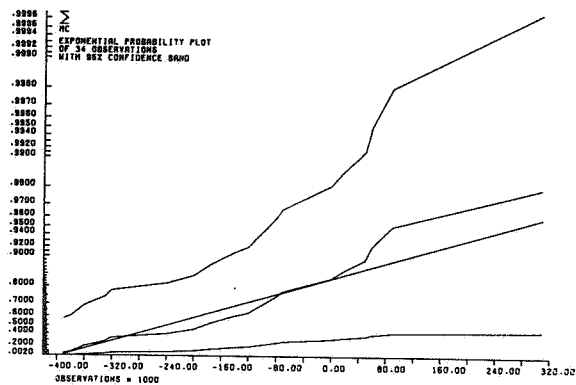
november



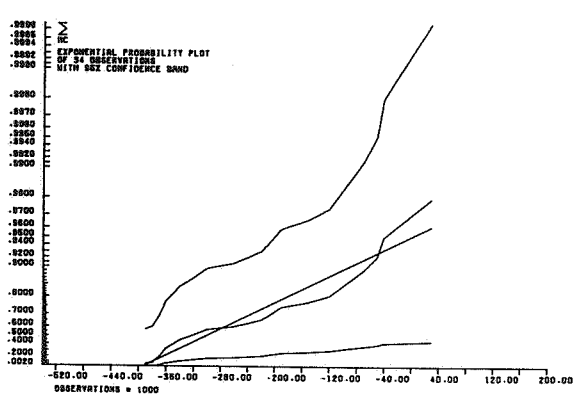
december



januari



februari



maart

FIGUUR 3.7. Exponentiele propability plots van de maandmaxima.

We waarschuwen ervoor dat de schalen op de horizontale assen niet gelijk zijn. De hellingen van de empirische verdelingen kunnen dus niet vergeleken worden. Deze plots zijn in groter formaat ook te vinden in appendix II.2.1., evenals de plots voor de andere variant en de tweede tape.

Onder de aanname dat de maandmaxima $\text{Exp}(\mu, \lambda)$ verdeeld zijn hebben we de parameters μ en λ als volgt geschat. De maximum likelihood schatters voor μ en $1/\lambda$ zijn X_{\min} en $\bar{X} - X_{\min}$ waarbij X_{\min} de kleinste waarneming is en \bar{X} het gemiddelde van de waarnemingen. X_{\min} is echter geen zuivere schatter voor μ . Als zuivere schatter voor μ nemen we

$$\hat{\mu} = (nX_{\min} - \bar{X}) / (n-1) = X_{\min} - \frac{\bar{X} - X_{\min}}{n-1} \quad (3.13)$$

(zie JOHNSON and KOTZ, p. 211).

Dit levert de volgende schattingen.

	okt.	nov.	dec.	jan.	feb.	maart
X_{\min}	-0.40	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39
$1/\hat{\lambda} = \bar{X} - X_{\min}$	0.11	0.17	0.25	0.22	0.21	0.13
$\hat{\mu}$	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	-0.39

Voor soortgelijke tabellen voor de andere varianten zie appendix III.4.

Uit deze tabel blijkt dat het afronden op twee decimalen (centimeters) nogal wat invloed heeft. Als we bv. λ schatten met $(\bar{X} - X_{\min})^{-1}$ dan heeft bv. een afwijking van 0.01 in de kleinste waarneming X_{\min} een grote verandering tot gevolg in de schatting van λ . Aangezien alleen de factor $1/\lambda$ voorkomt in de quantienschattingen onder het (samengestelde) exponentiele model heeft dit voor de quantielen nauwelijks invloed.

We hebben de exponentialiteit van de maandmaxima niet kunnen toetsen vanwege problemen met het grote aantal samenvallende waarnemingen. Het lijkt ons raadzaam na te gaan of hiervoor een reden is en bij het ontbreken daarvan een toets te ontwikkelen die rekening houdt met samenvallende waarnemingen.

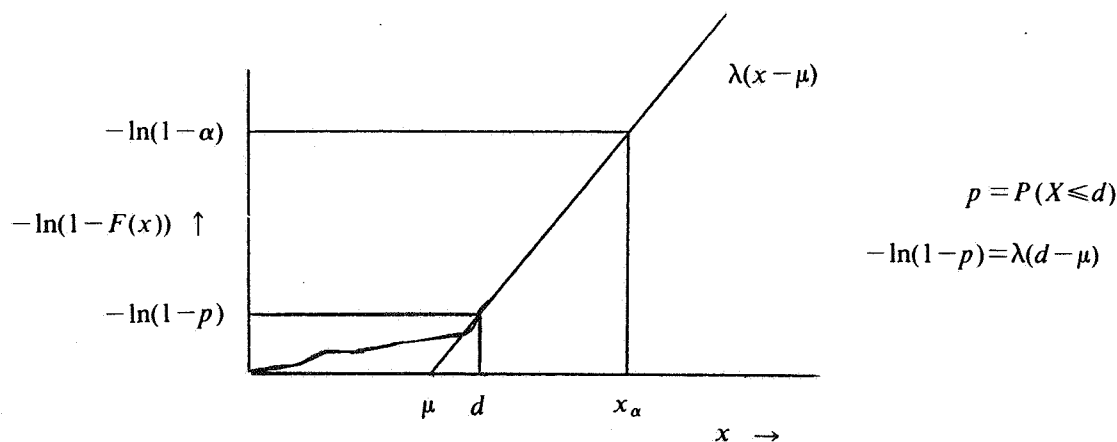
4. SCHATTINGEN VAN DE PARAMETERS EN DE QUANTIENEN.

4.1. We bespreken eerst de methoden waarmee we de parameters en de quantielen hebben geschat in de door ons verkozen drie modellen. Het schatten van de quantielen berust op het oplossen van vergelijking (3.1) en het invullen van de parameterschattingen. We geven daarna de resultaten voor de parameters in tabel 4.1 en voor de quantielen in tabel 4.2. De tabellen betreffen het IJsselmeer bij de Markermeervariant. Voor de overige varianten zie appendix III.4. De wiskundige afleiding van de asymptotische betrouwbaarheidsintervallen is te vinden in appendix IV.4.

4.1. Het samengestelde exponentiele model.

4.2. In paragraaf 3.1.1. hebben we reeds vermeld dat onder het samengestelde exponentiele model $-\ln(1-F(x))$ een rechte lijn is vanaf d .

Om de quantielen te schatten beschouwen we de volgende grafiek.



We lossen nu de vergelijking (3.1) voor het α quantiel op:

$$\begin{aligned} \alpha &= F(x_\alpha) && \Leftrightarrow \\ -\ln(1-\alpha) &= -\ln(1-p) + \lambda(x_\alpha - d) && \Leftrightarrow \\ x_\alpha &= d + \frac{1}{\lambda} (\ln(1-p) - \ln(1-\alpha)) \end{aligned}$$

Als we λ schatten als in (3.7) en p met \hat{p} = fractie waarnemingen kleiner dan d dan nemen we als schatter voor x_α

$$\hat{x}_\alpha = d + \frac{1}{\hat{\lambda}} (\ln(1-\hat{p}) - \ln(1-\alpha)) \quad (4.1)$$

als schatting voor x_α .

In feite zijn dit de maximum likelihood schatters onder dit model.

4.2. Het GEV model.

4.3. We lossen wederom vergelijking (3.1) op

$$\begin{aligned} F(x_\alpha | \theta, x_0, \sigma) &= \alpha \Leftrightarrow \\ \exp \left[- \left\{ 1 - \theta \left(\frac{x_\alpha - x_0}{\sigma} \right) \right\}^{1/\theta} \right] &= \alpha \Leftrightarrow \\ x_\alpha &= x_0 + \frac{\sigma}{\theta} (1 - (-\ln \alpha)^\theta) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Merk op dat deze quantielen voor $\theta \rightarrow 0$ convergeren naar de Gumbel quantielen

$$\tilde{x}_\alpha = x_0 + \sigma (-\ln(-\ln \alpha)). \quad (4.3)$$

Onder beide modellen, Gumbel en GEV, kunnen we dmv. maximum likelihood de parameters schatten (zie JOHNSON and KOTZ (1970) en PRESCOTT and WALDEN (1980 a,b, 1983)). We vinden weer schatters voor x_α door deze schatters in te vullen in (4.2) en (4.3).

Onder het GEV model is het mogelijk een aantal kleinste waarden weg te laten bij het schatten van de parameters en te werken met een zogenaamde gecensureerde steekproef. We hebben het GEV model dan ook geschat op grond van alle waarnemingen en op grond van de waarnemingen die groter zijn dan -0.10 , dwz. waarbij de 10 kleinste waarnemingen niet meegenomen zijn in de schattingen. In feite hebben we niet de door Prescott en Walden aanbevolen Newton-Raphson iteratie methode gebruikt maar een maximaliserings routine uit NAG, net zoals in EMBRECHTS et al (1985).

4.3. Het normale model.

4.4. We vinden het α quantiel onder dit model als volgt

$$\begin{aligned}\alpha &= F_{\mu,\sigma}(x_\alpha) = \Phi((x_\alpha - \mu) / \sigma) \Leftrightarrow \\ x_\alpha &= \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)\end{aligned}\quad (4.4)$$

We maken nu schattingen \hat{x}_α van x_α door voor μ en σ de maximum likelihood schatters $\hat{\mu} = \hat{x}$ en $\hat{\sigma} = s$, het steekproefgemiddelde en standaarddeviatie in te vullen.

$$\hat{x}_\alpha = \bar{x} + s\Phi^{-1}(\alpha). \quad (4.5)$$

4.4. De schattingen.

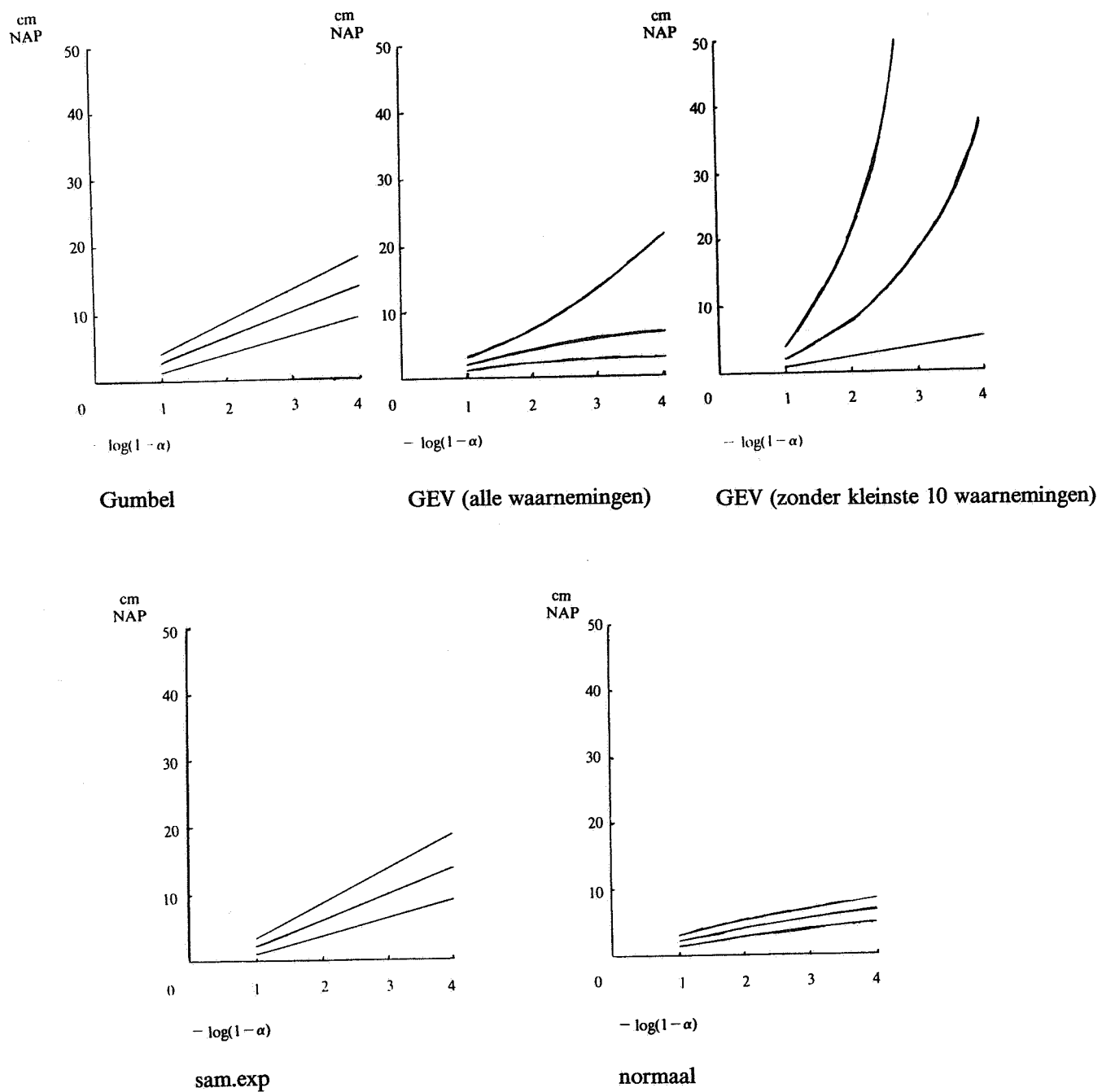
Samengesteld Exponentieel	Normaal
$\hat{p} = 0.2941$ $\hat{p}_L = 0.1409$ $\hat{p}_R = 0.4473$ $\lambda = 6.0453$ $\lambda_L = 4.3178$ $\lambda_R = 10.0769$	$\hat{\mu} = -0.0168$ $\mu_L = -0.0756$ $\mu_R = 0.0420$ $\hat{\sigma} = 0.1748$ $\sigma_L = 0.1333$ $\sigma_R = 0.2163$
GEV (op basis van alle gegevens) Dit leidt tot een schatting met een "omgeklapte" Weibull verdeling ($\hat{\theta} > 0$)	GEV (kleinste 10 weggelaten) Dit leidt tot een schatting met een Fréchet verdeling ($\hat{\theta} < 0$)
$\hat{x}_0 = -0.0896$ $x_{0L} = -0.1561$ $x_{0R} = -0.0182$ $\hat{\sigma} = 0.1680$ $\sigma_L = 0.1167$ $\sigma_R = 0.2152$ $\hat{\theta} = 0.1689$ $\theta_L = -0.1207$ $\theta_R = 0.4913$	$\hat{x}_0 = -0.0673$ $x_{0L} = -0.1003$ $x_{0R} = -0.0277$ $\hat{\sigma} = 0.0860$ $\sigma_L = 0.0552$ $\sigma_R = 0.1171$ $\hat{\theta} = -0.2834$ $\theta_L = -0.6425$ $\theta_R = 0.0674$
Gumbel	
$\hat{\mu} = -0.1045$ $\mu_L = -0.1644$ $\mu_R = -0.0426$ $\hat{\sigma} = 0.1630$ $\sigma_L = 0.1135$ $\sigma_R = 0.2085$	

TABEL 4.1 Schattingen van de parameters.

α	Samengesteld Exponentieel			Normaal		
	\hat{x}_α	x_α^L	x_α^R	\hat{x}_α	x_α^L	x_α^R
$1-10^{-1}$	0.22	0.09	0.35	0.22	0.14	0.30
$1-10^{-2}$	0.60	0.32	0.88	0.41	0.29	0.53
$1-10^{-3}$	0.99	0.55	1.43	0.56	0.41	0.71
$1-10^{-4}$	1.37	0.78	1.96	0.67	0.49	0.85
	GEV (op basis alle gegevens) Dit leidt tot een schatting met een "omgeklapte" Weibull verdeling ($\hat{\theta} > 0$)			GEV (kleinste 10 weggelaten) Dit leidt tot een schatting met een Fréchet verdeling ($\hat{\theta} < 0$)		
$1-10^{-1}$	0.20	0.11	0.31	0.21	0.07	0.39
$1-10^{-2}$	0.42	0.22	0.73	0.75	0.23	2.06
$1-10^{-3}$	0.57	0.26	1.32	1.78	0.37	8.81
$1-10^{-4}$	0.66	0.27	2.15	3.76	0.51	38.16
	Gumbel					
$1-10^{-1}$	0.26	0.12	0.40			
$1-10^{-2}$	0.65	0.40	0.88			
$1-10^{-3}$	1.02	0.67	1.36			
$1-10^{-4}$	1.40	0.94	1.84			

TABEL 4.2. *Schattingen van de quantielen.*

In de tabellen duiden de L en R als indices respectievelijk de 95% linker en rechter betrouwbaarheids grens aan. De betrouwbaarheidsintervallen voor de schattingen onder de beide GEV modellen en onder het Gumbel model zijn gemaakt dmv. de zogenaamde parametrische bootstrap (zie appendix IV.4), ipv. de asymptotische theorie voor maximum likelihood schatters te gebruiken. Uitgezet in grafiekjes ziet tabel 4.2. er als volgt uit.



FIGUUR 4.1. Grafische voorstelling van tabel 4.2.

De middelste lijnen geven de quantiëlschattingen aan en de twee daarom heen liggende lijnen de betrouwbaarheidsgrenzen.

5. CONCLUSIES.

5.1. We hebben in het voorafgaande onder een aantal verschillende modelveronderstellingen vier quantielen geschat van de verdeling van de jaarmaxima van de gemiddelde meerpeilen in het IJsselmeer bij de Markermeervariant. Uit tabel 4.2 en figuur 4.1 blijkt dat de keuze van het model een zeer belangrijke invloed heeft op de quantielschattingen. Onder het Gumbelmodel en het samengestelde exponentiele model krijgen we ongeveer gelijke schattingen omdat we in beide gevallen een exponentiele staart veronderstellen. De schattingen onder het normale model en het GEV model gebaseerd op alle waarnemingen komen ook vrij goed overeen, hetgeen gedeeltelijk verklaard kan worden uit het feit dat in het GEV model de geschatte verdeling een omgeklapte Weibull verdeling is met bovengrens $\hat{x}_0 + \hat{\sigma}/\hat{\theta} = 0.86$. Beide modellen hebben dus dunner rechterstaarten dan modellen met een exponentiele staart of modellen met een staart die als een macht van x naar nul gaat, dwz. $1-F(x) \sim x^{-\gamma}$ ($\gamma > 0$), zoals bij de Fréchet verdelingen.

Binnen het GEV model heeft het drastische consequenties of we de eerste tien waarnemingen wel of niet meenemen bij het schatten van de parameters en de quantielen. Uit de betrouwbaarheidsintervallen voor de parameter θ blijkt dat er bij het schatten op grond van 34 (24) waarnemingen nog een enorme variatie zit in de schattingen. Omdat de parameter θ zeer belangrijk is voor de vorm van de verdeling veroorzaakt dit ook een grote variatie in de quantiel schattingen.

Samengevat kunnen we stellen dat we op grond van de 34 jaarmaxima statistisch gezien geen onderscheid kunnen maken tussen de door ons beschouwde modellen.

5.2. We kunnen bij een steekproefomvang van 34 niet vertrouwen op de asymptotische normaliteit van de maximum likelihood schatters in het GEV model. In PRESCOTT and WALDEN (1980b) wordt gesteld dat we minstens 50 waarnemingen nodig hebben om te kunnen vertrouwen in de normale benadering. De auteurs baseren deze bewering echter op een beschouwing over het schatten van het $1-10^{-2}$ quantiel terwijl we kunnen verwachten dat voor een redelijke normaliteit van de schatters van de $1-10^{-3}$ en $1-10^{-4}$ quantielen nog meer waarnemingen nodig zijn. De door ons geconstrueerde bootstrap intervallen voor de quantielen en probability plots van de bootstrap steekproeven (zie appendix IV.4) bevestigen het feit dat 34 waarnemingen te weinig zijn om een redelijke normaliteit te garanderen.

5.3. We hebben onderzocht in hoeverre de extrapolatiemethode via de Gumbel verdeling gerechtvaardigd is op grond van onze steekproef van 34 jaarmaxima. Daartoe hebben we in eerste instantie de Gumbel verdeling getoetst tegen algemene alternatieven. Geen van de door ons uitgevoerde toetsen verwierpen de Gumbel verdeling op 5% niveau.

Vervolgens hebben we binnen het GEV model $\theta=0$ (Gumbel) getoetst tegen GEV alternatieven ($\theta \neq 0$). De op basis van de 34 maxima uitgerekende modified likelihood ratio toets verwierp Gumbel noch bij eenzijdig noch bij tweezijdig toetsen op 5% niveau. Een alternatieve toetsingsprocedure die ook bij de gecensureerde steekproef van de 24 grootste maxima hanteerbaar is kan worden gebaseerd op de bootstrapbetrouwbaarheidsintervallen. We verwerpen daarbij $\theta=0$ als 0 niet bevat is in het interval rond de schatting van θ . Dit is in geen van beide gevallen zo. Deze procedure komt echter neer op tweezijdig toetsen van $\theta=0$ tegen $\theta \neq 0$. Om op een soortgelijke manier ook eenzijdig te kunnen toetsen hebben we in de bootstrap steekproeven van de 1000 berekende schattingen van θ (zie appendix IV. 4.3) de fractie schattingen groter dan 0 berekend. Bij de schattingen op basis van alle gegevens was die fractie 0.906 en bij de schattingen op basis van de 24 grootste waarnemingen 0.048. Bij eenzijdig toetsen op 5% niveau van $\theta=0$ tegen $\theta > 0$ op basis van de gehele steekproef wordt $\theta=0$ dus niet verworpen ($1-0.906 > 0.05$), terwijl bij toetsing van $\theta=0$ tegen $\theta < 0$ (Fréchet) op basis van de 24 grootste waarnemingen we net in een grensgeval verkeren ($0.048 \approx 0.05$). Aangezien ook de bootstrapmethode een benadering is voor de kleine steekproeven verdeling van de schatter kunnen we op grond hiervan Gumbel niet echt verwerpen, maar er is wel een aanwijzing in de Fréchet richting. De Fréchet verdeling is een GEV verdeling met $\theta < 0$ en een vaste ondergrens. Deze verdeling was het resultaat bij het schatten onder het GEV model waarbij de kleinste 10 waarnemingen weggelaten waren.

5.4. Het kleine onderscheidingsvermogen tussen de modellen en de grote variatie in de schattingen worden

hoofdzakelijk veroorzaakt door het geringe aantal waarnemingen als we kijken naar jaarmaxima. Het verdient dan ook aanbeveling om na te gaan of er niet b.v. door een selectie van gevaarlijke situaties of door selectie van maxima over bepaalde opeenvolgende tijdsperioden een grotere steekproef gemaakt kan worden.

5.5. Indien op fysische gronden de normale verdeling acceptabel is, is ook deze verdeling niet strijdig met de waarnemingen.

APPENDIX I - DE DATA.

Appendix I.1. INHOUD VAN DE TAPES.

Tape indeling:

- Beschrijving (100 records)
- Gegevens betreffende de berekeningsvariant met Markerwaard en 1 groot randmeer (34 perioden, 1932-1965, elke winter 1 periode, in totaal 12474 records)
- Gegevens betreffende de berekeningsvariant met Markermeer (over dezelfde perioden, ook 12474 records totaal)

Elke periode bestaat uit de volgende records:

1e record: Beginndag (jjmddd) Einddag (jjmddd) Aantal-dagen
 Fortran-Format: 318

2e record

en verder: per dag 2 records met de volgende inhoud en Fortran-Formats:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J		2(F8.2,2F7.2,F8.2,;2F7.1)	
K	L	M	N	O	P	K	L	M	N	O	P	2(4F7.2,2F6.2)

A - neerslag IJsselmeer

B - waterbezwaar IJsselmeer

C - wateronttrekking IJsselmeer

D - restterm IJsselmeer

E - afvoer IJssel

F - afvoer Overijsselse Vecht

G - neerslag randmeer (bij de markermeer-variant: Markermeer)

H - waterbezwaar randmeer (resp. Markermeer)

J - restterm randmeer (resp. Markermeer)

K - geloosd Den Oever (uit IJsselmeer)

L - geloosd Kornwerderzand (uit IJsselmeer)

M - spui Enkhuizen (naar IJsselmeer)

N - spui Lelystad (naar IJsselmeer)

O - peil IJsselmeer in meters tov. nap

P - peil randmeer (Markermeer bij de markermeer-variant) in m tov. nap.

De velden K t/m P worden herhaald in het 2e dag-record: dit zijn hoeveelheden per halve dag, van resp. de ochtend en de middag.

De grootheden A t/m J zijn hoeveelheden per dag.

Alle grootheden zijn uitgedrukt in $10^6 m^3$ (miljoenen kubieke meters) tenzij anders vermeld (de peilen: O en P).

Appendix I.2. DE MAXIMALE PEILEN.

DERDE TAPE

Markermeer-variant , peil maxima per winterperiode

	datum	peil IJsselmeer	datum	peil Markermeer
1	321030	-0.02	321029	-0.08
2	331028	-0.33	331103	-0.33
3	350226	-0.14	341017	-0.34
4	360123	-0.07	360206	-0.17
5	370223	0.09	370225	0.01
6	380201	0.06	380207	-0.25
7	390125	-0.13	390126	-0.15
8	391205	0.14	391212	-0.04
9	401115	0.02	401213	-0.13
10	411217	-0.07	411102	-0.14
11	421025	-0.17	421105	-0.29
12	431201	-0.15	431201	-0.19
13	441206	0.32	441214	0.06
14	460224	0.31	460225	0.27
15	470329	-0.07	470325	-0.13
16	480115	0.26	480123	0.06
17	490111	-0.35	490228	-0.35
18	500216	-0.08	500222	-0.23
19	510120	0.02	501214	-0.07
20	511210	0.08	520122	-0.12
21	521112	-0.01	521227	-0.14
22	540117	-0.26	540312	-0.32
23	550212	-0.08	541116	-0.13
24	560125	-0.04	560128	-0.14
25	561216	-0.11	570223	-0.18
26	580220	-0.08	580308	-0.13
27	590125	0.11	590115	-0.04
28	600217	-0.32	600206	-0.34
29	601206	0.25	601210	0.12
30	611206	0.06	611214	0.02
31	621220	-0.18	621219	-0.22
32	631120	-0.01	631127	-0.12
33	650118	-0.05	650126	-0.22
34	660104	0.43	660105	0.25

DERDE TAPE

Markerwaard-variant , peil maxima per winterperiode

	datum	peil IJsselmeer	datum	peil Markermeer
1	321030	0.03	321029	-0.03
2	331028	-0.33	331103	-0.30
3	350226	-0.14	341017	-0.28
4	360123	-0.06	360206	-0.09
5	370223	0.11	370224	0.09
6	380201	0.08	380207	-0.20
7	390124	-0.11	390126	-0.07
8	391205	0.18	391212	0.01
9	401206	0.01	401212	-0.06
10	411217	-0.05	411030	-0.01
11	421025	-0.14	430104	-0.23
12	431201	-0.15	431201	0.06
13	441206	0.33	441209	0.14
14	460224	0.37	460225	0.40
15	470324	-0.03	470325	-0.06
16	480115	0.29	480111	0.20
17	490111	-0.35	490228	-0.32
18	500216	-0.04	500222	-0.15
19	510120	0.04	501208	0.03
20	511210	0.08	520120	-0.04
21	521112	-0.01	521113	0.00
22	540117	-0.26	540312	-0.27
23	541116	-0.06	541115	0.00
24	560125	-0.04	560126	-0.07
25	561216	-0.13	570115	-0.11
26	580305	-0.07	580307	-0.01
27	590125	0.11	590128	0.05
28	600217	-0.32	600206	-0.30
29	601206	0.27	601210	0.31
30	611206	0.11	611214	0.09
31	621220	-0.15	621219	-0.15
32	631123	0.03	631127	-0.05
33	650118	-0.06	650121	-0.09
34	660104	0.43	651214	0.30

MARKERMEER-VARIANT DERDE TAPE

Elke rij bestaat uit :

- nummer van het jaar (1 = 1932/1933).
- maximale peilen * 100 in het IJsselmeer resp. Markermeer per maand (oktober, november, december, januari, februari, maart, april)

N.B. code -99 (april) betekent: komt niet voor.

1	-2	-8	-4	-11	-33	-38	-37	-39	-28	-36	-38	-39	-99	-99
2	-33	-40	-34	-33	-39	-40	-36	-39	-35	-40	-36	-39	-99	-99
3	-33	-34	-37	-37	-36	-37	-33	-36	-14	-35	-31	-39	-99	-99
4	-29	-40	-30	-39	-19	-27	-7	-24	-8	-17	-37	-39	-40	-40
5	-25	-34	-21	-29	-2	-17	-18	-33	9	1	-4	-12	-99	-99
6	-38	-39	-35	-36	-37	-38	2	-28	6	-25	-37	-38	-99	-99
7	-14	-31	-31	-38	-28	-38	-13	-15	-33	-36	-35	-36	-99	-99
8	-21	-23	-2	-22	14	-4	-38	-40	-39	-40	-5	-15	-7	-16
9	-30	-34	2	-15	0	-13	-38	-30	-12	-23	-15	-18	-99	-99
10	-10	-15	-13	-14	-7	-17	-21	-28	-37	-36	-24	-28	-99	-99
11	-17	-30	-25	-29	-25	-35	-29	-29	-17	-31	-34	-38	-99	-99
12	-38	-39	-31	-37	-15	-19	-18	-29	-17	-31	-30	-36	-40	-40
13	-34	-38	7	-15	32	6	-34	-37	0	-21	-9	-20	-99	-99
14	-34	-38	-30	-27	-32	-32	-29	-25	31	27	3	16	-99	-99
15	-35	-33	-37	-36	-32	-37	-31	-36	-37	-38	-7	-13	-7	-14
16	-39	-38	-36	-40	-4	-21	26	6	5	-4	-37	-39	-39	-40
17	-36	-38	-39	-39	-36	-38	-35	-38	-36	-35	-39	-35	-99	-99
18	-38	-39	-28	-28	-12	-26	-31	-36	-8	-23	-26	-28	-99	-99
19	-30	-37	-21	-28	-1	-7	2	-7	-22	-23	-19	-24	-99	-99
20	-40	-40	-10	-21	8	-17	-2	-12	-14	-20	-36	-34	-40	-33
21	-33	-33	-1	-16	-11	-14	-13	-25	-24	-22	-36	-37	-99	-99
22	-39	-40	-39	-39	-36	-34	-26	-35	-34	-34	-33	-32	-99	-99
23	-11	-23	-9	-13	-9	-17	-13	-15	-8	-14	-35	-32	-99	-99
24	-31	-27	-33	-30	-19	-34	-4	-14	-38	-31	-19	-20	-40	-39
25	-29	-29	-25	-32	-11	-25	-16	-27	-17	-18	-21	-24	-99	-99
26	-30	-32	-22	-30	-31	-27	-16	-21	-8	-25	-9	-13	-99	-99
27	-31	-30	-36	-36	-24	-29	11	-4	-20	-13	-37	-32	-99	-99
28	-36	-40	-37	-38	-33	-37	-36	-35	-32	-34	-36	-36	-40	-47
29	-20	-16	5	-8	25	12	-23	-22	0	-5	-22	-29	-99	-99
30	-20	-29	-11	-25	6	2	2	-3	2	-17	-36	-36	-99	-99
31	-38	-37	-38	-37	-18	-22	-39	-39	-39	-40	-32	-27	-99	-99
32	-32	-36	-1	-12	-19	-18	-39	-35	-36	-32	-39	-34	-40	-38
33	-33	-30	-26	-35	-27	-30	-5	-22	-32	-33	-34	-34	-99	-99
34	-38	-39	-22	-29	34	24	43	25	-7	-14	-12	-14	-99	-99

MARKERWAARD-VARIANT DERDE TAPE

Elke rij bestaat uit :

- nummer van het jaar (1 = 1932/1933).
- maximale peilen * 100 in het IJsselmeer resp. Markermeer per maand (oktober, november, december, januari, februari, maart, april)

N.B. code -99 (april) betekent: komt niet voor.

1	3	-3	-3	-8	-33	-36	-37	-39	-26	-34	-38	-36	-99	-99
2	-33	-40	-34	-30	-39	-40	-34	-36	-34	-39	-36	-39	-99	-99
3	-32	-28	-37	-33	-36	-35	-33	-33	-14	-30	-31	-36	-99	-99
4	-29	-40	-30	-38	-15	-21	-6	-18	-6	-9	-37	-38	-40	-40
5	-26	-33	-21	-20	4	-4	-18	-25	11	9	-3	-11	-99	-99
6	-38	-37	-33	-34	-37	-38	4	-25	8	-20	-36	-39	-99	-99
7	-14	-28	-31	-36	-28	-36	-11	-7	-32	-36	-35	-33	-99	-99
8	-21	-17	0	-12	18	1	-38	-40	-38	-38	-2	-7	-4	-10
9	-30	-27	0	-9	1	-6	-37	-21	-12	-16	-12	-16	-99	-99
10	-7	-1	-13	-5	-5	-11	-26	-31	-37	-34	-22	-23	-99	-99
11	-14	-31	-24	-27	-25	-31	-27	-23	-16	-29	-34	-37	-99	-99
12	-38	-38	-31	-38	-15	6	-16	-26	-17	-19	-28	-35	-40	-40
13	-35	-36	11	-4	33	14	-33	-35	-1	-12	-8	-17	-99	-99
14	-34	-34	-29	-15	-31	-30	-27	-15	37	40	4	20	-99	-99
15	-33	-27	-36	-36	-32	-35	-30	-34	-38	-38	-3	-6	-8	-12
16	-39	-31	-38	-42	-9	-26	29	20	3	-1	-37	-37	-39	-40
17	-36	-35	-39	-38	-36	-37	-35	-38	-36	-32	-39	-33	-99	-99
18	-39	-36	-29	-23	-10	-20	-31	-36	-4	-15	-25	-28	-99	-99
19	-29	-34	-21	-19	0	3	4	0	-19	-20	-16	-13	-99	-99
20	-40	-41	-6	-17	8	-14	1	-4	-16	-14	-36	-27	-39	-30
21	-34	-28	-1	0	-9	-8	-12	-28	-21	-13	-36	-35	-99	-99
22	-39	-39	-39	-38	-36	-31	-26	-31	-33	-33	-32	-27	-99	-99
23	-9	-21	-6	0	-7	-5	-11	-6	-6	-12	-34	-21	-99	-99
24	-30	-23	-31	-30	-20	-30	-4	-7	-38	-38	-15	-11	-40	-35
25	-27	-24	-25	-24	-13	-17	-15	-11	-14	-12	-21	-18	-99	-99
26	-27	-29	-22	-25	-29	-16	-14	-11	-8	-10	-7	-1	-99	-99
27	-30	-26	-35	-32	-23	-26	11	5	-20	-10	-37	-23	-99	-99
28	-36	-40	-38	-35	-33	-38	-35	-32	-32	-30	-36	-34	-40	-51
29	-16	-10	11	2	27	31	-19	-16	2	1	-23	-30	-99	-99
30	-17	-20	-11	-15	11	9	6	6	0	-5	-36	-33	-99	-99
31	-38	-34	-38	-35	-15	-15	-39	-39	-39	-40	-31	-21	-99	-99
32	-32	-36	3	-5	-17	-14	-39	-31	-36	-24	-39	-25	-40	-36
33	-33	-24	-26	-31	-27	-25	-6	-9	-33	-31	-34	-30	-99	-99
34	-38	-38	-20	-25	38	30	43	29	-5	-4	-9	-14	-99	-99

MARKERMEER-VARIANT TWEDE TAPE

Elke rij bestaat uit :

- nummer van het jaar (1 = 1932/1933).
- maximale peilen * 100 in het IJsselmeer resp. Markermeer per maand
steeds bekeken vanaf de 15de.
dus : van 15/9 tot 14/10, van 15/10 tot 14/11,
van 15/11 tot 14/12, van 15/12 tot 14/1,
van 15/1 tot 14/2, van 15/2 tot 14/3 en van 15/3 tot 14/4.

1	-34	-39	-4	-10	-29	-33	-38	-39	-29	-36	-33	-36	-35	-39
2	-39	-40	-33	-34	-39	-39	-39	-41	-35	-38	-38	-40	-38	-39
3	-38	-39	-34	-35	-38	-40	-34	-36	-28	-37	-13	-36	-38	-40
4	-32	-38	-34	-38	-20	-28	-23	-37	-5	-16	-36	-37	-39	-39
5	-39	-36	-22	-37	-12	-24	-19	-32	-7	-15	11	0	-17	-22
6	-38	-38	-37	-38	-35	-36	-30	-39	7	-26	-38	-29	-36	-39
7	-17	-35	-17	-35	-27	-36	-33	-34	-13	-16	-34	-39	-36	-34
8	-39	-39	-22	-26	16	-6	-22	-19	-39	-47	-28	-35	-5	-16
9	-32	-35	0	-30	0	-16	-26	-27	-32	-34	-15	-18	-34	-33
10	-34	-38	-12	-14	-12	-31	-6	-17	-36	-37	-38	-39	-24	-27
11	-28	-37	-19	-30	-26	-35	-31	-32	-22	-35	-16	-32	-35	-38
12	-39	-40	-37	-40	-26	-31	-17	-31	-19	-31	-34	-37	-35	-39
13	-38	-40	-23	-33	31	9	1	4	-2	-36	-3	-21	-38	-40
14	-39	-37	-34	-32	-36	-36	-26	-37	14	2	30	23	-34	-28
15	-35	-38	-37	-35	-33	-37	-39	-37	-33	-36	-33	-38	-7	-12
16	-40	-40	-31	-38	-25	-34	26	0	26	6	-6	-4	-34	-39
17	-39	-40	-37	-39	-39	-39	-37	-39	-35	-38	-38	-38	-39	-38
18	-39	-40	-28	-36	-14	-28	-21	-35	-14	-37	-10	-20	-39	-38
19	-25	-34	-28	-37	-2	-10	-7	-9	1	-7	-22	-24	-22	-26
20	-39	-40	-38	-37	9	-20	-7	-22	0	-12	-27	-24	-36	-35
21	-34	-35	-4	-19	-11	-16	-11	-12	-26	-24	-35	-32	-39	-38
22	-40	-40	-38	-40	-39	-40	-35	-36	-25	-34	-35	-33	-39	-34
23	-27	-32	-11	-20	-10	-16	-10	-17	-9	-15	-9	-18	-35	-35
24	-36	-38	-34	-30	-34	-36	-19	-31	-6	-17	-21	-22	-32	-26
25	-32	-33	-32	-33	-20	-32	-14	-25	-21	-28	-18	-19	-23	-28
26	-24	-29	-23	-33	-35	-31	-20	-24	-13	-23	-8	-16	-26	-26
27	-38	-39	-31	-31	-38	-37	4	-7	10	-5	-36	-38	-39	-36
28	-40	-40	-37	-38	-39	-40	-34	-36	-37	-37	-33	-38	-39	-41
29	-25	-26	-3	-17	21	9	3	5	3	-13	-5	-9	-35	-38
30	-38	-40	-12	-26	3	-1	-8	-2	1	-7	5	-22	-37	-36
31	-40	-38	-38	-36	-33	-37	-22	-23	-39	-39	-33	-32	-29	-26
32	-33	-38	-31	-38	-1	-13	-38	-36	-34	-35	-39	-32	-39	-39
33	-39	-39	-34	-33	-27	-35	-20	-31	-4	-23	-35	-36	-34	-36
34	-39	-39	-31	-39	29	8	43	26	-20	-18	-7	-13	-21	-32

MARKERWAARD-VARIANT TWEEDE TAPE

Elke rij bestaat uit :

- nummer van het jaar (1 = 1932/1933).
- maximale peilen * 100 in het IJsselmeer resp. Markermeer per maand
steeds bekeken vanaf de 15de.
dus : van 15/9 tot 14/10, van 15/10 tot 14/11,
van 15/11 tot 14/12, van 15/12 tot 14/1,
van 15/1 tot 14/2, van 15/2 tot 14/3 en van 15/3 tot 14/4.

1	-35	-39	0	-5	-29	-36	-38	-38	-29	-30	-32	-31	-35	-37
2	-39	-40	-33	-32	-39	-34	-39	-37	-35	-37	-38	-39	-38	-40
3	-38	-37	-34	-30	-38	-39	-33	-34	-28	-35	-13	-32	-38	-40
4	-32	-36	-33	-37	-18	-23	-23	-32	-3	-9	-36	-33	-39	-38
5	-38	-35	-22	-36	-8	-15	-16	-30	-4	-3	13	12	-18	-23
6	-38	-37	-36	-36	-34	-35	-30	-39	7	-19	-37	-24	-36	-38
7	-17	-32	-17	-30	-26	-35	-32	-32	-10	-8	-34	-37	-35	-32
8	-39	-38	-21	-18	21	5	-23	-18	-39	-54	-27	-33	-2	-8
9	-33	-32	-1	-27	-1	-7	-27	-25	-31	-35	-14	-16	-36	-35
10	-34	-36	-9	-4	-10	-30	-5	-11	-36	-38	-38	-38	-22	-21
11	0	0	-17	-29	-26	-32	-30	-26	-22	-29	-14	-30	-35	-36
12	-39	-40	-38	-39	-25	-26	-16	-29	-19	-24	-32	-35	-35	-37
13	-38	-38	-22	-27	33	19	3	5	-1	-30	-1	-15	-38	-40
14	-39	-34	-34	-23	-36	-34	-26	-32	19	15	36	33	-36	-32
15	-35	-36	-37	-31	-33	-33	-38	-34	-32	-35	-33	-38	-5	-7
16	-39	-40	-36	-37	-33	-49	29	13	29	9	-4	0	-34	-38
17	-39	-38	-38	-39	-39	-39	-37	-37	-34	-36	-38	-35	-39	-34
18	-39	-40	-28	-34	-12	-21	-20	-33	-14	-34	-8	-10	-39	-37
19	-25	-33	-29	-34	-1	1	-4	-5	3	0	-19	-21	-22	-16
20	-39	-41	-38	-36	8	-16	-7	-20	4	-1	-25	-19	-37	-29
21	-34	-31	-4	-5	-5	-12	-9	-4	-24	-14	-35	-31	-39	-38
22	-40	-41	-39	-38	-39	-39	-35	-33	-25	-29	-34	-28	-39	-33
23	-25	-26	-8	-8	-8	-3	-9	-6	-7	-10	-9	-16	-35	-29
24	-36	-37	-32	-26	-34	-31	-20	-25	-7	-6	-18	-16	-31	-24
25	-32	-29	-32	-29	-21	-29	-14	-17	-21	-12	-15	-14	-24	-22
26	-21	-26	-24	-26	-34	-19	-19	-15	-11	-20	-6	-7	-26	-24
27	-38	-40	-30	-27	-38	-35	9	4	10	1	-36	-33	-39	-33
28	-40	-40	-37	-36	-39	-40	-34	-32	-37	-35	-34	-35	-39	-41
29	-21	-23	-5	-3	23	30	5	7	5	-1	-3	-2	-35	-35
30	-39	-40	-12	-21	7	8	-4	3	5	5	3	-6	-37	-36
31	-40	-37	-38	-34	-32	-32	-19	-18	-39	-38	-32	-30	-30	-18
32	-33	-37	-31	-37	1	-4	-38	-31	-34	-33	-39	-27	-39	-40
33	-39	-37	-35	-28	-27	-33	-19	-26	-4	-16	-35	-32	-34	-31
34	-39	-36	-31	-37	34	27	43	30	-19	-10	-5	-10	-22	-24

TWEEDE TAPE

Markermeer-variant , peil maxima per winterperiode

	datum	peil IJsselmeer	datum	peil Markermeer
1	321027	-0.04	321029	-0.10
2	331028	-0.33	331103	-0.34
3	350226	-0.13	341017	-0.35
4	360122	-0.05	360207	-0.16
5	370223	0.11	370225	0.00
6	380202	0.07	380207	-0.26
7	390124	-0.13	390126	-0.16
8	391205	0.16	391209	-0.06
9	401113	0.00	401212	-0.16
10	411217	-0.06	411102	-0.14
11	430216	-0.16	421105	-0.30
12	440110	-0.17	431202	-0.31
13	441206	0.31	441214	0.09
14	460224	0.30	460225	0.23
15	470406	-0.07	470403	-0.12
16	480114	0.26	480124	0.06
17	490121	-0.35	490122	-0.38
18	500216	-0.10	500226	-0.20
19	510120	0.01	510124	-0.07
20	511210	0.09	520121	-0.12
21	521112	-0.04	521229	-0.12
22	540117	-0.25	540312	-0.33
23	550212	-0.09	550206	-0.15
24	560125	-0.06	560128	-0.17
25	561216	-0.14	570223	-0.19
26	580219	-0.08	580308	-0.16
27	590125	0.10	590115	-0.05
28	600216	-0.33	600108	-0.36
29	601205	0.21	601211	0.09
30	620217	0.05	611214	-0.01
31	621220	-0.22	621223	-0.23
32	631123	-0.01	631128	-0.13
33	650118	-0.04	650123	-0.23
34	660104	0.43	651228	0.26

TWEEDE TAPE

Markerwaard-variant , peil maxima per winterperiode

	datum	peil IJsselmeer	datum	peil Markermeer
1	321027	0.00	321029	-0.05
2	331028	-0.33	331102	-0.32
3	350226	-0.13	341017	-0.30
4	360122	-0.03	360204	-0.09
5	370223	0.13	370224	0.12
6	380130	0.07	380207	-0.19
7	390124	-0.10	390126	-0.08
8	391208	0.21	391207	0.05
9	401113	-0.01	401212	-0.07
10	411216	-0.05	411101	-0.04
11	421003	0.00	421003	0.00
12	440110	-0.16	440211	-0.24
13	441206	0.33	441213	0.19
14	460224	0.36	460225	0.33
15	470329	-0.05	470403	-0.07
16	480114	0.29	480111	0.13
17	490121	-0.34	490318	-0.34
18	500216	-0.08	500226	-0.10
19	510119	0.03	501208	0.01
20	511210	0.08	520121	-0.01
21	521112	-0.04	521229	-0.04
22	540117	-0.25	540312	-0.28
23	550212	-0.07	541115	-0.03
24	560125	-0.07	560127	-0.06
25	561216	-0.14	570115	-0.12
26	580305	-0.06	580308	-0.07
27	590125	0.10	590108	0.04
28	591229	-0.34	600108	-0.32
29	601205	0.23	601210	0.30
30	611211	0.07	611214	0.08
31	621220	-0.19	621219	-0.18
32	631123	0.01	631127	-0.04
33	650118	-0.04	650126	-0.16
34	660104	0.43	651222	0.30

MARKERMEER-VARIANT TWEEDE TAPE

Elke rij bestaat uit :

- nummer van het jaar (1 = 1932/1933).
- maximale peilen * 100 in het IJsselmeer resp. Markermeer per maand
(oktober, november, december, januari, februari, maart, april)

N.B. code -99 (april) betekent: komt niet voor.

1	-4	-10	-5	-12	-34	-37	-38	-39	-29	-36	-35	-39	-99	-99
2	-33	-40	-35	-34	-39	-40	-35	-38	-38	-40	-38	-39	-99	-99
3	-34	-35	-35	-38	-36	-39	-33	-36	-13	-36	-28	-37	-99	-99
4	-32	-38	-32	-38	-20	-28	-5	-25	-8	-16	-37	-39	-40	-40
5	-23	-36	-22	-30	-12	-24	-20	-34	11	0	-3	-11	-99	-99
6	-38	-38	-35	-36	-37	-39	6	-30	7	-26	-36	-39	-99	-99
7	-17	-35	-31	-37	-27	-36	-13	-16	-32	-34	-34	-34	-99	-99
8	-22	-26	-3	-27	16	-6	-37	-38	-38	-42	-5	-16	-14	-24
9	-32	-35	0	-20	-3	-16	-37	-33	-15	-22	-16	-18	-99	-99
10	-12	-17	-12	-14	-6	-17	-24	-26	-36	-37	-24	-27	-99	-99
11	-19	-32	-25	-30	-26	-35	-31	-32	-16	-32	-35	-38	-99	-99
12	-39	-40	-28	-38	-26	-31	-17	-31	-19	-31	-34	-38	-40	-40
13	-36	-38	1	-15	31	9	-32	-36	-2	-24	-6	-21	-99	-99
14	-36	-37	-34	-32	-36	-38	-26	-26	30	23	3	17	-99	-99
15	-35	-35	-37	-38	-33	-37	-33	-36	-38	-39	-8	-16	-7	-12
16	-40	-40	-25	-34	-7	-25	26	6	7	-4	-34	-39	-40	-40
17	-37	-39	-38	-39	-37	-39	-35	-38	-37	-38	-38	-38	-99	-99
18	-37	-39	-28	-33	-14	-28	-36	-38	-10	-20	-26	-29	-99	-99
19	-25	-34	-22	-30	-2	-9	1	-7	-22	-23	-22	-26	-99	-99
20	-39	-40	-10	-23	9	-20	0	-12	-14	-24	-36	-37	-39	-35
21	-33	-33	-4	-16	-11	-12	-13	-24	-26	-24	-38	-38	-99	-99
22	-40	-40	-38	-40	-37	-36	-25	-34	-36	-36	-35	-33	-99	-99
23	-11	-25	-10	-16	-10	-20	-12	-16	-9	-15	-35	-34	-99	-99
24	-34	-30	-35	-32	-19	-35	-6	-17	-38	-26	-21	-22	-40	-40
25	-32	-33	-28	-33	-14	-25	-17	-28	-18	-19	-23	-28	-99	-99
26	-24	-29	-23	-33	-31	-29	-13	-23	-8	-26	-9	-16	-99	-99
27	-31	-31	-37	-35	-25	-29	10	-5	-18	-11	-39	-36	-99	-99
28	-37	-40	-38	-38	-34	-39	-37	-36	-33	-37	-38	-38	-40	-47
29	-20	-19	2	-11	21	9	-23	-22	3	-9	-23	-30	-99	-99
30	-25	-32	-12	-26	3	-1	1	-7	5	-22	-36	-36	-99	-99
31	-38	-38	-39	-36	-22	-23	-39	-39	-39	-39	-29	-26	-99	-99
32	-33	-38	-1	-13	-19	-18	-39	-36	-34	-32	-39	-36	-40	-39
33	-34	-33	-31	-35	-27	-31	-4	-23	-32	-33	-34	-36	-99	-99
34	-38	-39	-25	-32	37	26	43	23	-7	-14	-12	-13	-99	-99

MARKERWAARD-VARIANT TWEDE TAPE

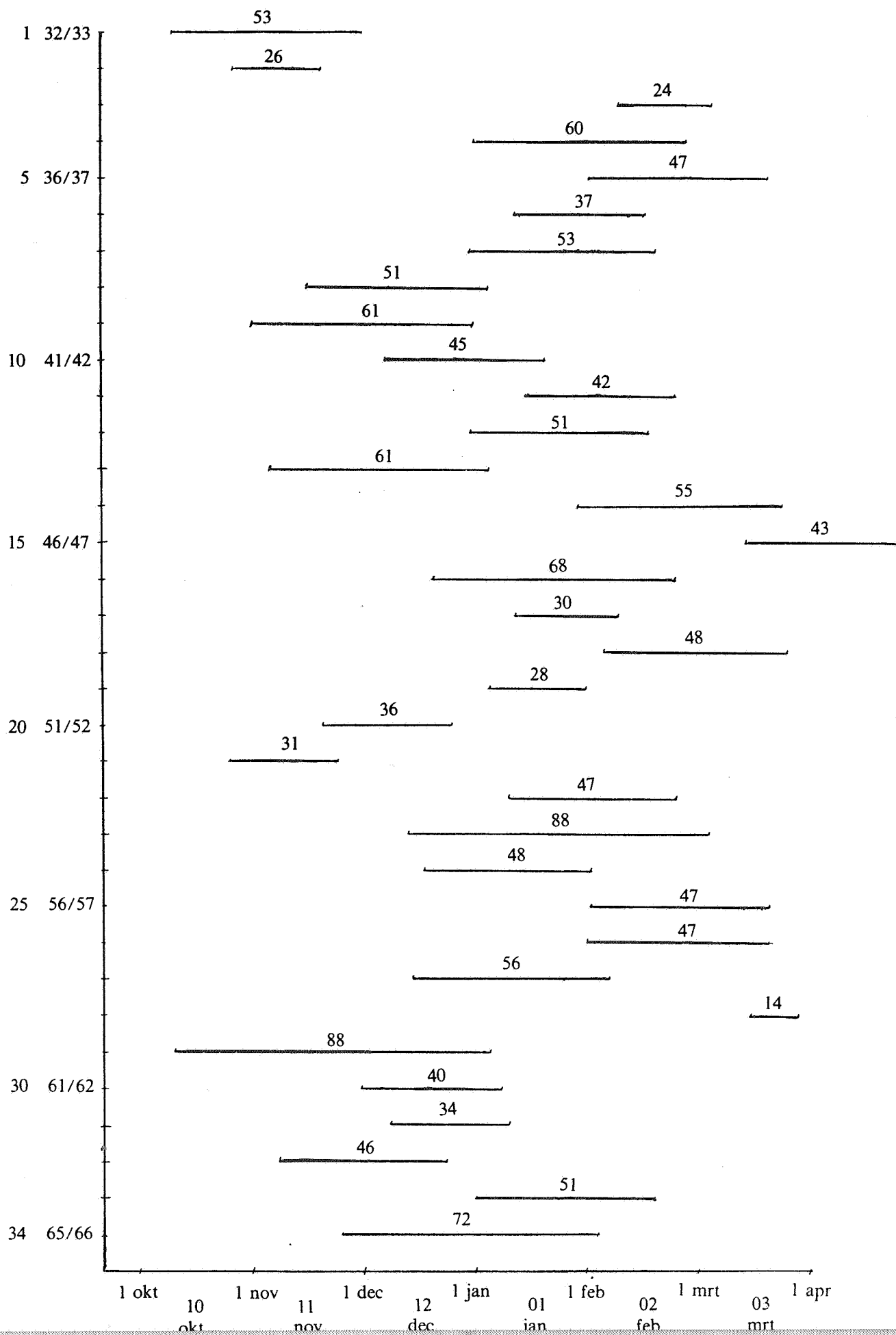
Elke rij bestaat uit :

- nummer van het jaar (1 = 1932/1933).
- maximale peilen * 100 in het IJsselmeer resp. Markermeer per maand (oktober, november, december, januari, februari, maart, april)

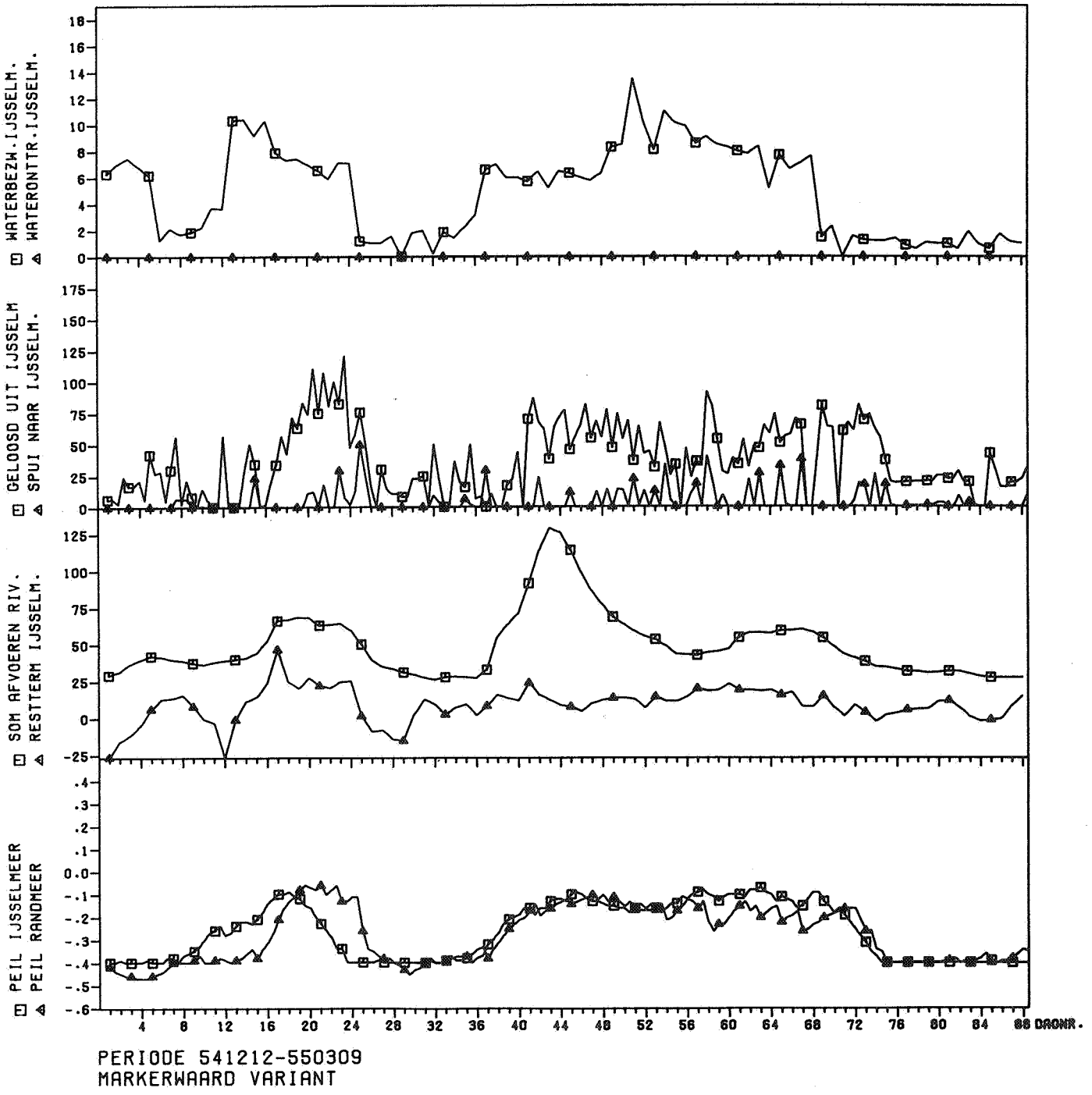
N.B. code -99 (april) betekent: komt niet voor.

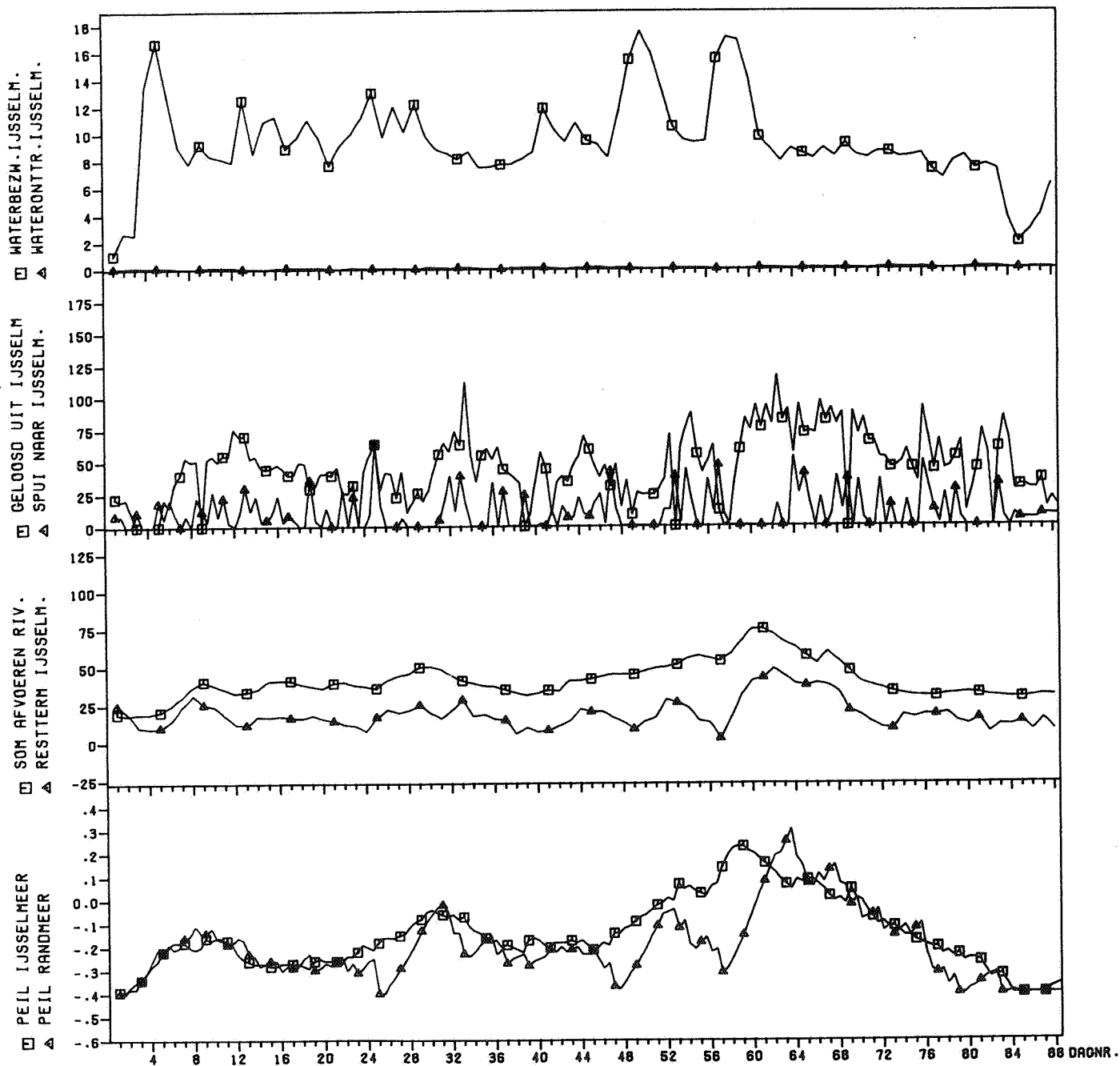
1	0	-5	-3	-9	-34	-36	-38	-38	-29	-30	-35	-37	-99	-99
2	-33	-39	-35	-32	-39	-39	-35	-37	-38	-39	-38	-40	-99	-99
3	-34	-30	-35	-37	-36	-38	-33	-34	-13	-32	-28	-32	-99	-99
4	-32	-36	-32	-36	-18	-23	-3	-22	-6	-9	-37	-37	-40	-40
5	-24	-35	-22	-23	-8	-15	-20	-30	13	12	-1	-11	-99	-99
6	-38	-37	-34	-35	-37	-39	7	-26	7	-19	-36	-38	-99	-99
7	-17	-30	-30	-36	-26	-35	-10	-8	-33	-37	-34	-32	-99	-99
8	-21	-18	-1	-19	21	5	-37	-37	-38	-40	-2	-8	-11	-27
9	-33	-32	-1	-12	-3	-7	-37	-25	-14	-16	-14	-16	-99	-99
10	-9	-7	-12	-4	-5	-11	-23	-30	-36	-38	-22	-21	-99	-99
11	0	0	-25	-29	-26	-32	-30	-26	-14	-29	-35	-36	-99	-99
12	-39	-39	-28	-36	-25	-26	-16	-29	-19	-24	-33	-37	-40	-40
13	-36	-37	5	-3	33	19	-34	-36	-1	-15	-5	-17	-99	-99
14	-36	-34	-34	-23	-36	-35	-26	-18	36	33	4	25	-99	-99
15	-35	-31	-37	-36	-33	-33	-32	-34	-38	-38	-5	-10	-6	-7
16	-39	-37	-33	-40	-13	-35	29	13	5	0	-34	-38	-40	-40
17	-38	-38	-38	-39	-37	-37	-34	-36	-37	-36	-38	-34	-99	-99
18	-38	-39	-28	-28	-12	-21	-36	-37	-8	-10	-24	-30	-99	-99
19	-25	-33	-23	-23	-1	1	3	0	-19	-21	-22	-16	-99	-99
20	-39	-41	-7	-16	8	-16	4	-1	-15	-19	-37	-33	-39	-29
21	-33	-28	-4	-5	-9	-4	-11	-28	-24	-14	-39	-36	-99	-99
22	-40	-40	-39	-38	-37	-33	-25	-29	-35	-35	-34	-28	-99	-99
23	-9	-22	-8	-3	-9	-6	-9	-6	-7	-12	-35	-29	-99	-99
24	-32	-26	-33	-33	-20	-31	-7	-6	-38	-29	-18	-16	-40	-36
25	-32	-29	-28	-30	-14	-17	-17	-12	-15	-14	-24	-22	-99	-99
26	-21	-26	-24	-26	-31	-19	-11	-15	-8	-13	-6	-7	-99	-99
27	-30	-27	-36	-33	-25	-26	10	4	-17	-9	-39	-33	-99	-99
28	-37	-40	-38	-36	-34	-39	-37	-32	-34	-35	-38	-36	-40	-51
29	-19	-14	7	-3	23	30	-21	-16	5	-1	-26	-31	-99	-99
30	-25	-23	-12	-21	7	8	5	5	3	-6	-35	-36	-99	-99
31	-38	-36	-39	-34	-19	-18	-39	-38	-39	-38	-30	-18	-99	-99
32	-33	-37	1	-4	-16	-15	-39	-31	-34	-27	-39	-29	-40	-40
33	-35	-28	-31	-33	-27	-26	-4	-16	-33	-31	-34	-31	-99	-99
34	-38	-36	-24	-29	41	30	43	26	-5	-10	-9	-12	-99	-99

Appendix I.3. DE TIJDSPERIODEN VAN DE DATA OP DE EERSTE TAPE.



Appendix I.4. GRAFISCHE VOORSTELLING VAN DE DATA (TWEË PERIODEN, EERSTE TAPE).





PERIODE 601009-610104
 MARKERWAARD VARIANT

Appendix I.5. HET VERSCHIL TUSSEN DE TWEEDE EN DERDE TAPE.

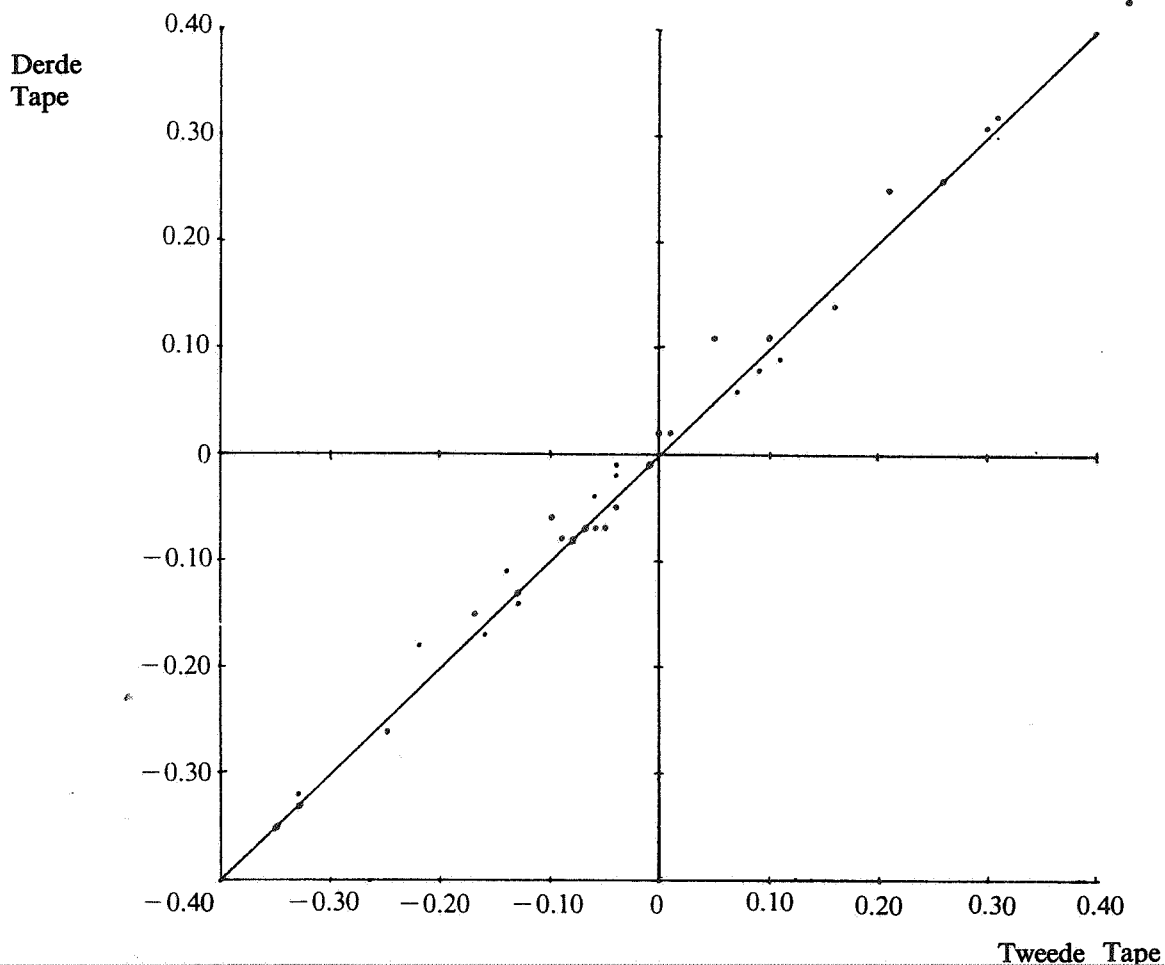
In de volgende grafieken zijn de maximale peilen, per jaar en per maand, van de tweede en de derde tape tegen elkaar uitgezet. De punten in de grafieken zijn dus

$$(X_j^{(2)}, X_j^{(3)}), \quad j = 1, 2, \dots, 34.$$

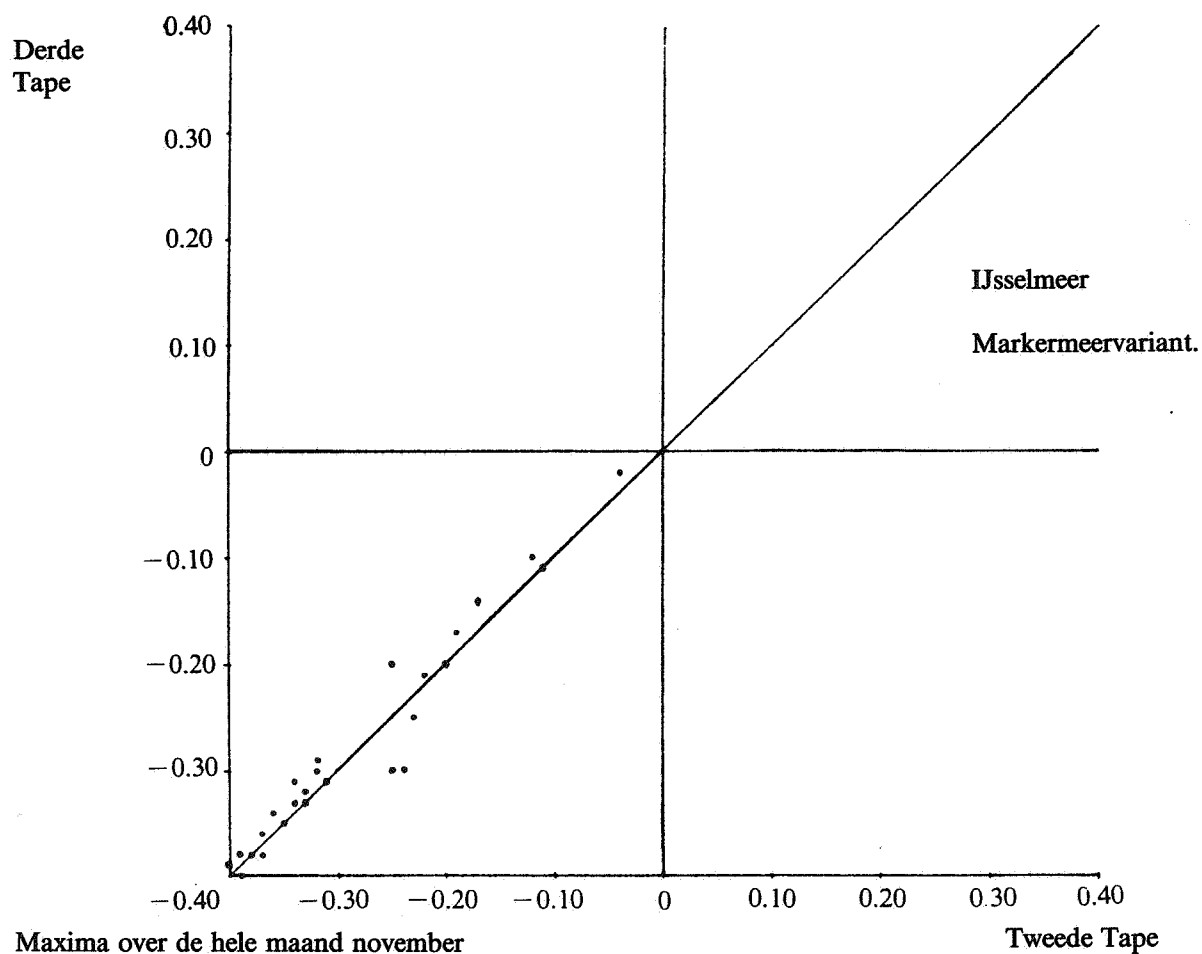
Waarbij $X_j^{(2)}$ een maximum van de tweede tape is in periode j en $X_j^{(3)}$ idem van de derde tape. Als de maxima op beide tapes gelijk zijn komen de punten op de diagonaal. Grote afwijkingen van de diagonaal duiden op grote verschillen tussen de tapes.

Vergelijking Jaarmaxima Tweede/ Derde tape.

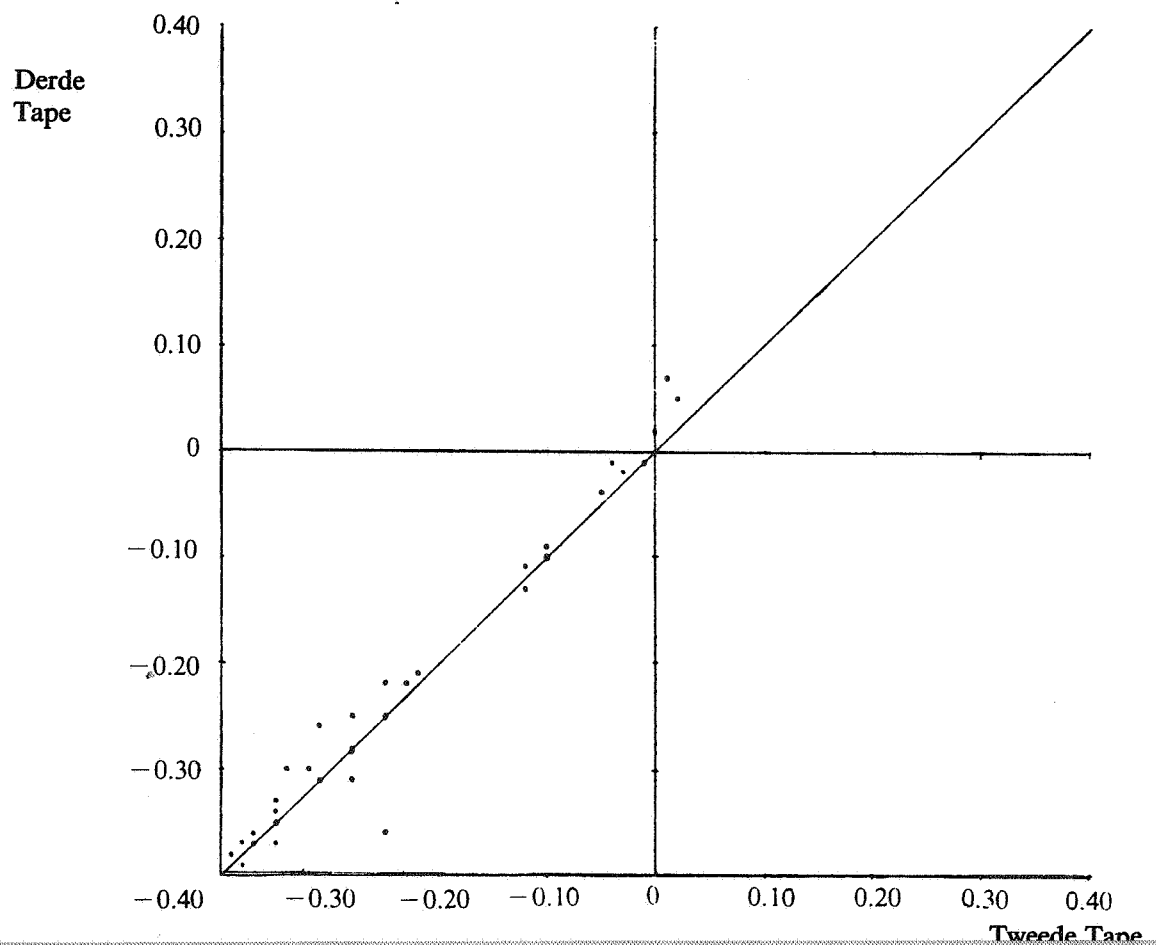
IJsselmeer peilen/Markermeervariant.



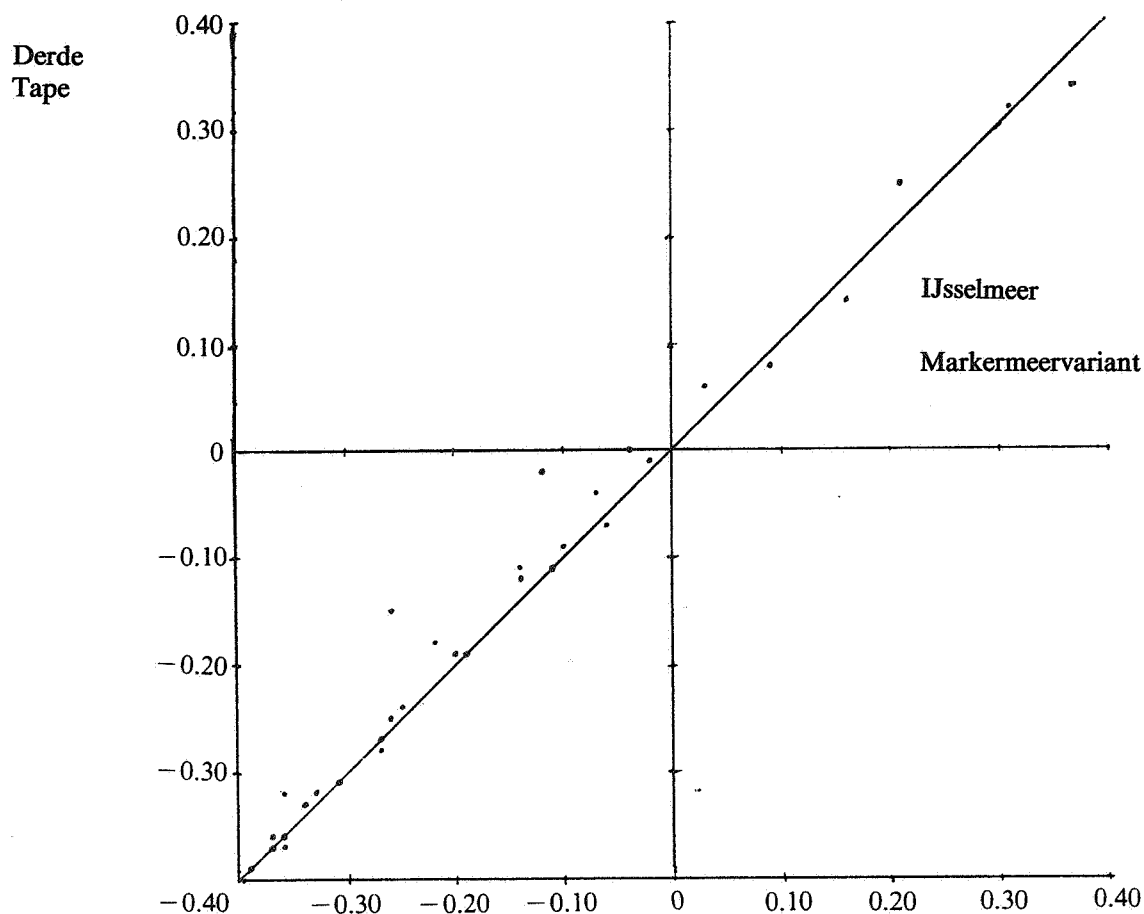
Maxima over de hele maand oktober



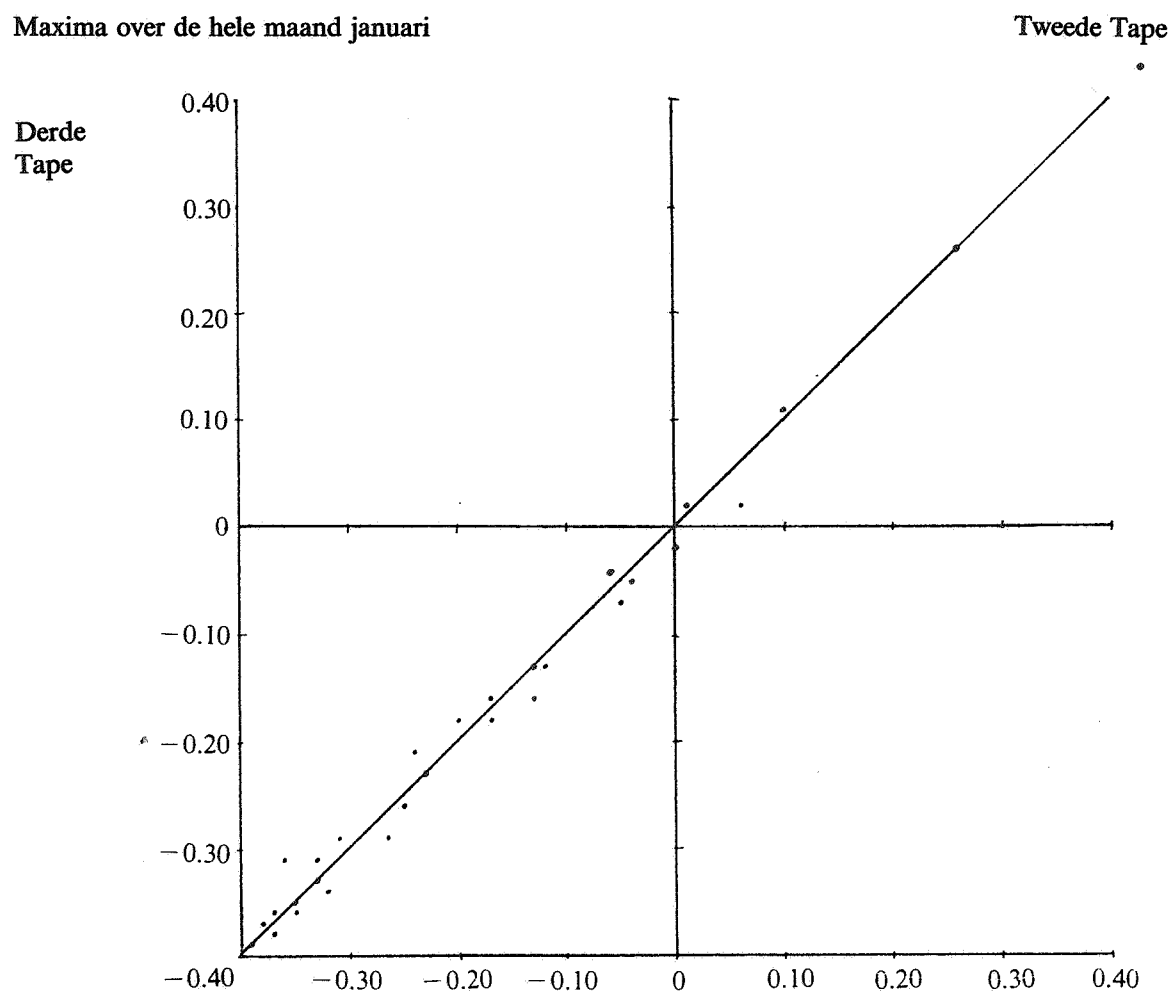
Maxima over de hele maand november



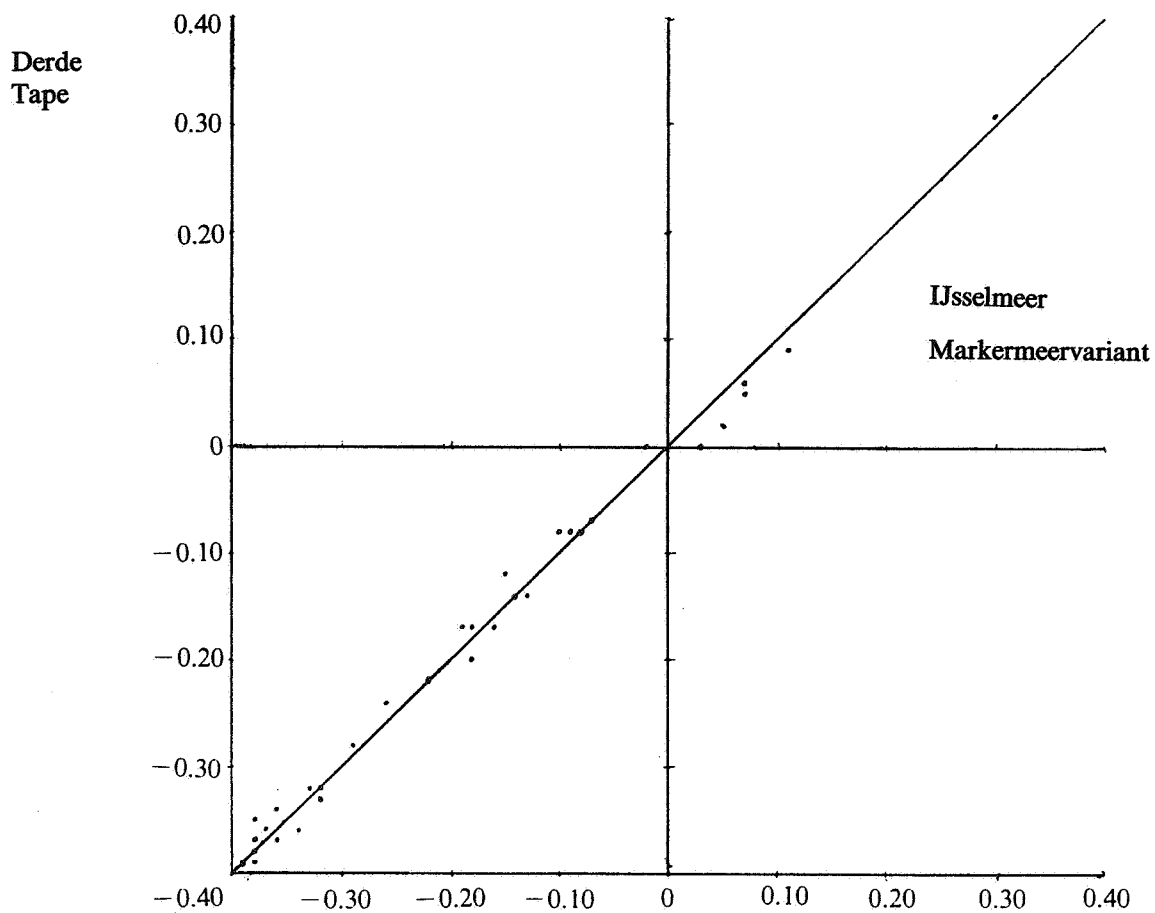
Maxima over de hele maand december



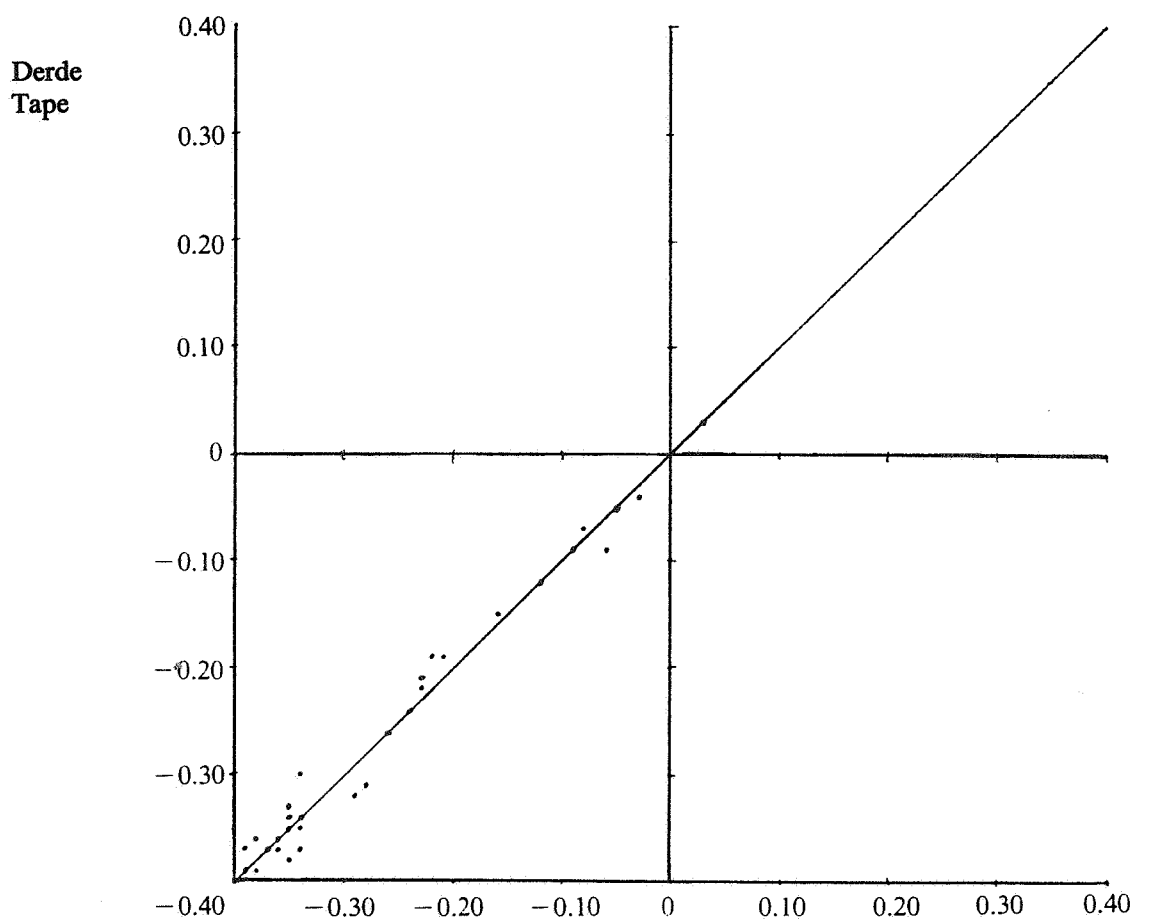
Maxima over de hele maand januari



Maxima over de hele maand februari



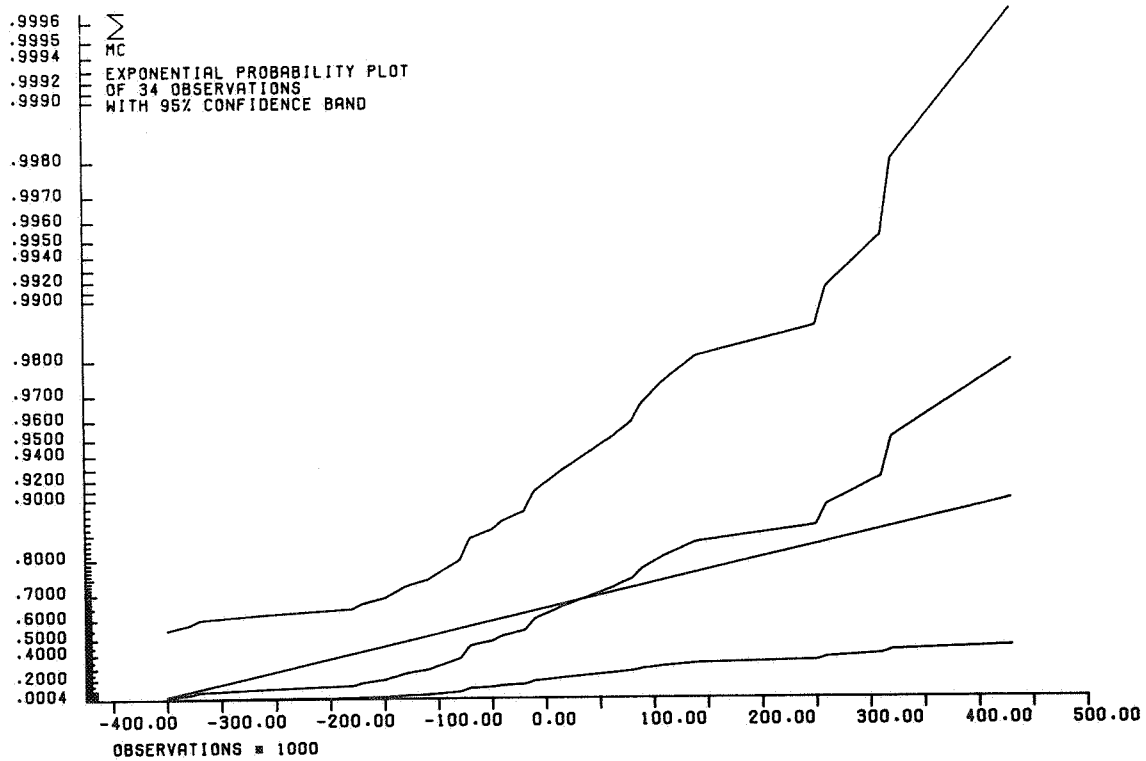
Maxima over de hele maand maart



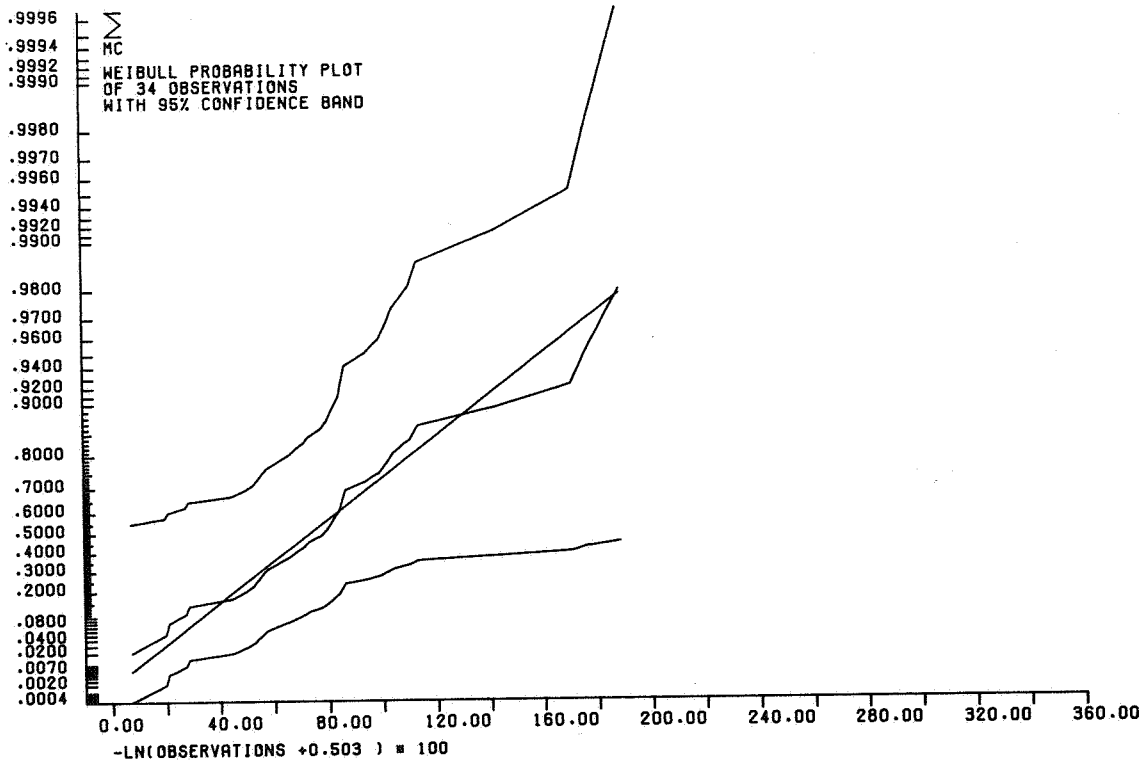
APPENDIX II - DE PLOTS.

Appendix II.1 PLOTS MAXIMA OVER DE HELE PERIODE.

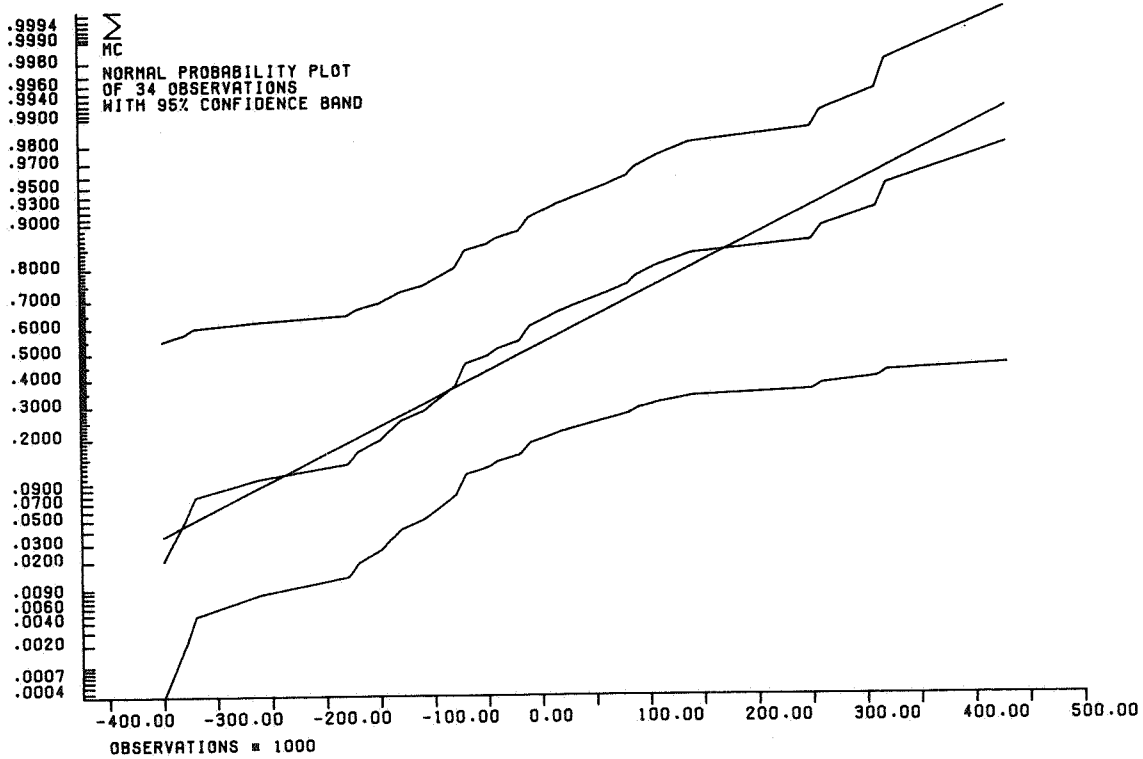
Appendix II.1.1. PLOTS MAXIMA OVER DE HELE PERIODE (DERDE TAPE).



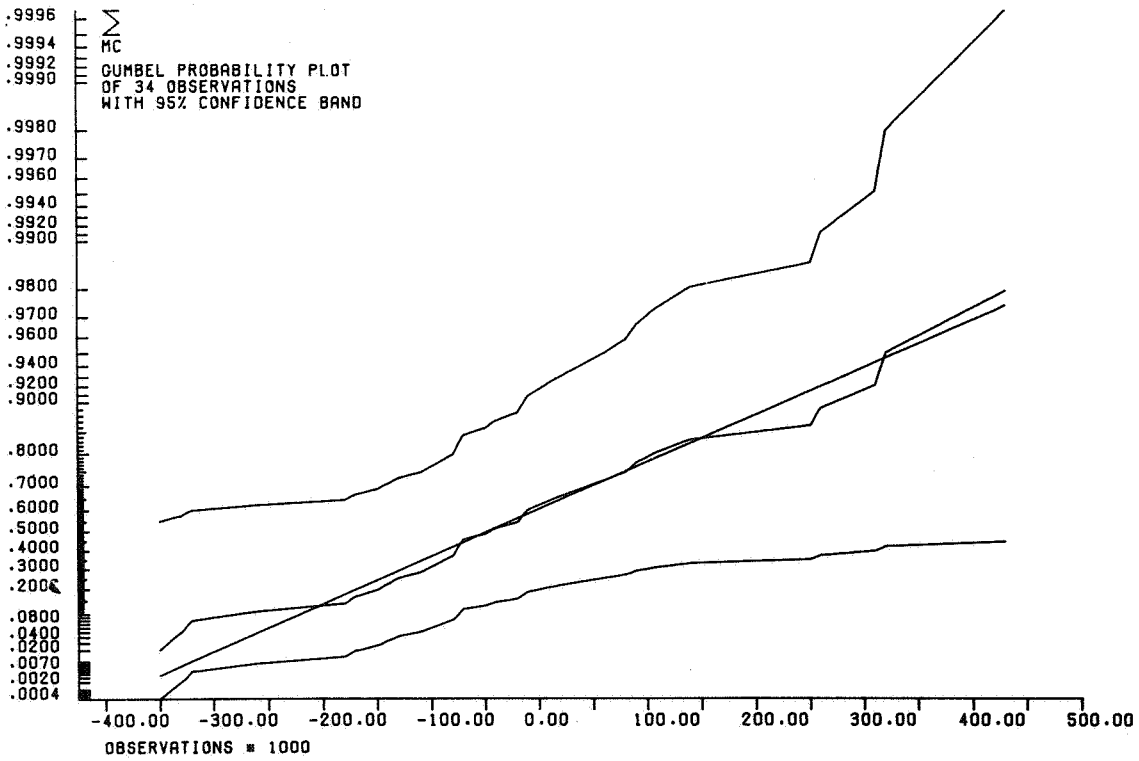
IJsselmeermaxima bij Markermeervariant (tape 3)



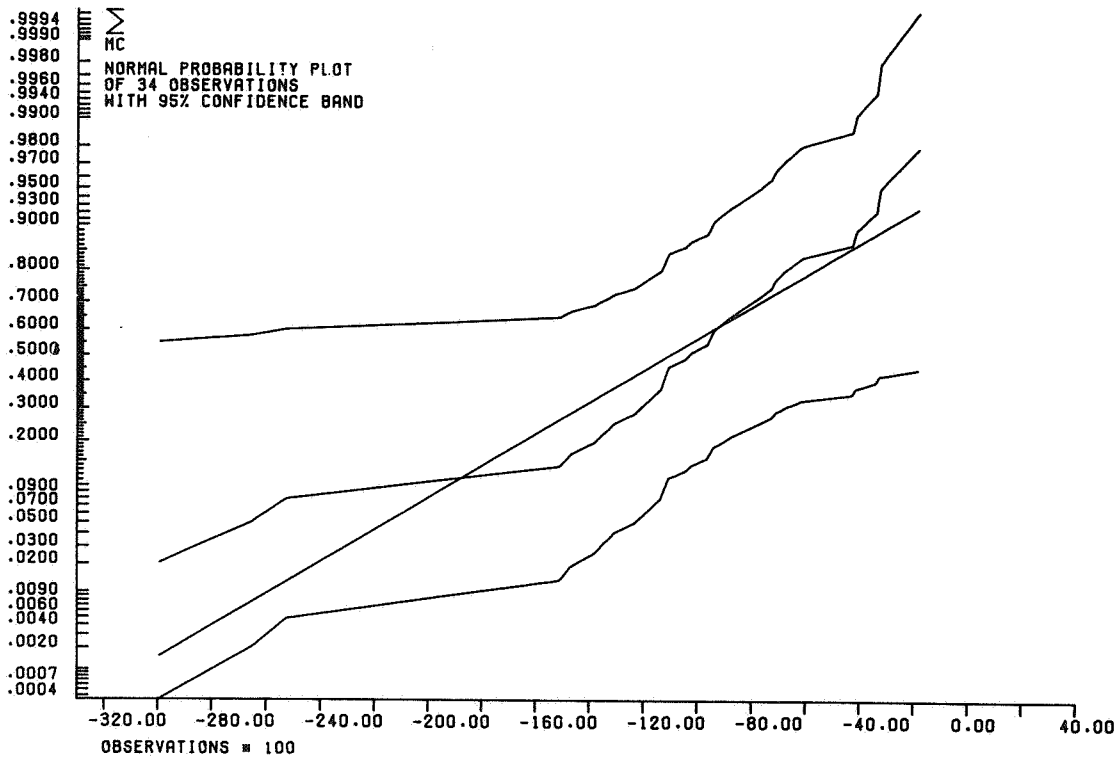
IJsselmeermaxima bij Markermeervariant (tape 3)



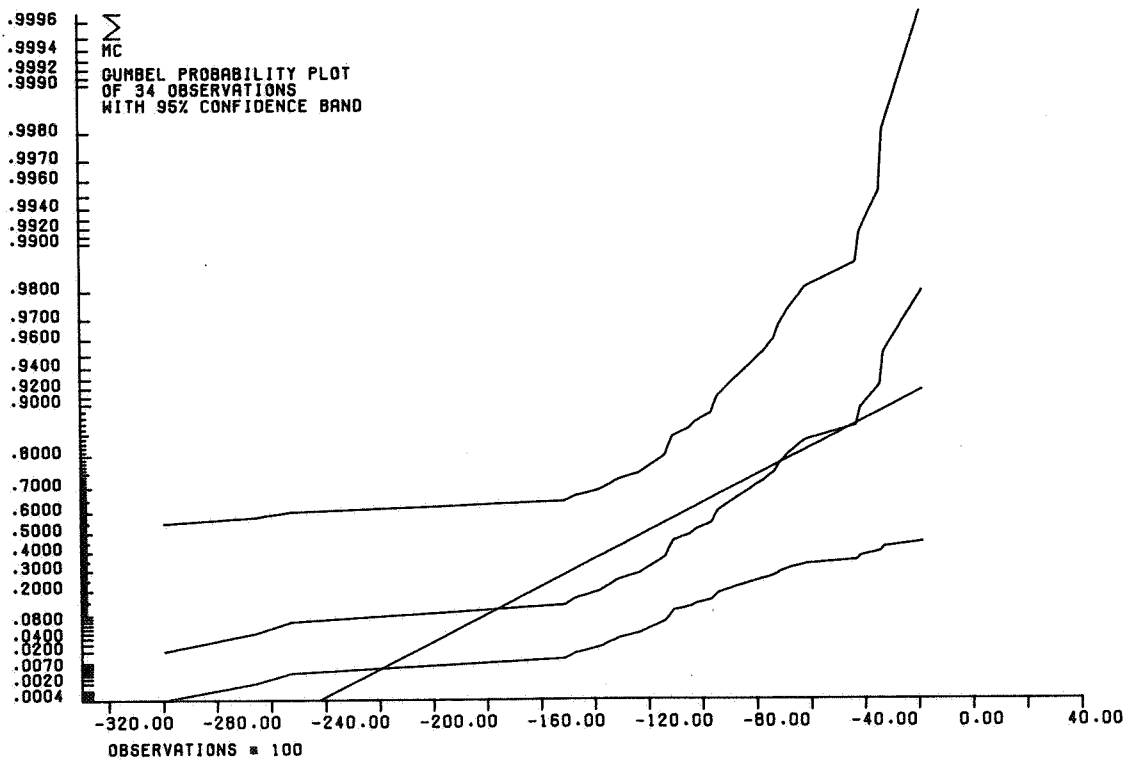
IJsselmeermaxima bij Markermeervariant (tape 3)



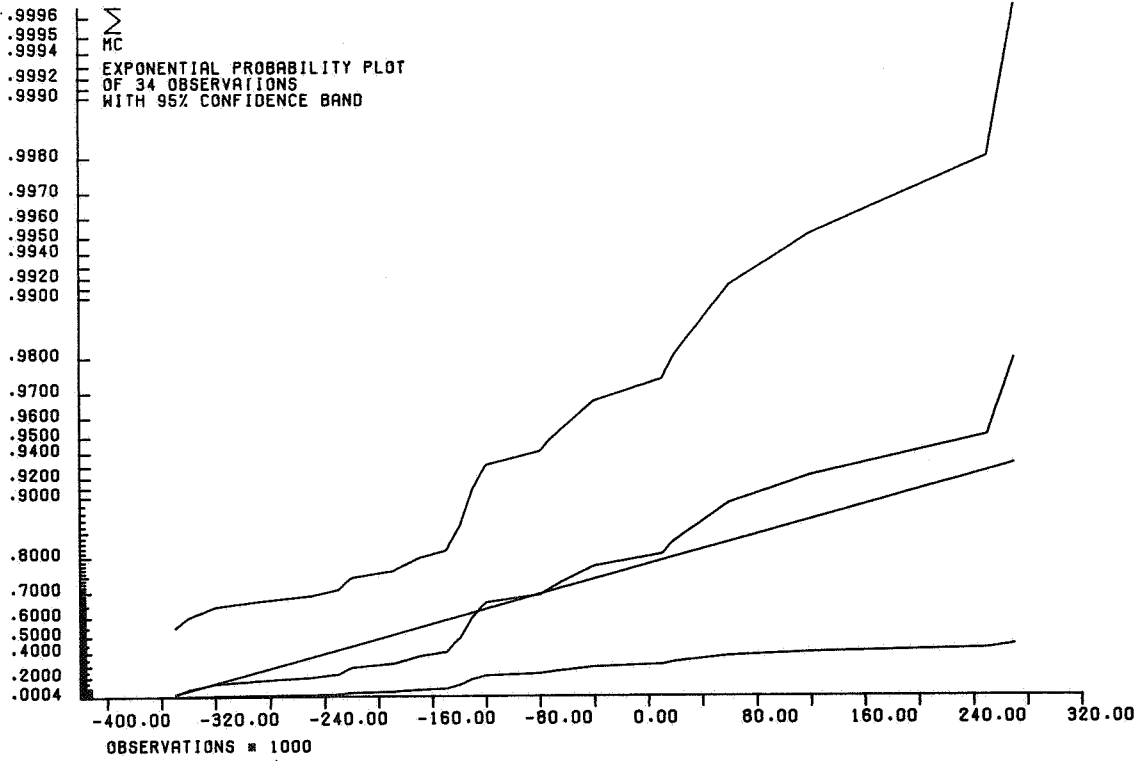
IJsselmeermaxima bij Markermeervariant (tape 3)



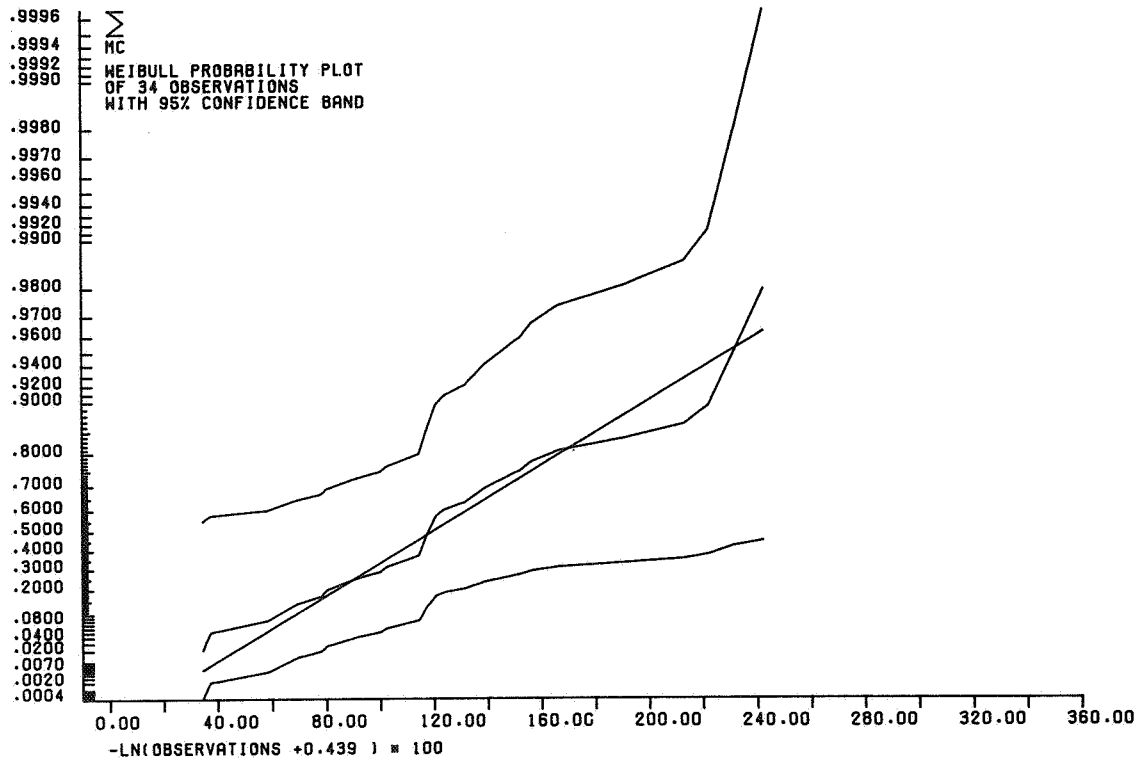
Ln (IJsselmeermaxima + 0.40) bij Markermeervariant (tape 3)



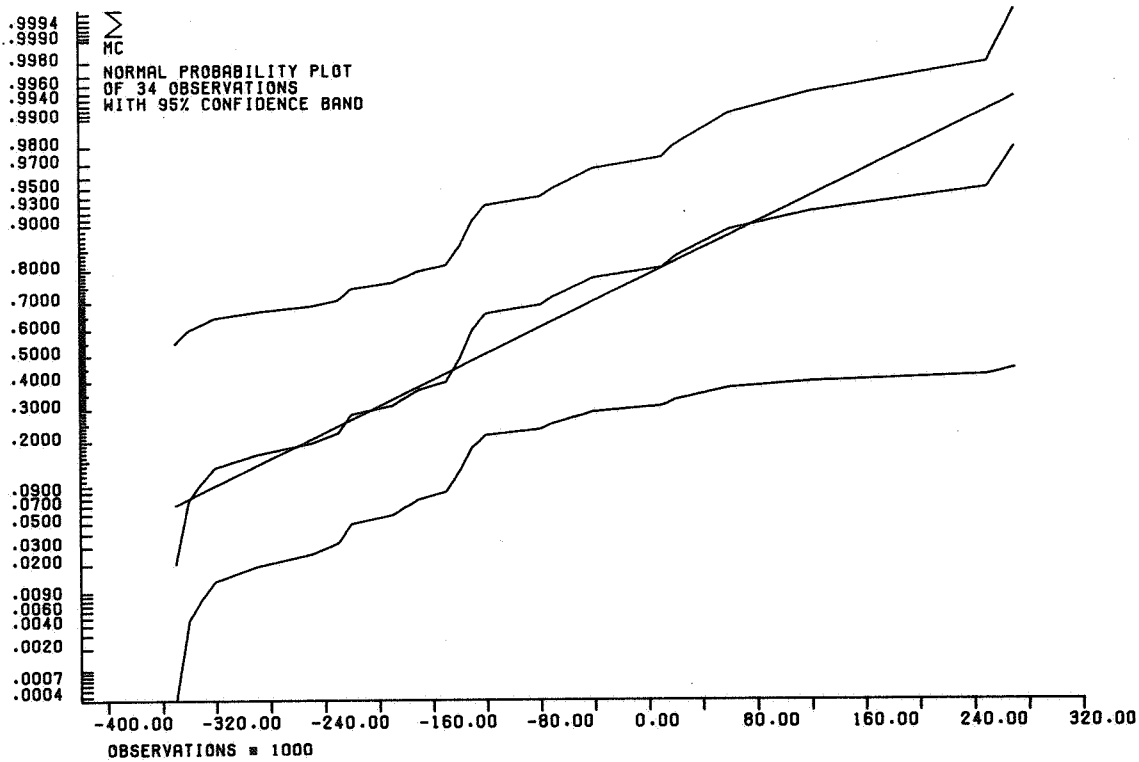
Ln (IJsselmeermaxima +0.40) bij Markermeervariant (tape 3)



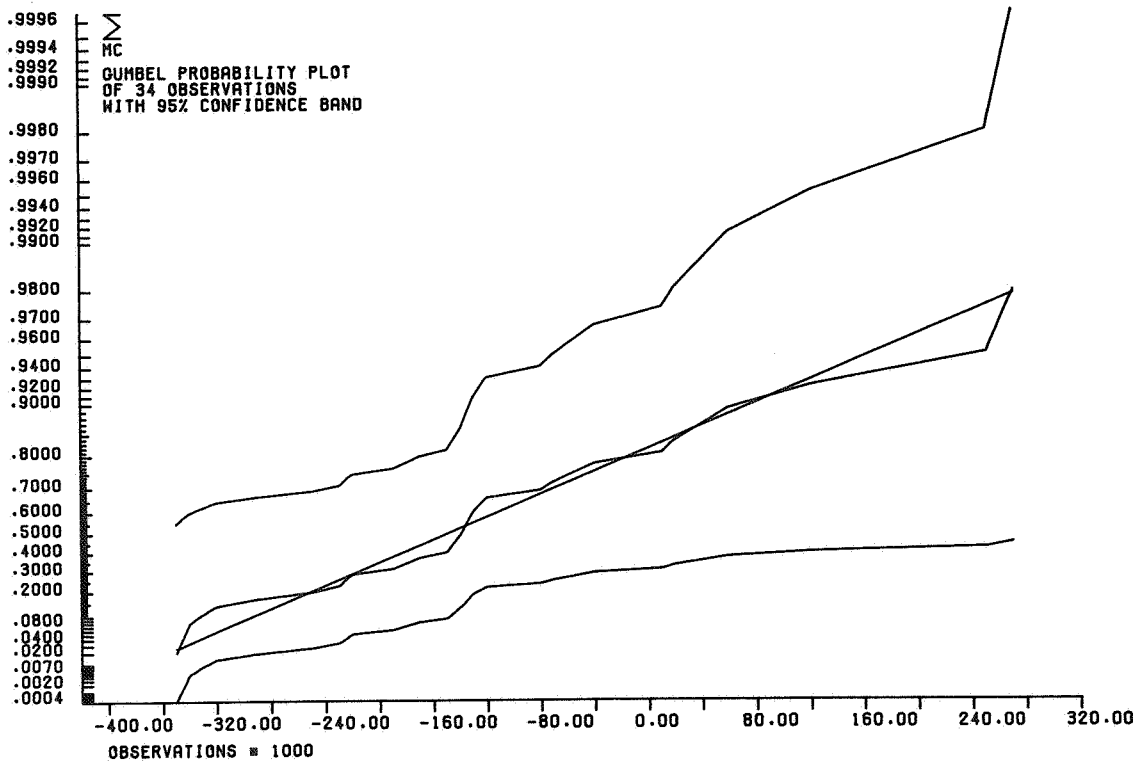
Markermeermaxima bij Markermeervariant (tape 3)



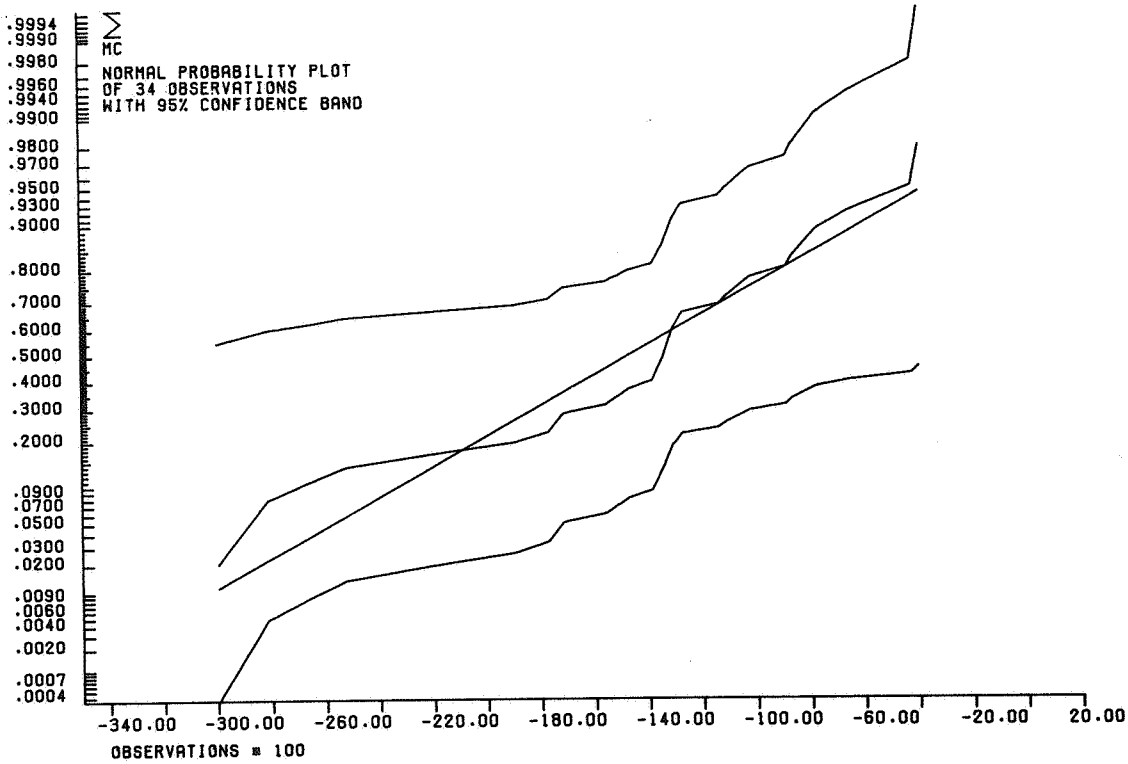
Markermeermaxima bij Markermeervariant (tape 3)



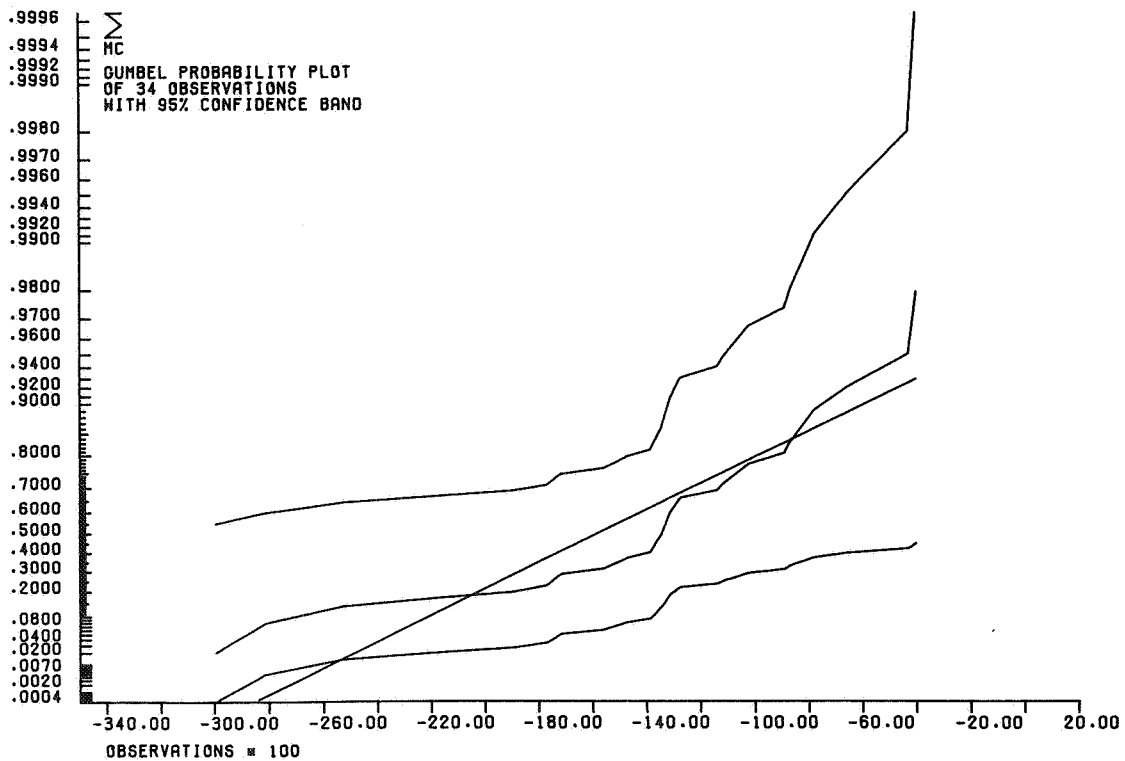
Markermeermaxima bij Markermeervariant (tape 3)



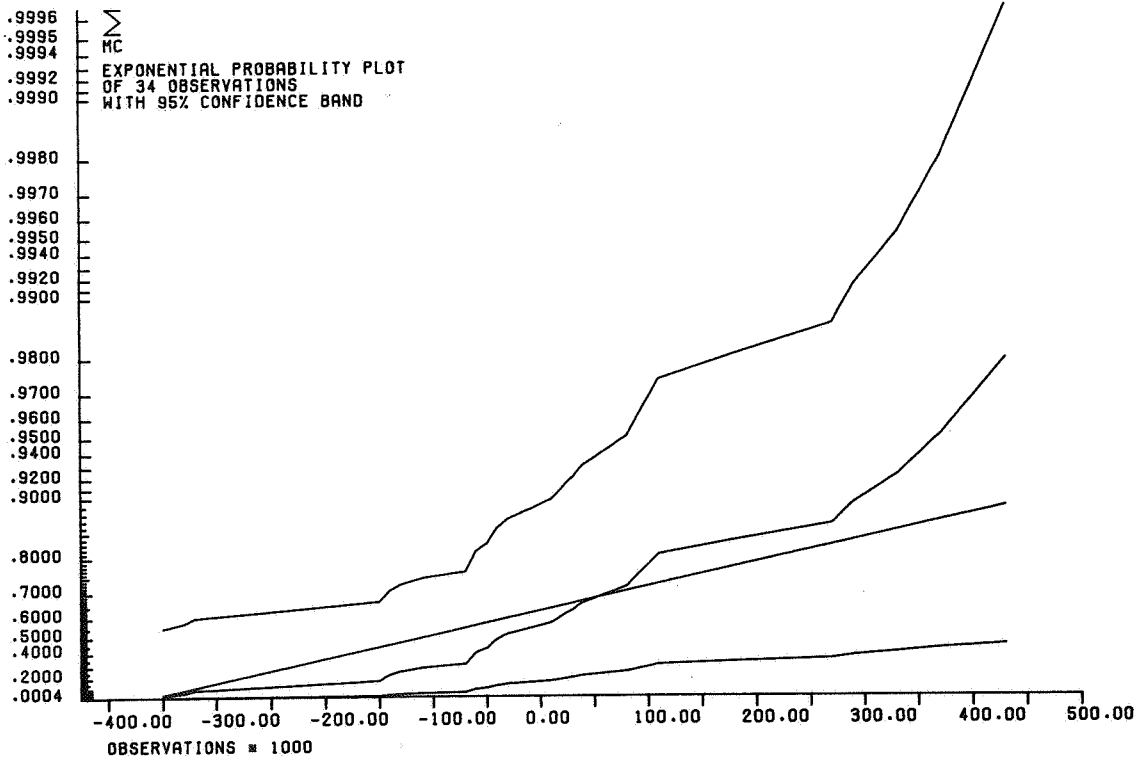
Markermeermaxima bij Markermeervariant (tape 3)



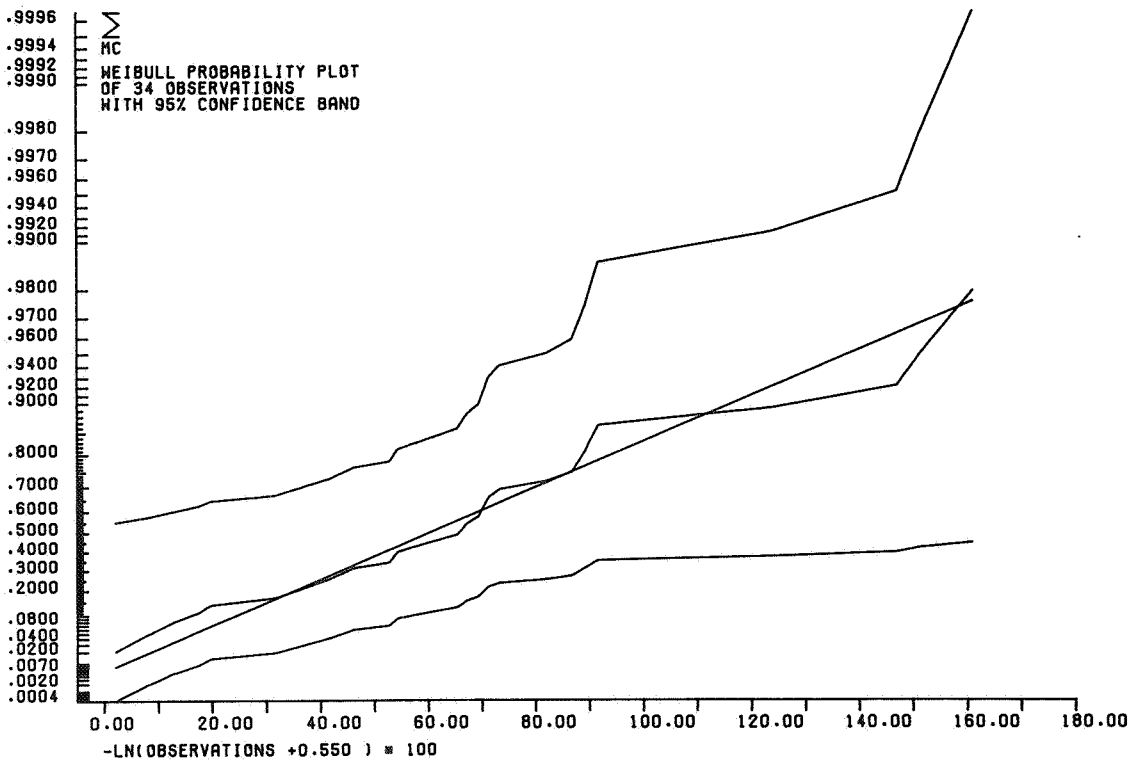
Ln (Markermeermaxima + 0.40) bij Markermeervariant (tape 3)



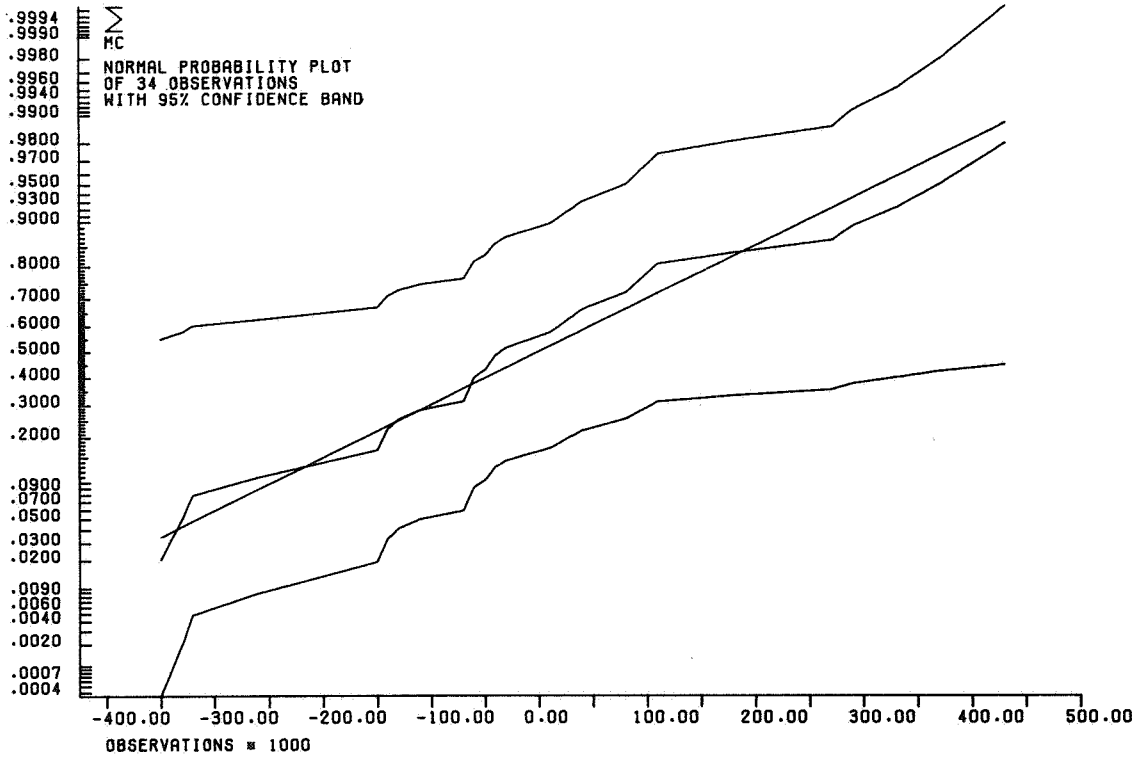
Ln (Markermeermaxima + 0.40) bij Markermeervariant (tape 3)



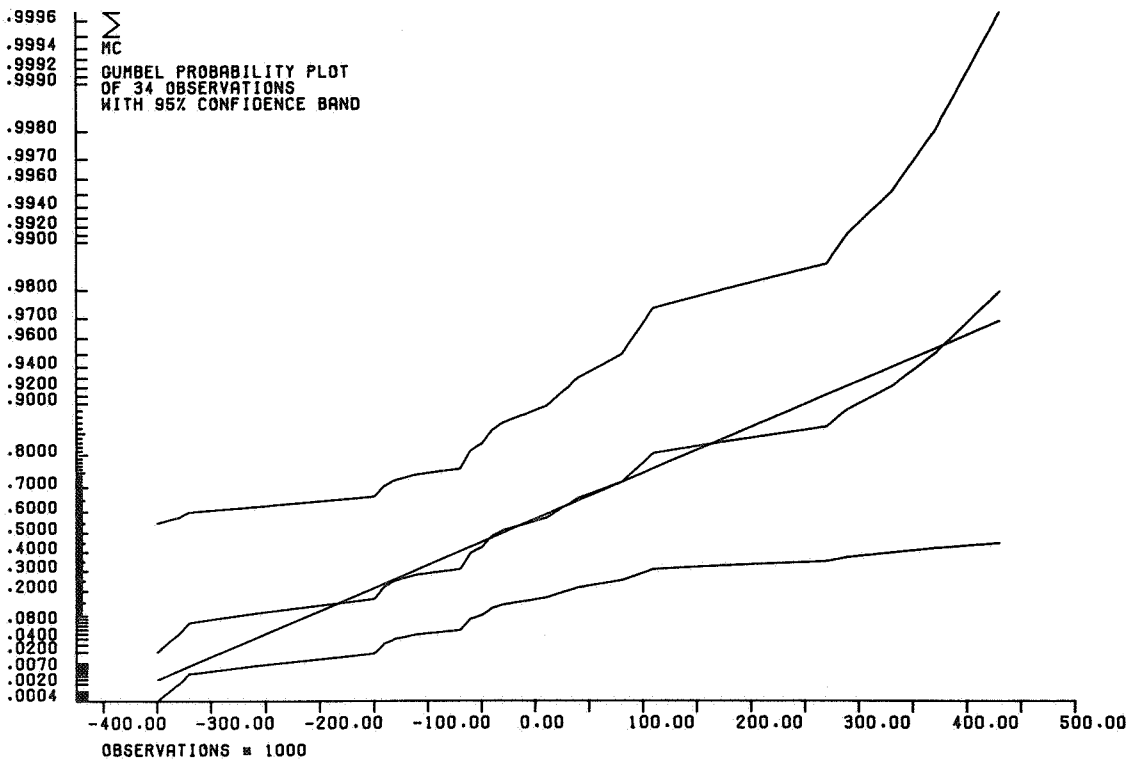
IJsselmeermaxima bij Markerwaardvariant (tape 3)



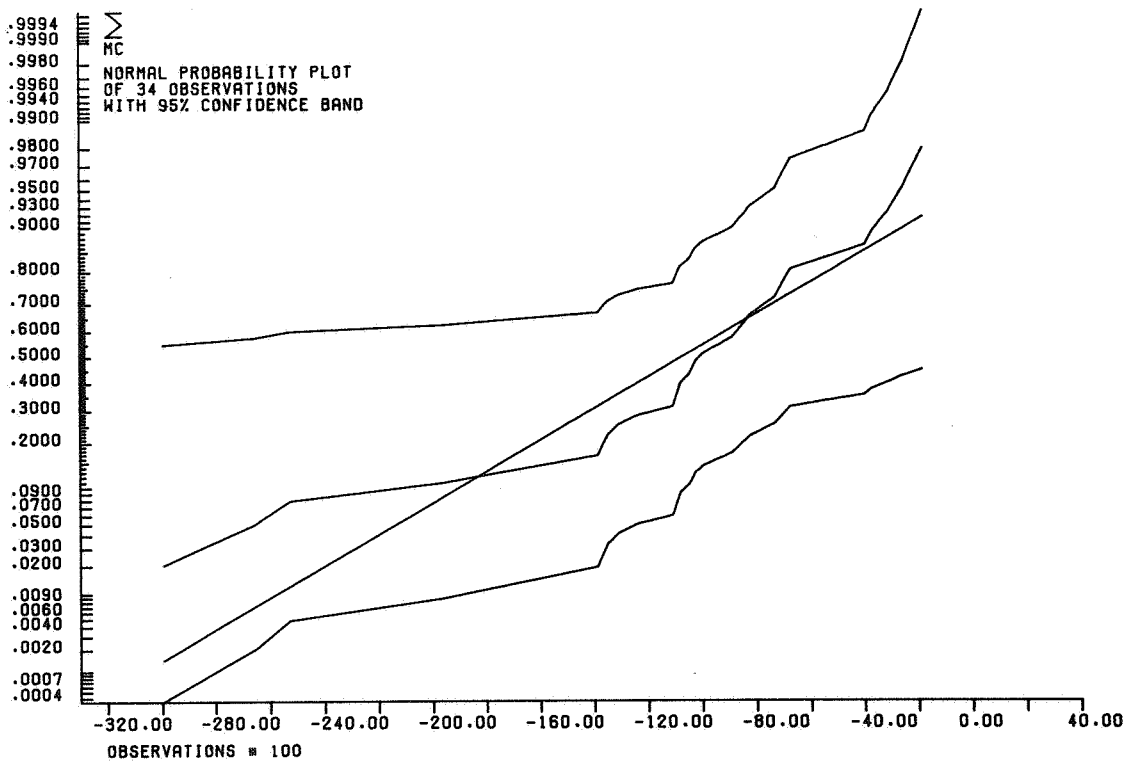
IJsselmeermaxima bij Markerwaardvariant (tape 3)



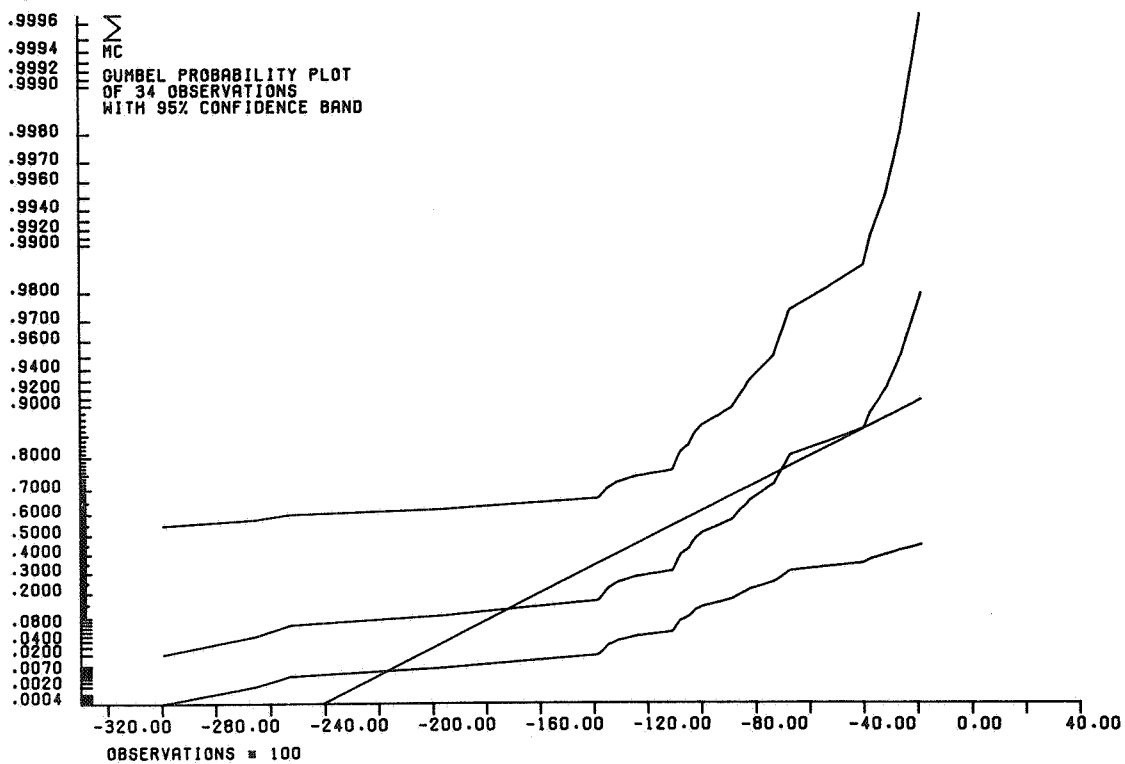
IJsselmeermaxima bij Markerwaardvariant (tape 3)



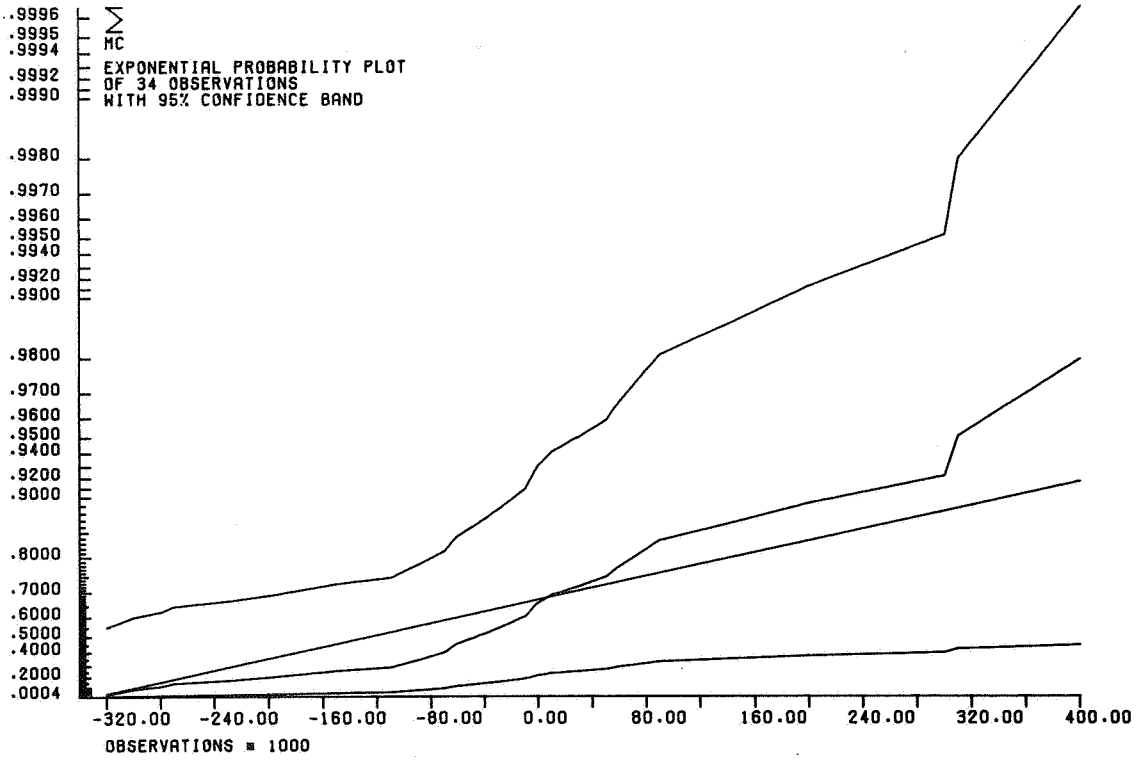
IJsselmeermaxima bij Markerwaardvariant (tape 3)



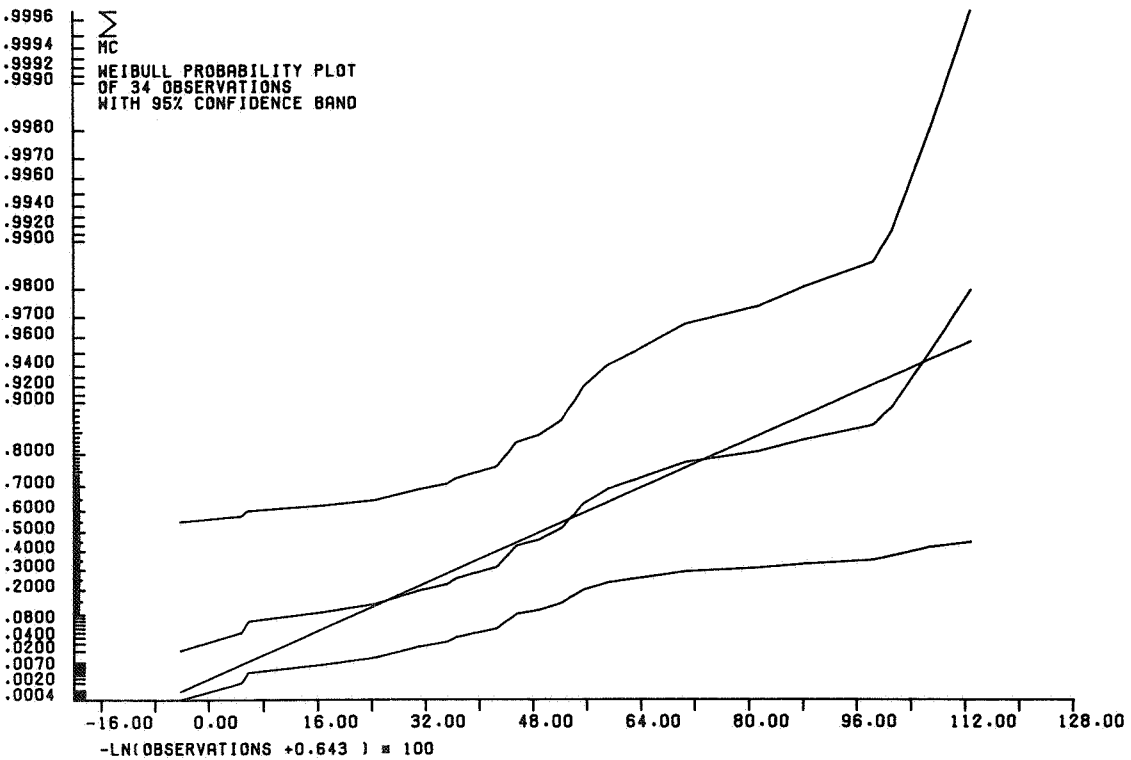
Ln (IJsselmeermaxima + 0.40) bij Markerwaardvariant (tape 3)



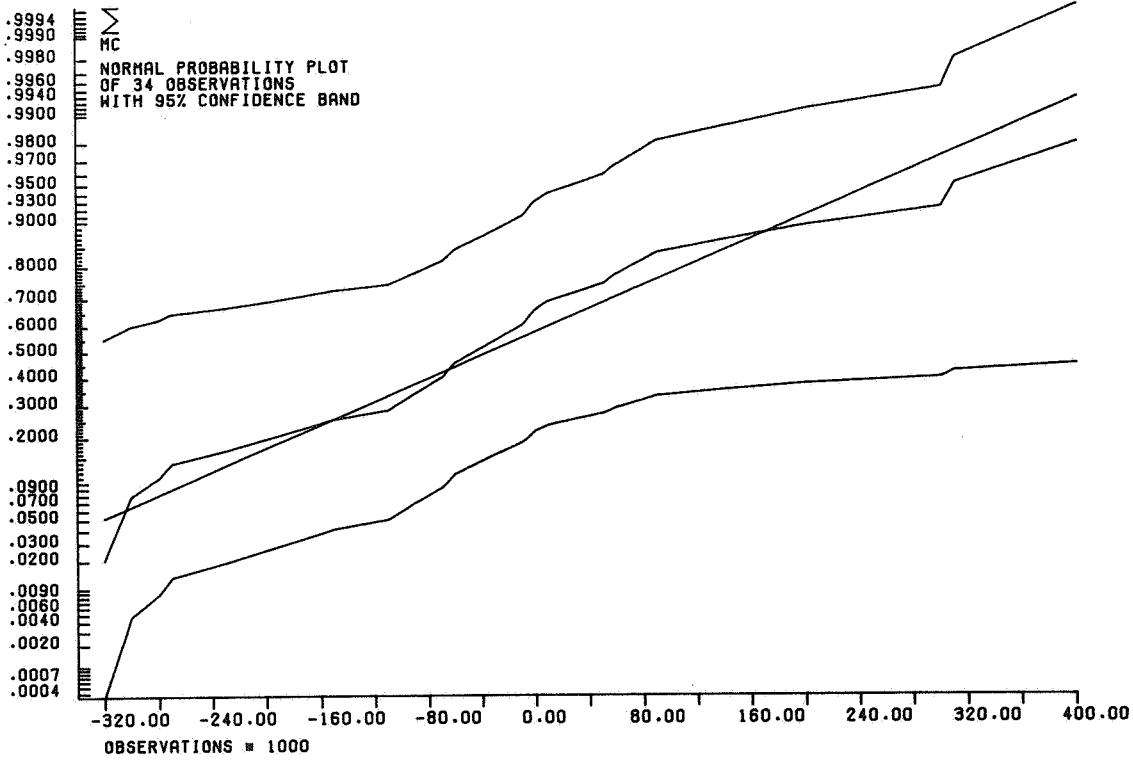
Ln (IJsselmeermaxima + 0.40) bij Markerwaardvariant (tape 3)



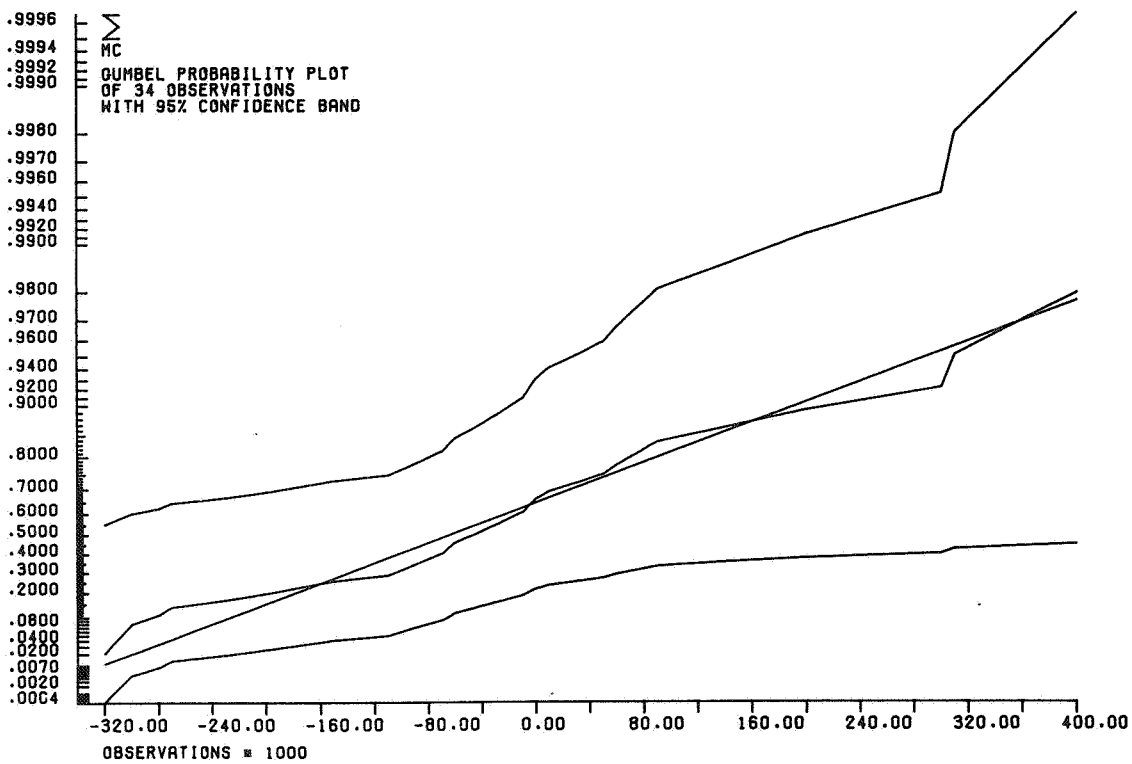
Markermeermaxima bij Markerwaardvariant (tape 3)



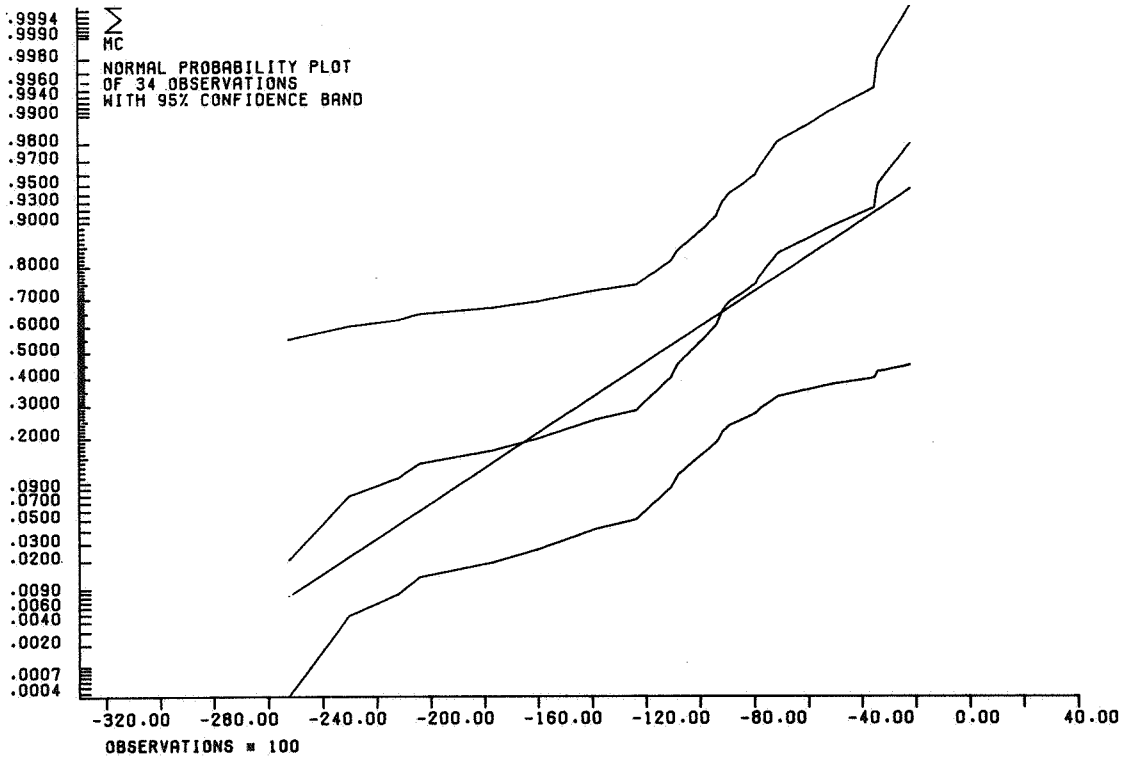
Markermeermaxima bij Markerwaardvariant (tape 3)



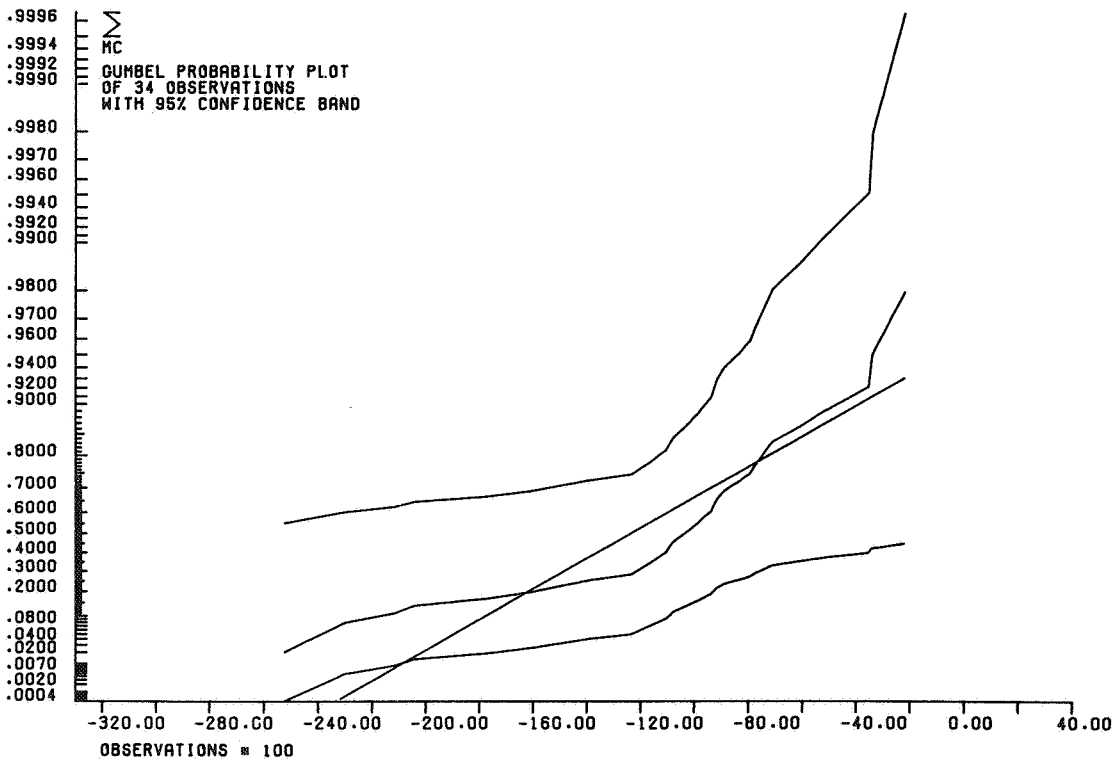
Markermeermaxima bij Markerwaardvariant (tape 3)



Markermeermaxima bij Markerwaardvariant (tape 3)



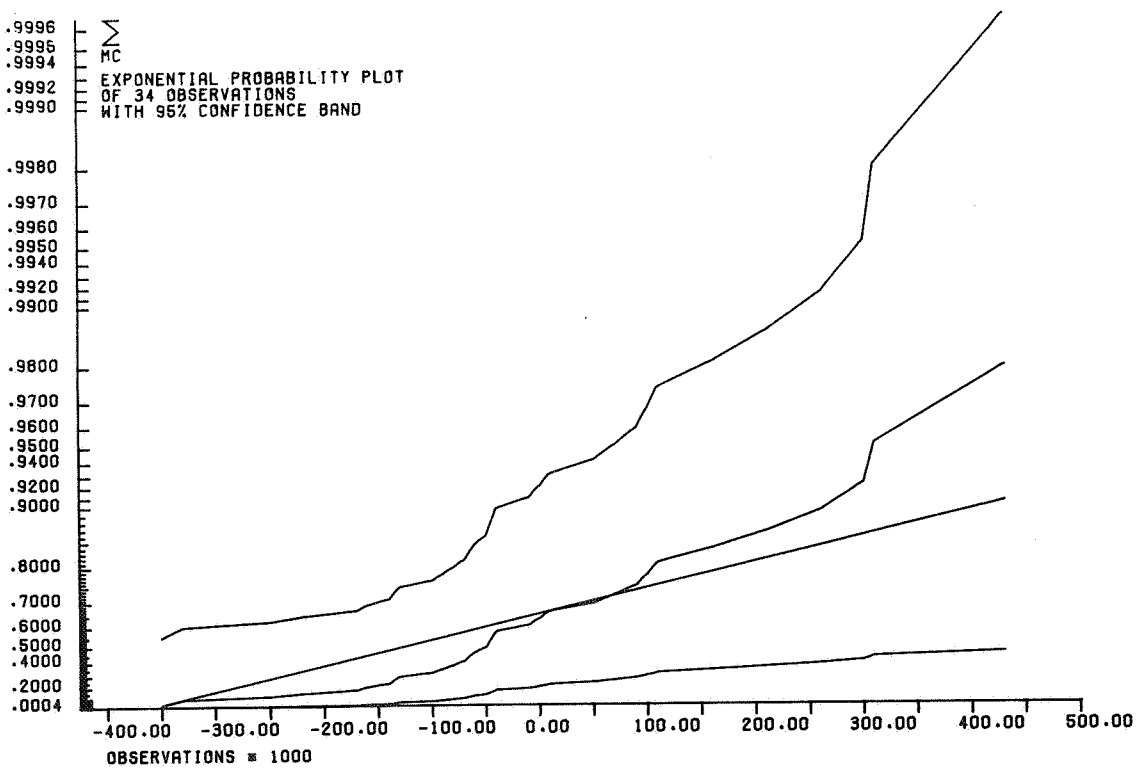
Ln (Markermeermaxima + 0.40) bij Markerwaardvariant (tape 3)



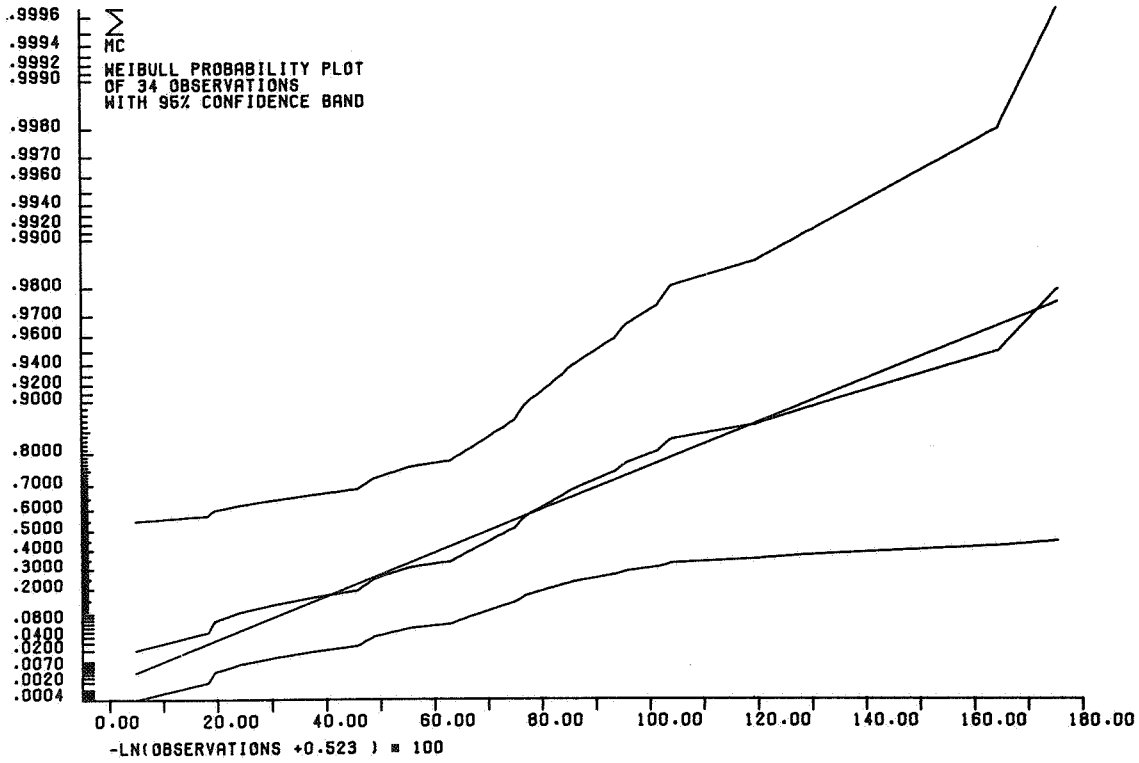
Ln (Markermeermaxima + 0.40) bij Markerwaardvariant (tape 3)

Appendix II.1.2. PLOTS MAXIMA OVER DE HELE PERIODE, IJSSELMEER BIJ

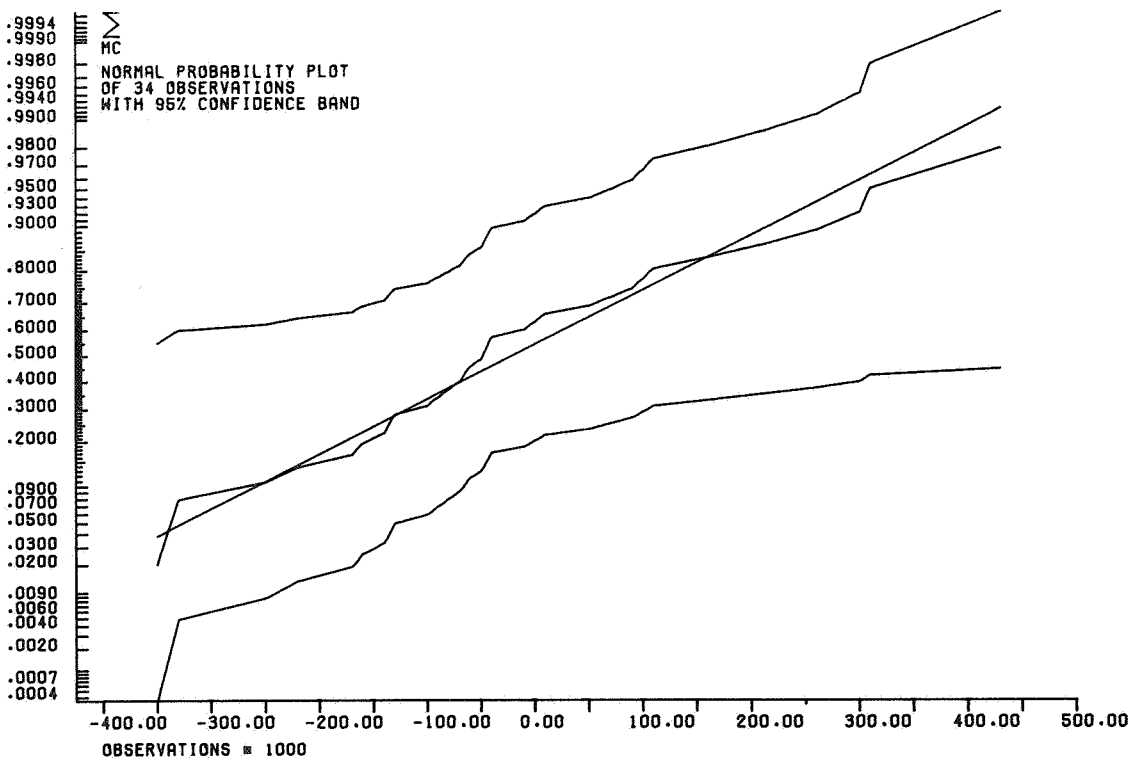
MARKERMEER VARIANT (TWEEDE TAPE).



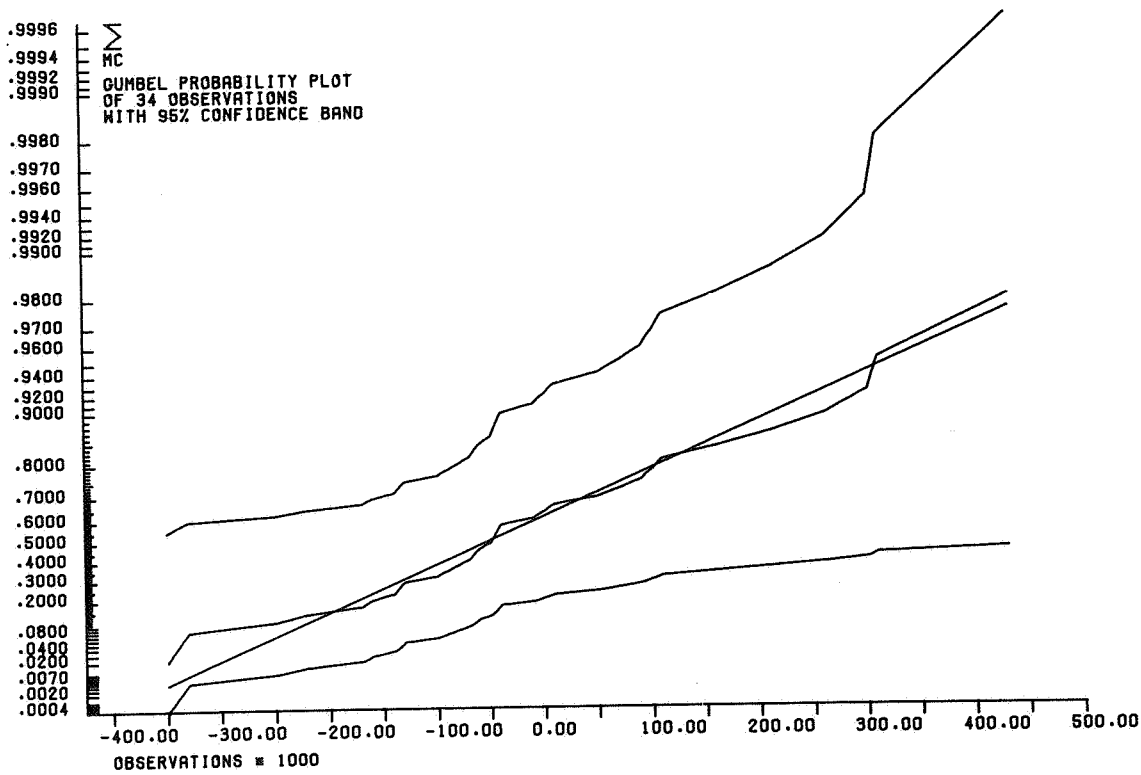
IJsselmeermaxima bij Markermeervariant (tape 2)



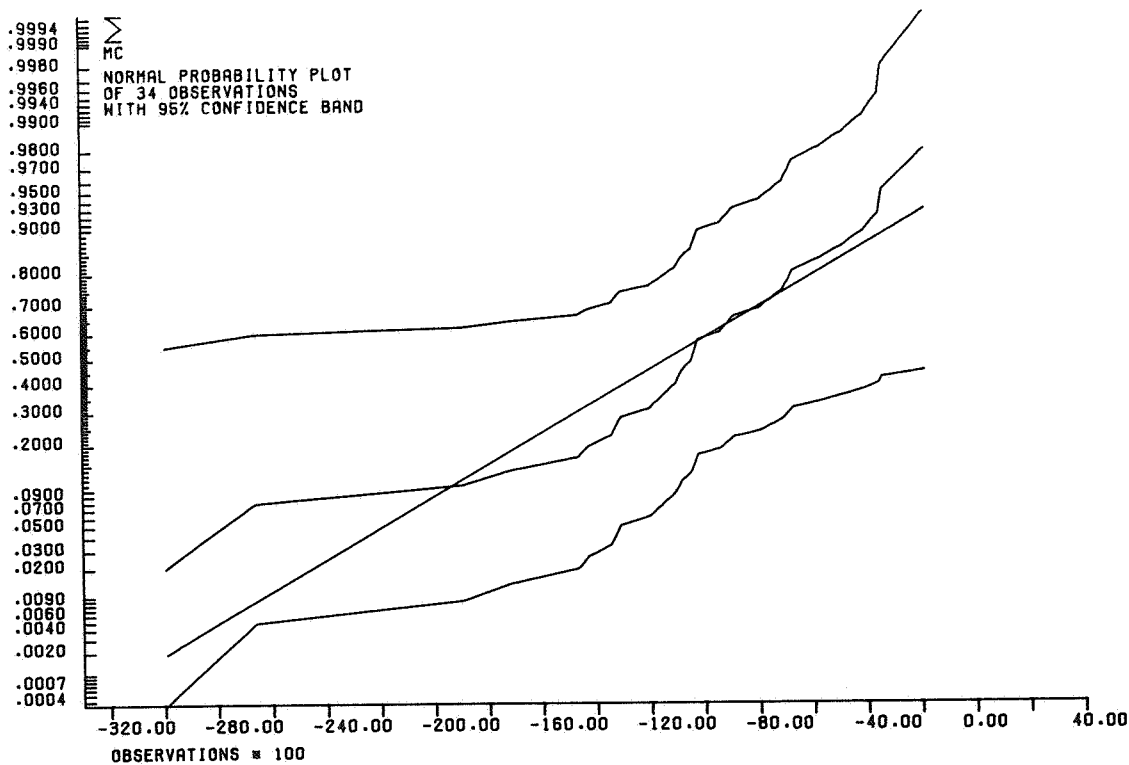
IJsselmeermaxima bij Markermeervariant (tape 2)



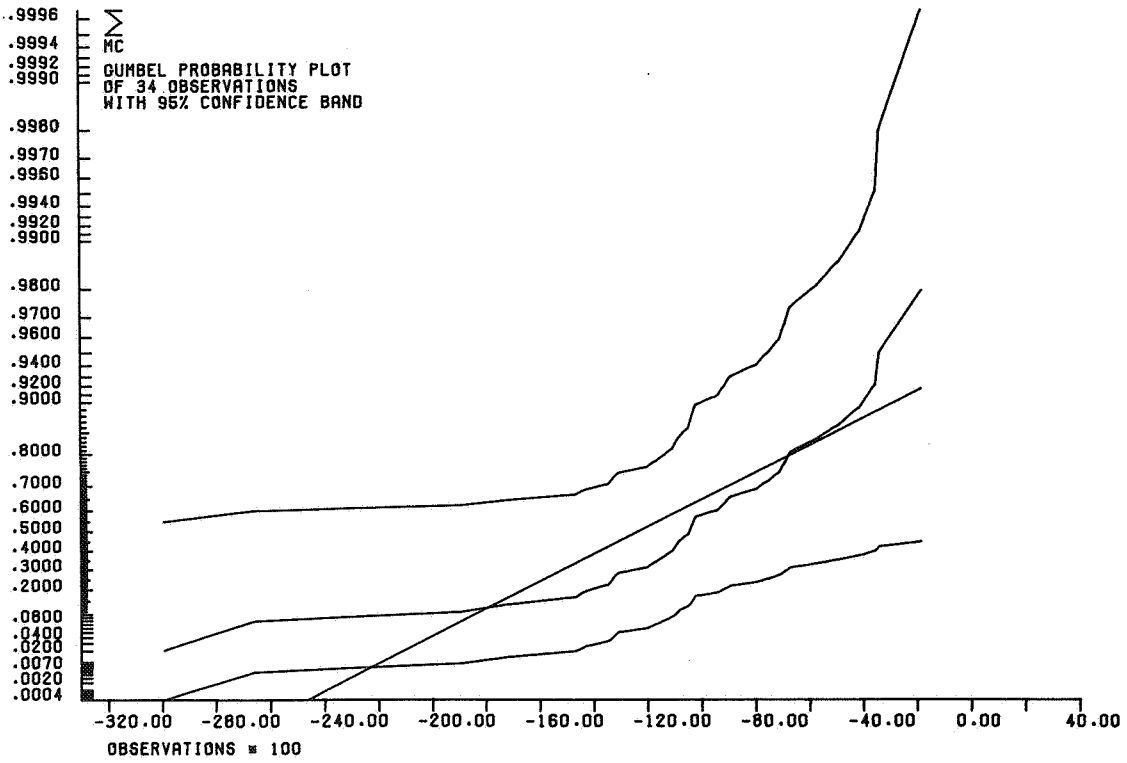
IJsselmeermaxima bij Markermeervariant (tape 2)



IJsselmeermaxima bij Markermeervariant (tape 2)

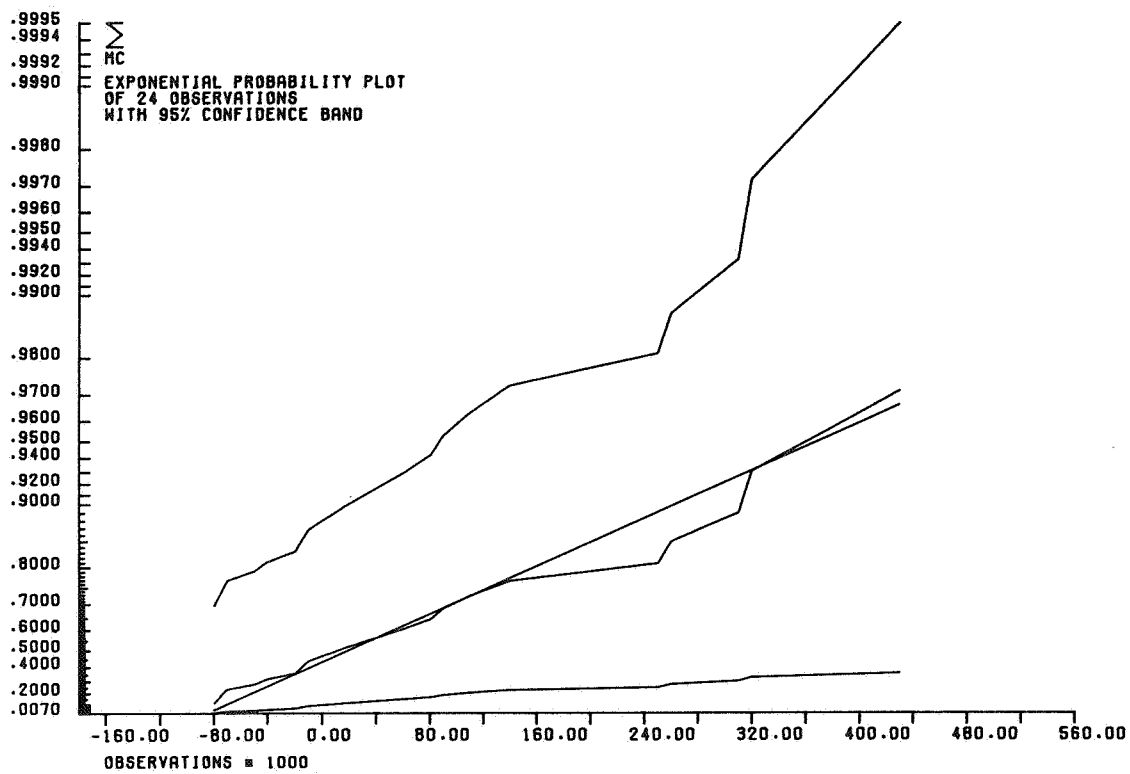


Ln (IJsselmeermaxima + 0.40) bij Markermeervariant (tape 2)

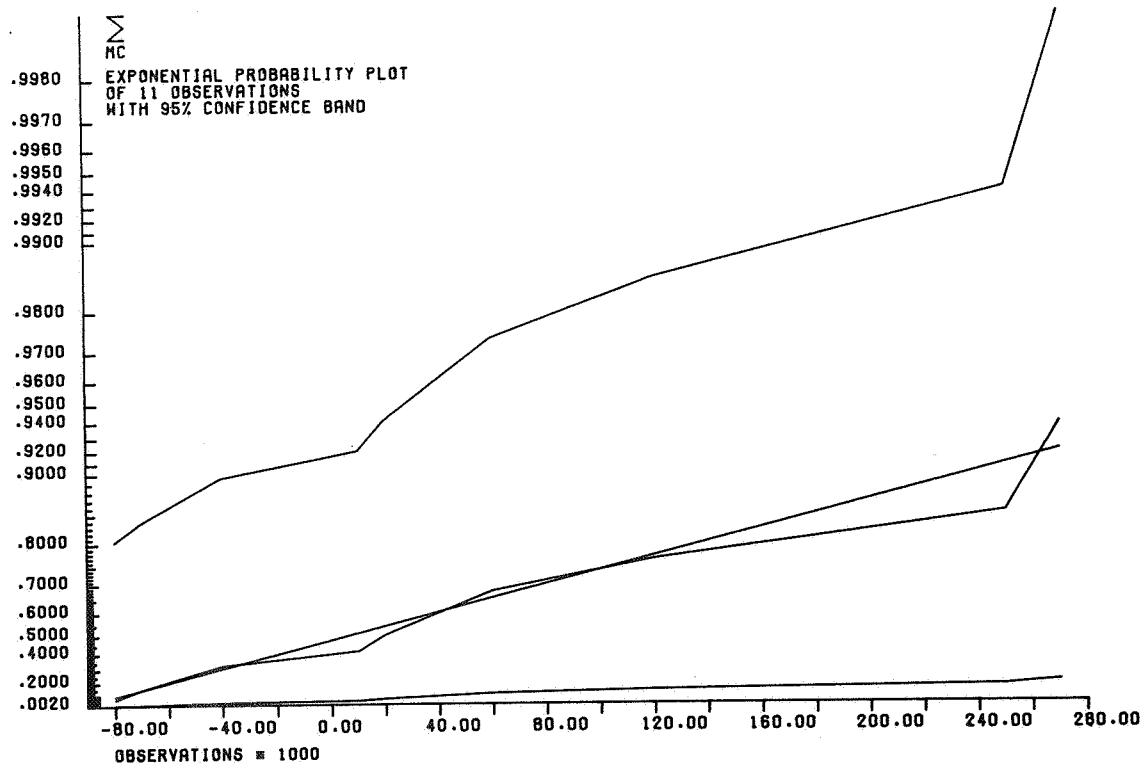


Ln (Ijsselmeervariant +0.40) bij Markermeervariant (tape 2)

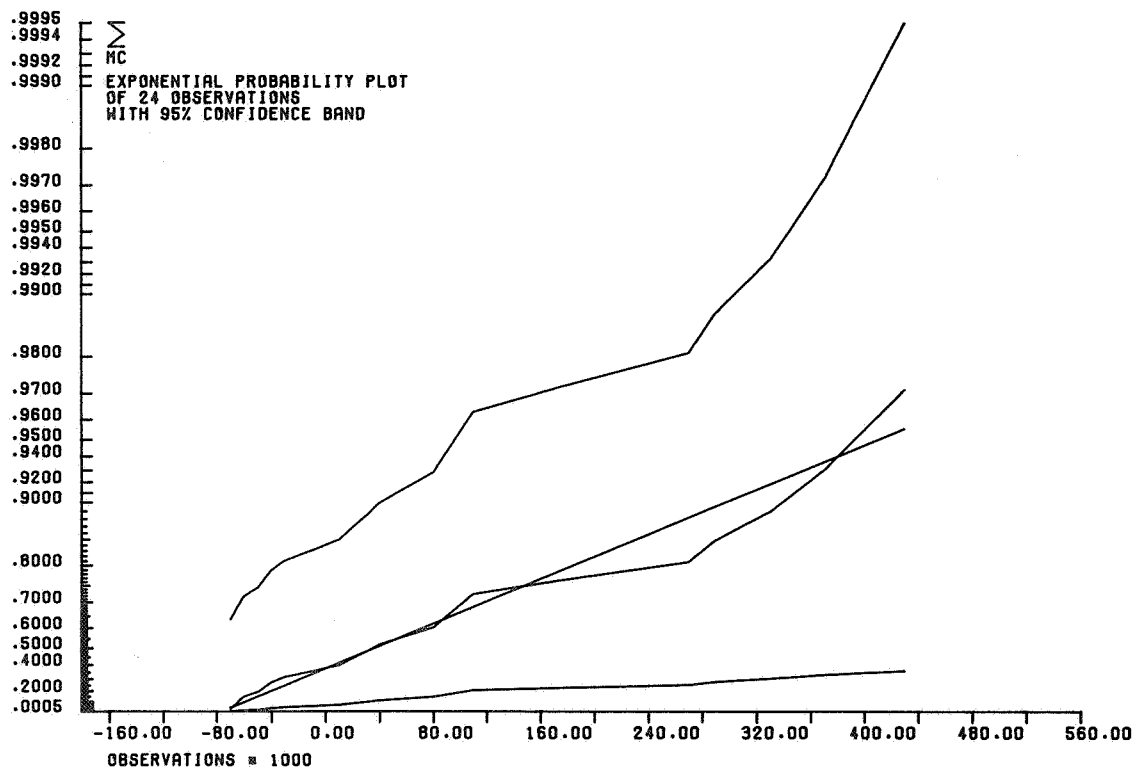
Appendix II.1.3. PEILEN BOVEN -0.10, EXPONENTIELE PLOTS (DERDE TAPE).



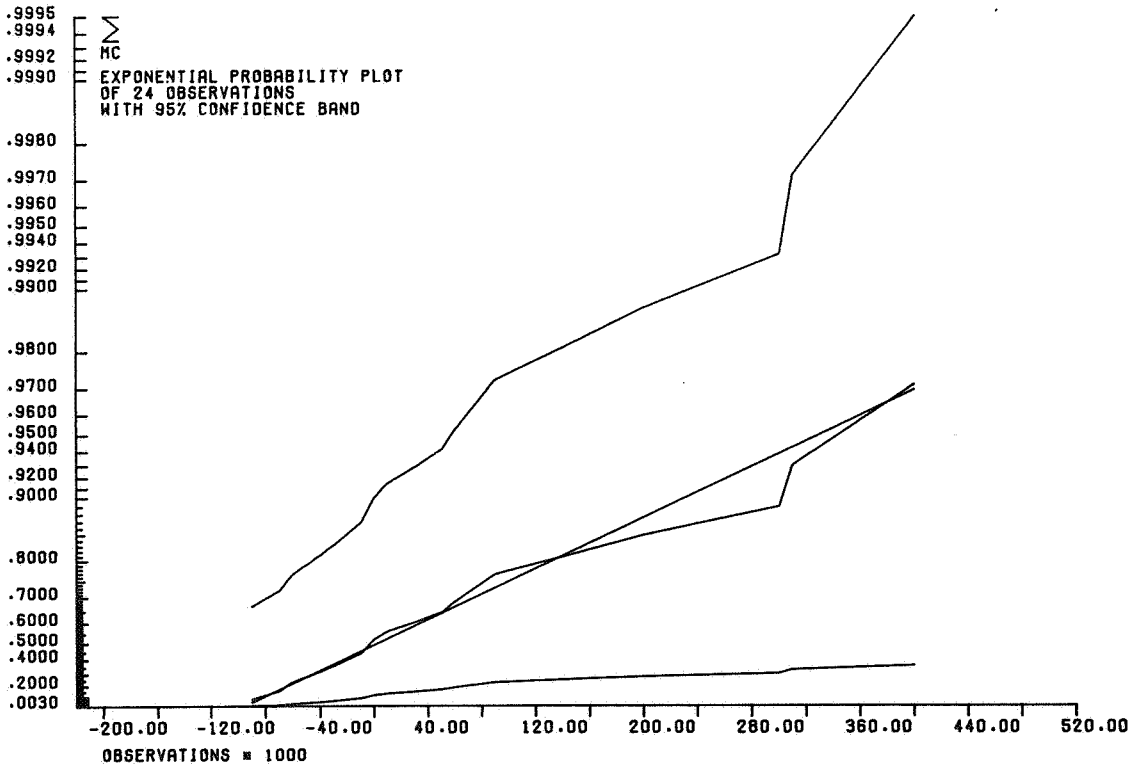
IJsselmeermaxima \geq -0.10 bij Markermeervariant (tape 3)



Markermeermaxima ≥ -0.10 bij Markermeervariant (tape 3)



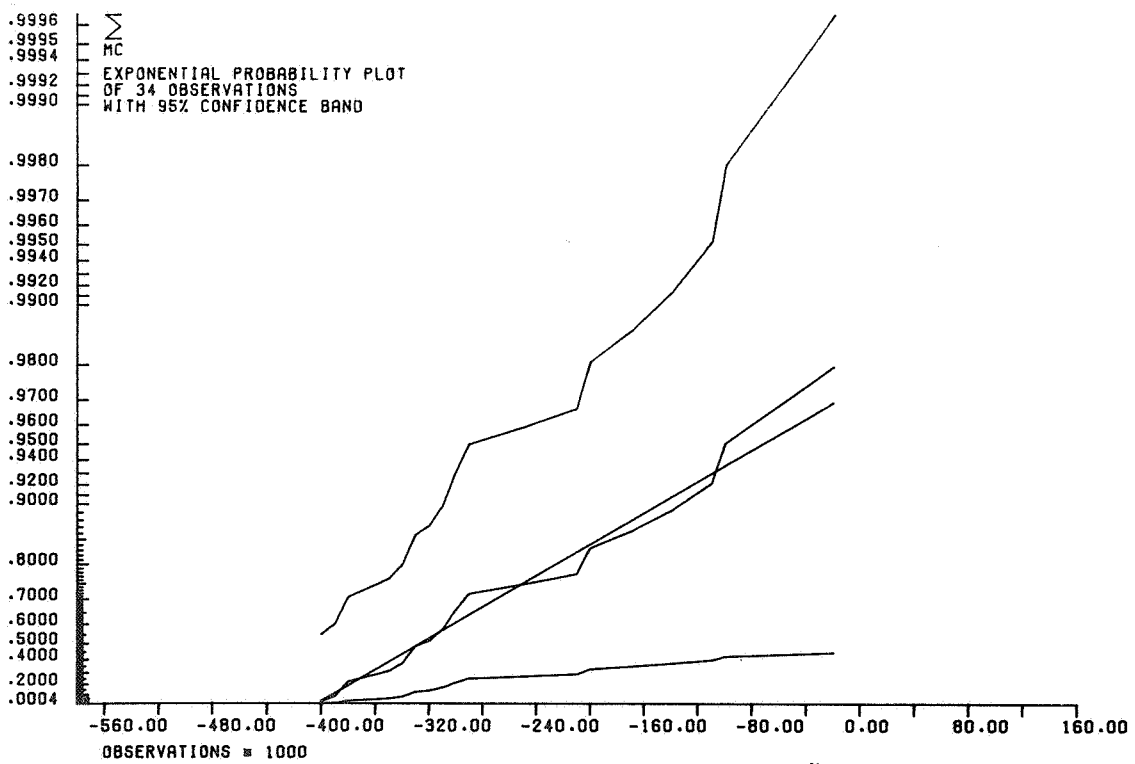
IJsselmeermaxima ≥ -0.10 bij Markerwaardvariant (tape 3)



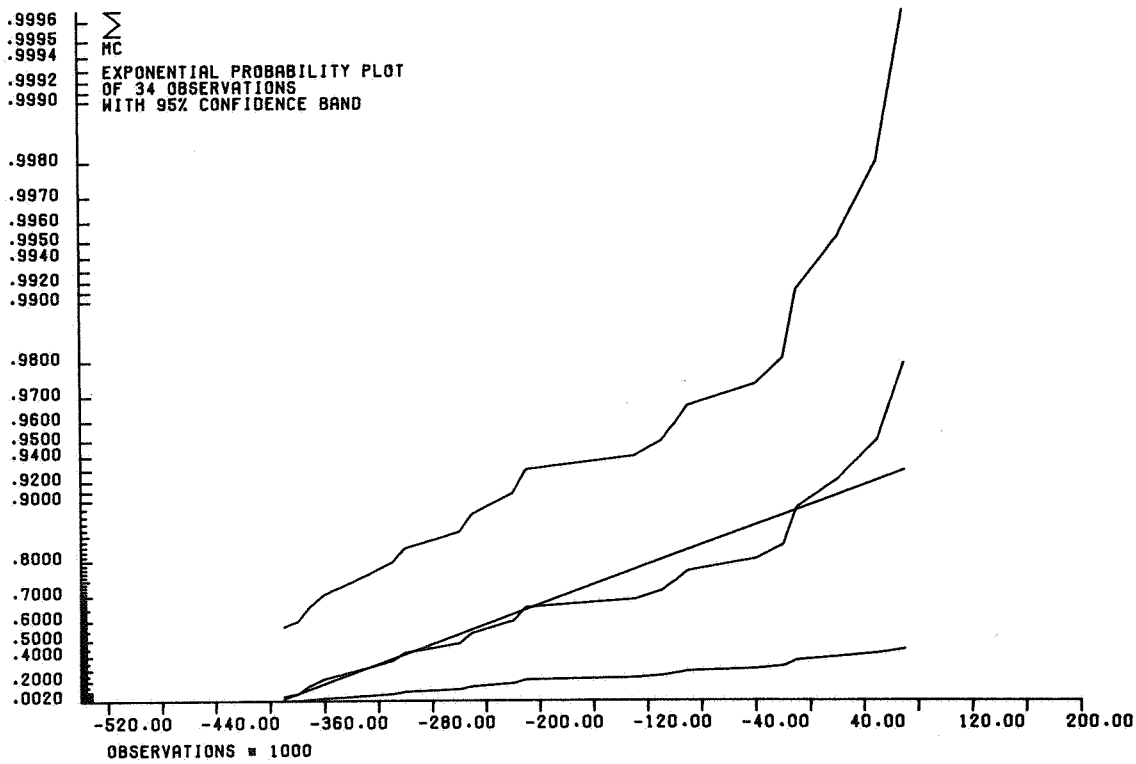
Markermeermaxima ≥ -0.10 bij Markerwaardvariant (tape 3)

Appendix II.2. PLOTS MAXIMA PER MAAND.

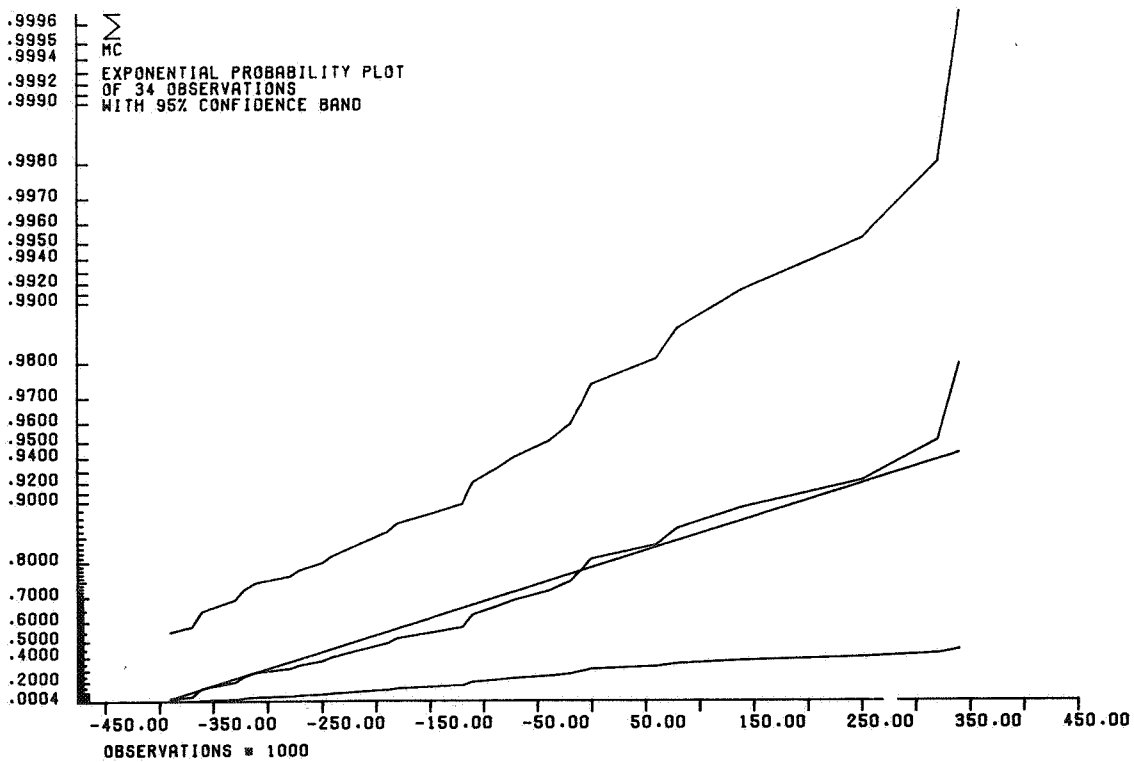
Appendix II.2.1. EXPONENTIELE PLOTS (DERDE TAPE).



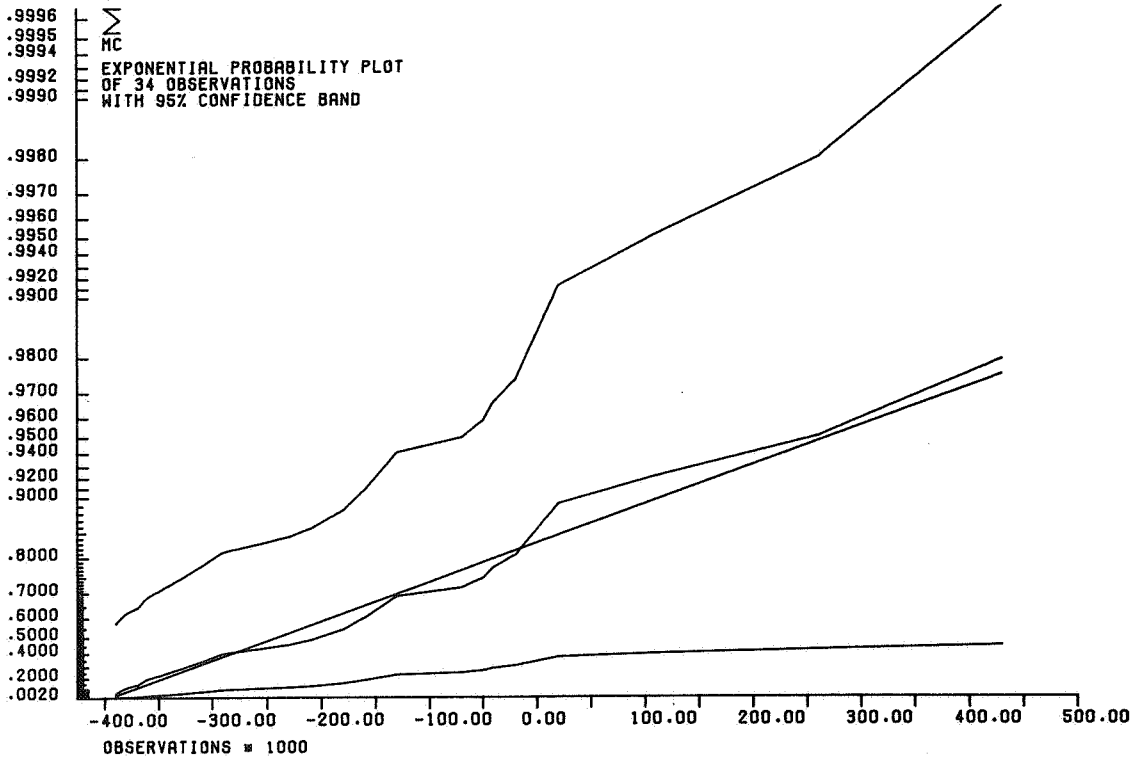
IJsselmeermaxima over oktober bij Markermeervariant (tape 3)



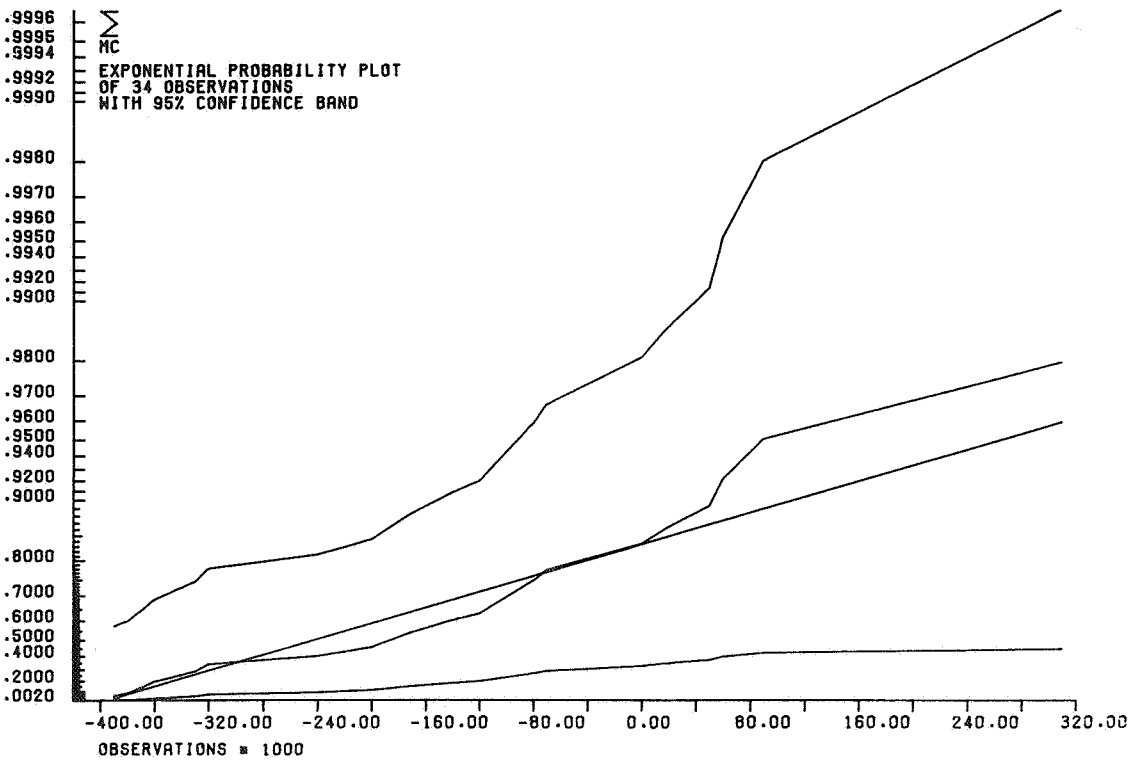
IJsselmeermaxima over november bij Markermeervariant (tape 3)



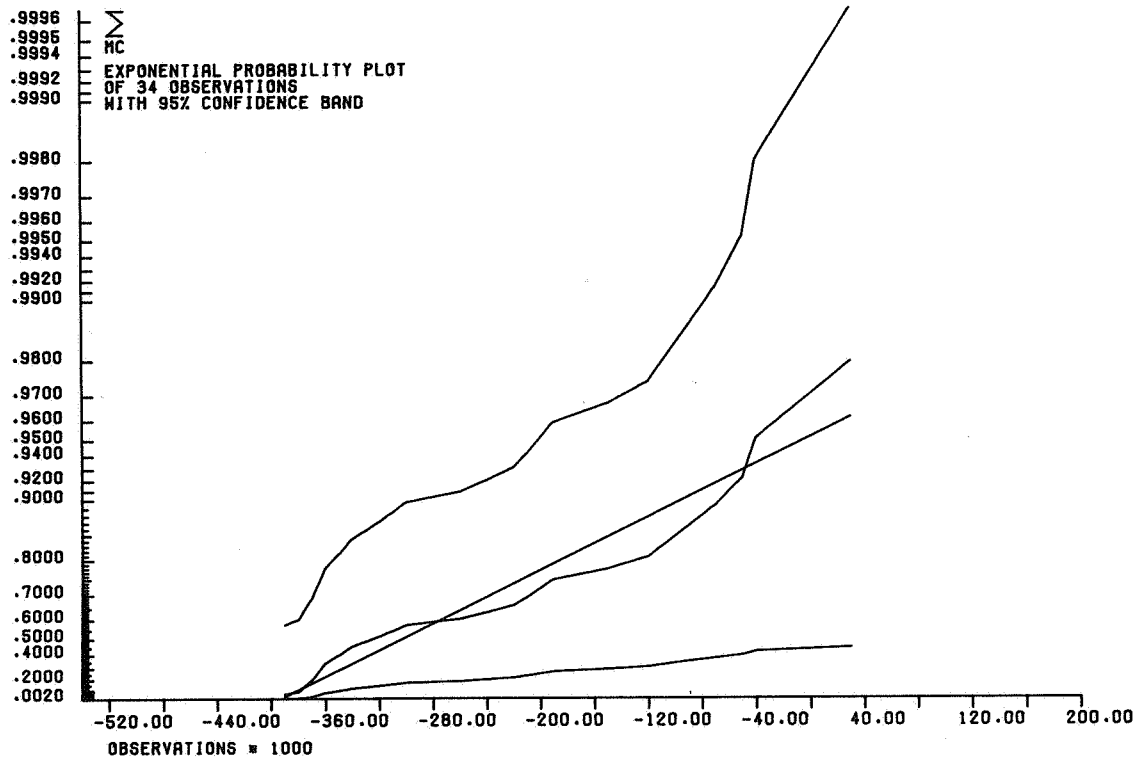
IJsselmeermaxima over december bij Markermeervariant (tape 3)



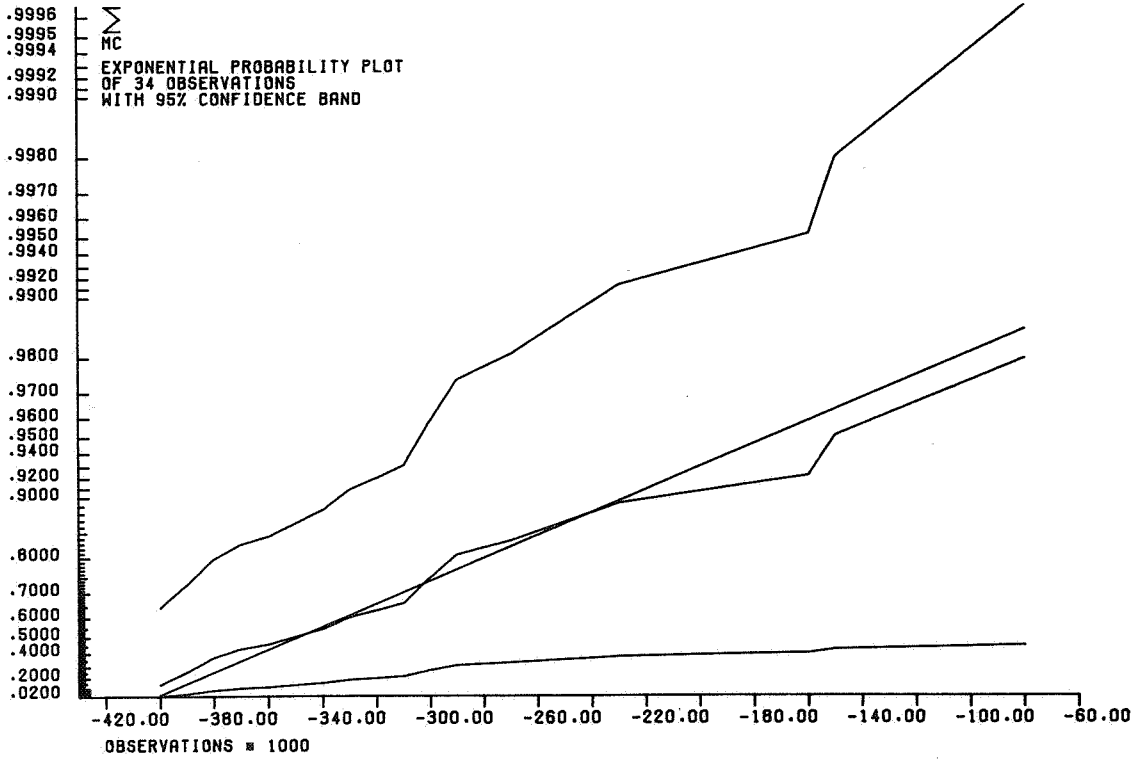
IJsselmeermaxima over januari bij Markermeervariant (tape 3)



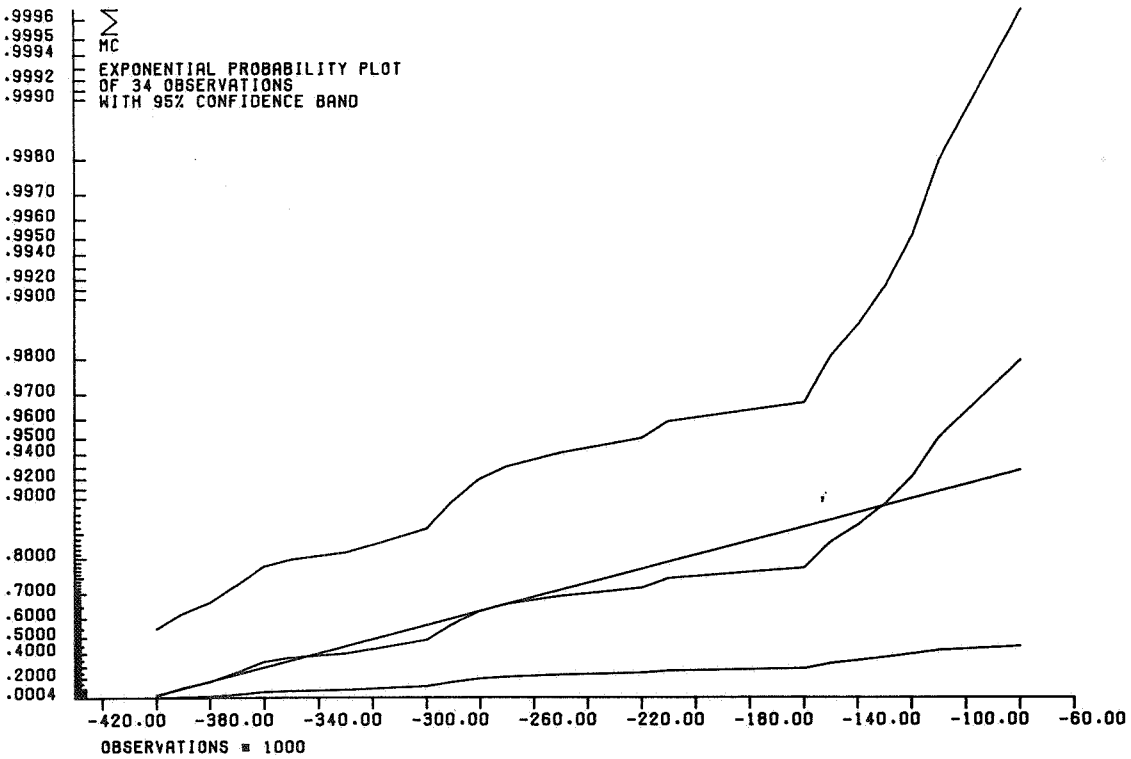
IJsselmeermaxima over februari bij Markermeervariant (tape 3)



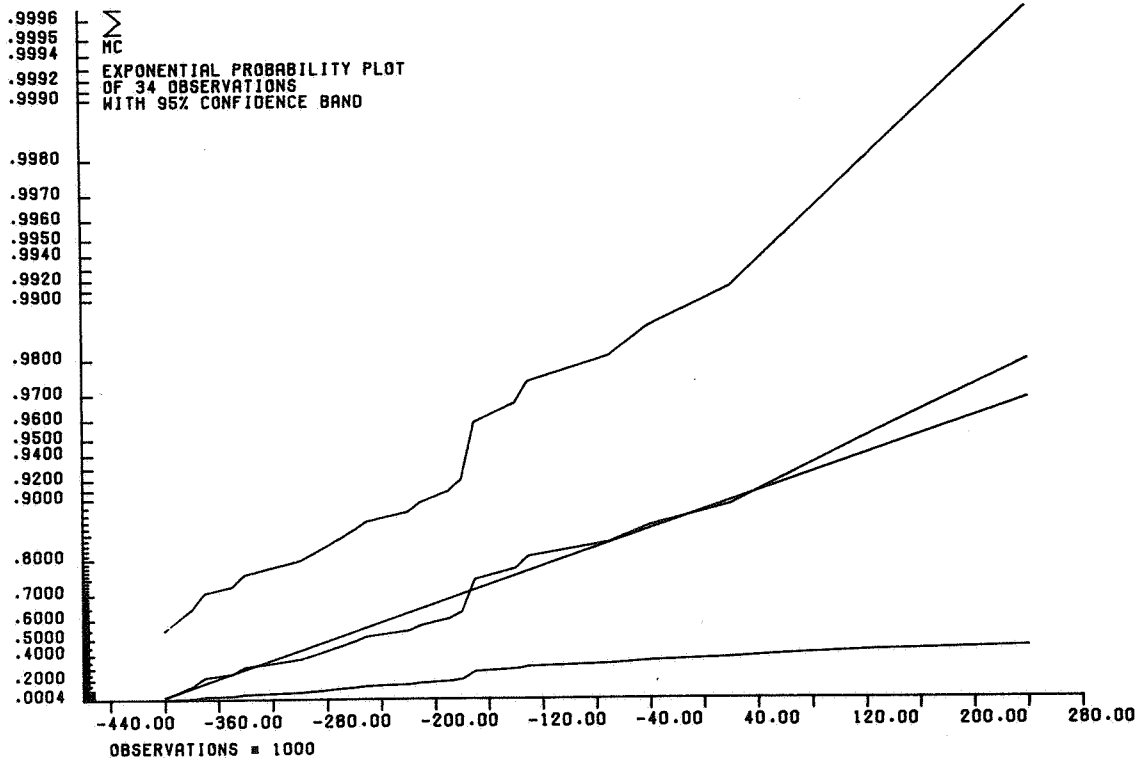
IJsselmeermaxima over maart bij Markermeervariant (tape 3)



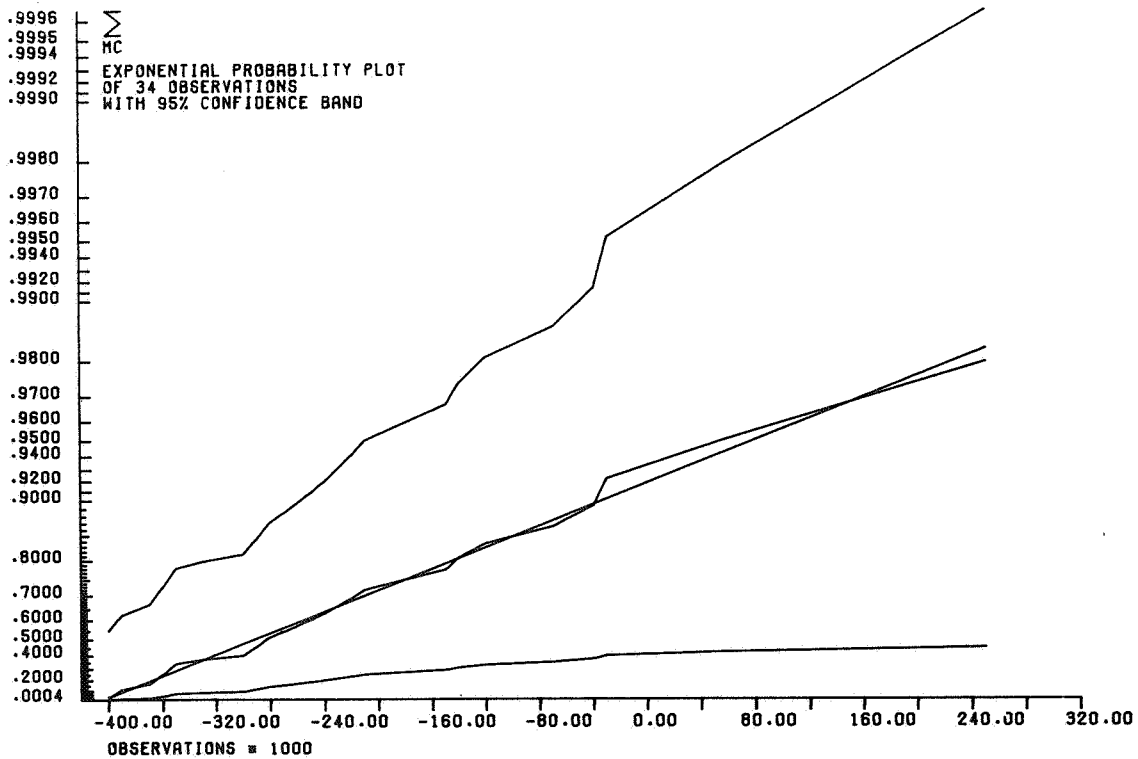
Markermeermaxima over oktober bij Markermeervariant (tape 3)



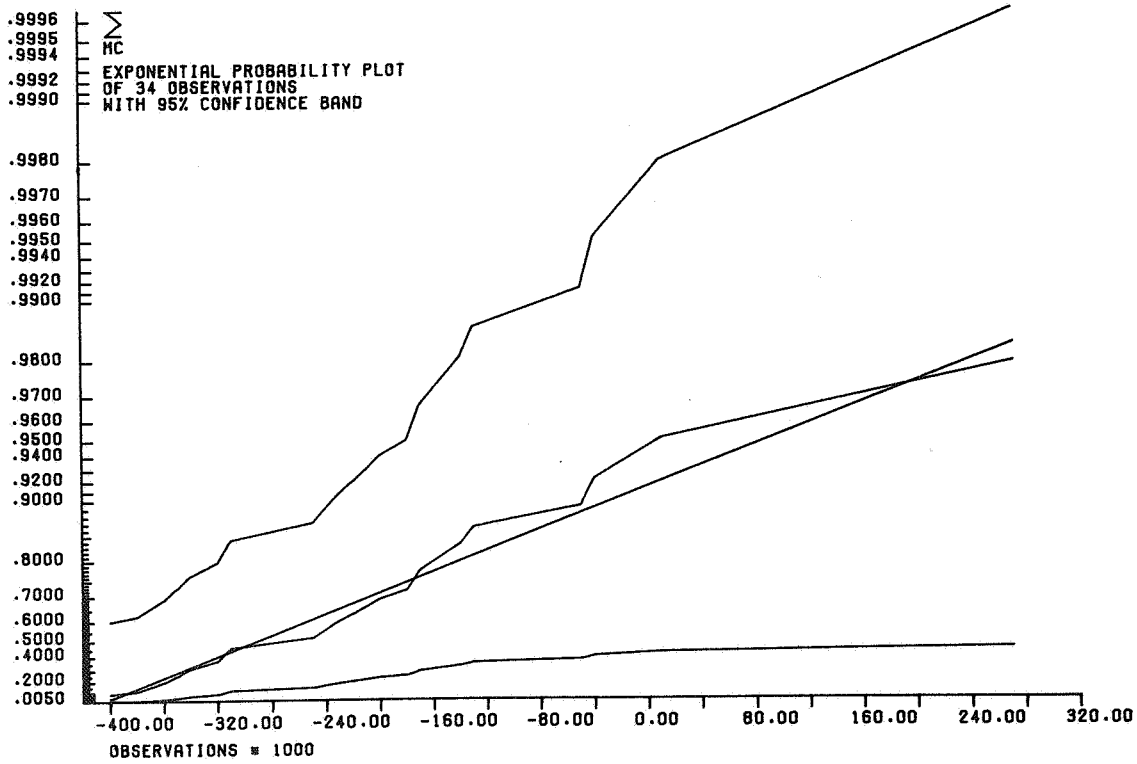
Markermeermaxima over november bij Markermeervariant (tape 3)



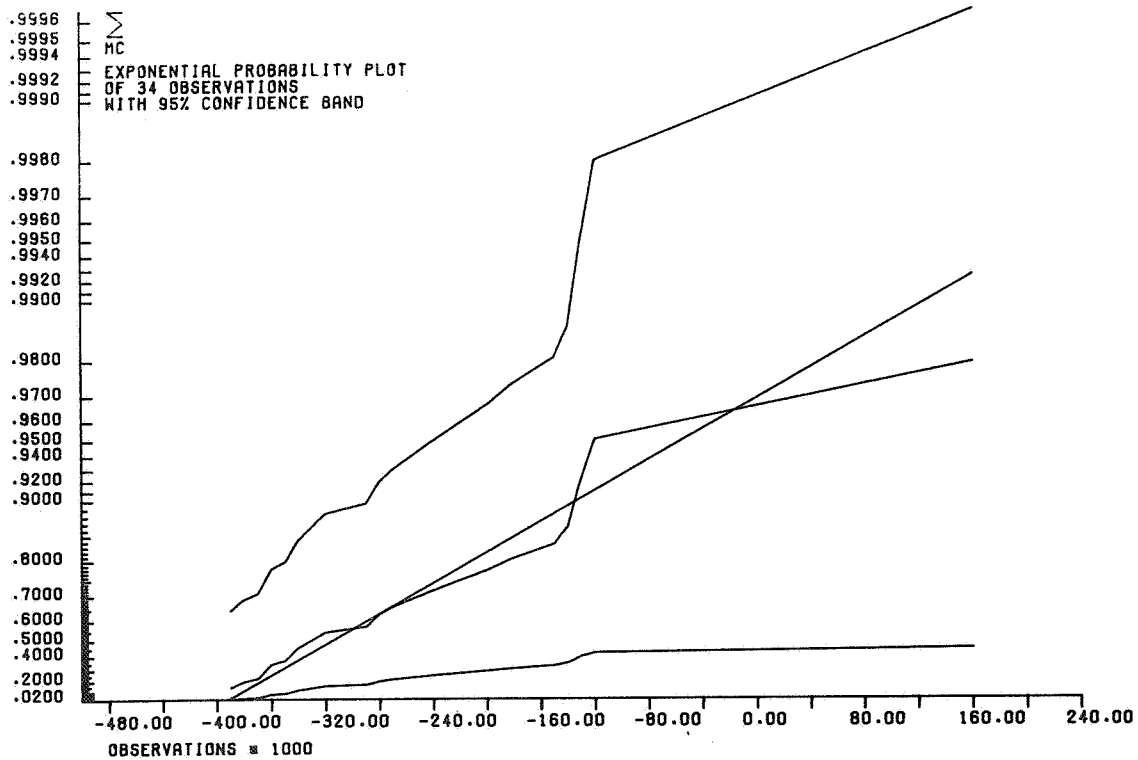
Markermeermaxima over december bij Markermeervariant (tape 3)



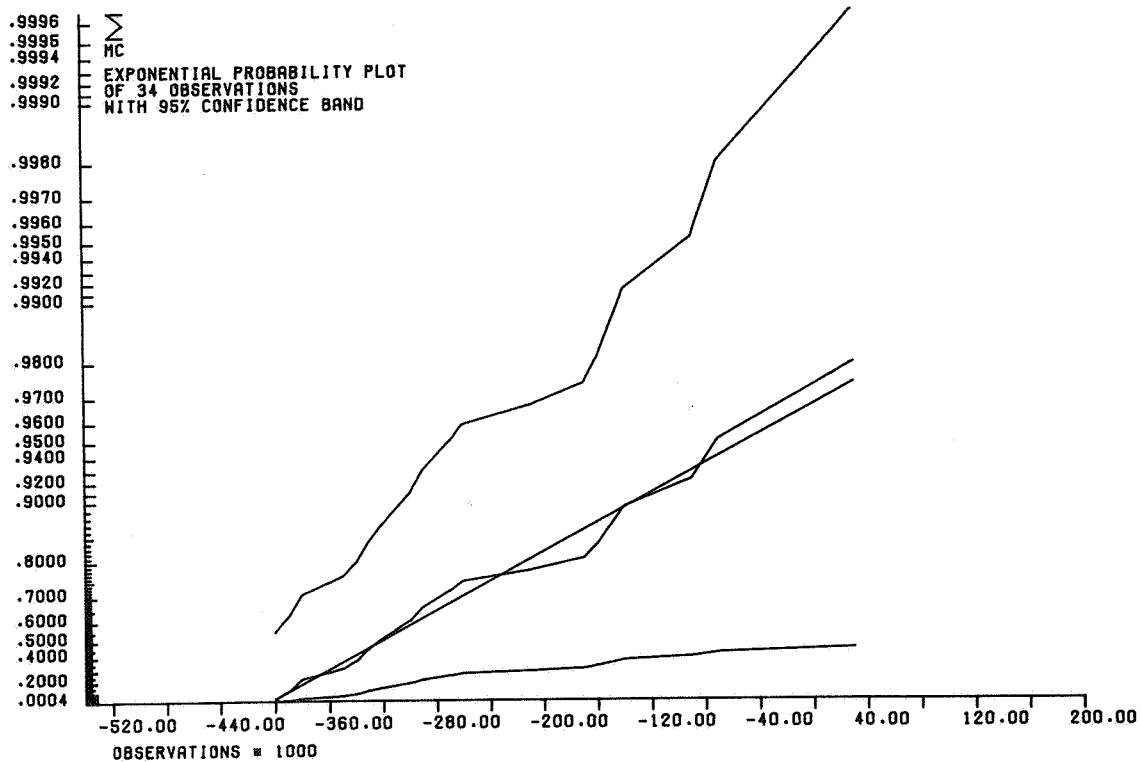
Markermeermaxima over januari bij Markermeervariant (tape 3)



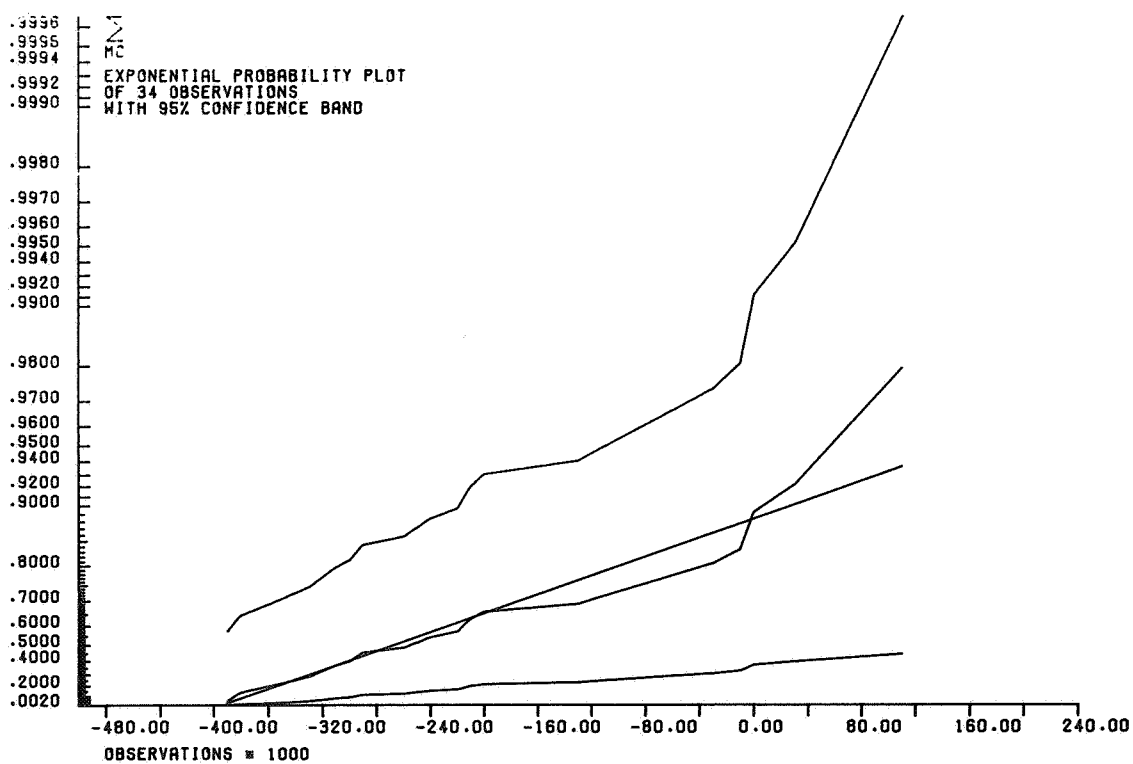
Markerneermaxima over februari bij Markerneervariant (tape 3)



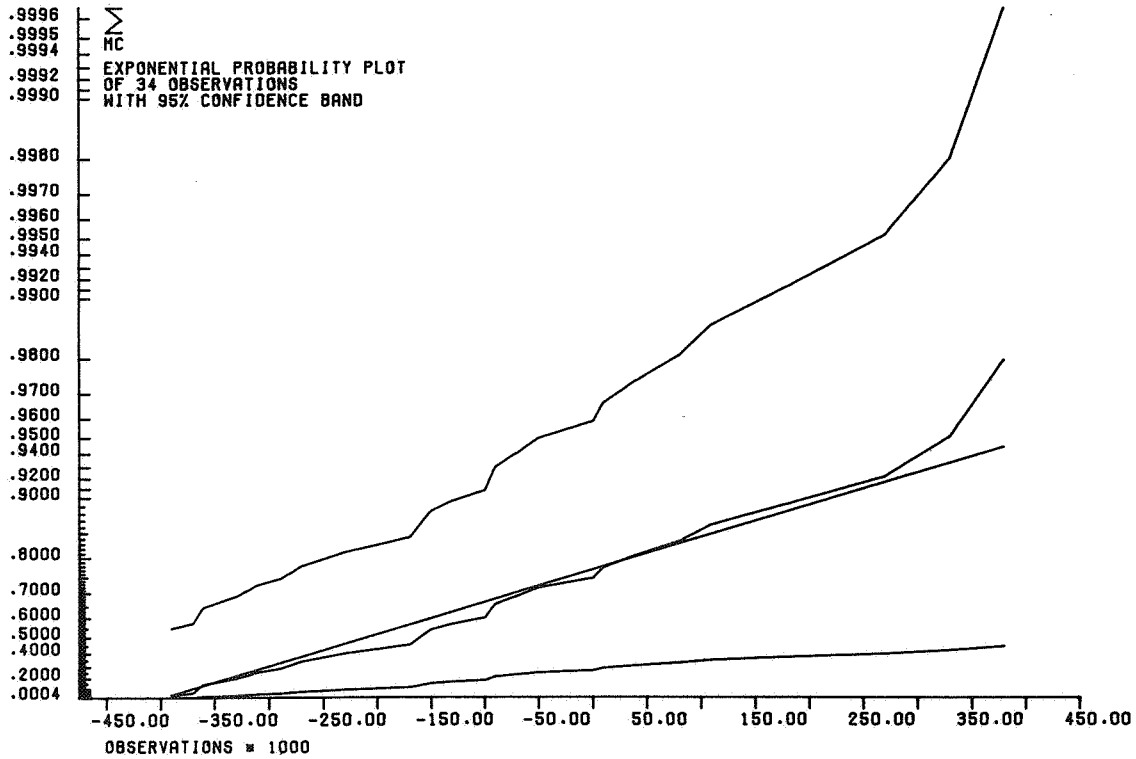
Markerneermaxima over maart bij Markerneervariant (tape 3)



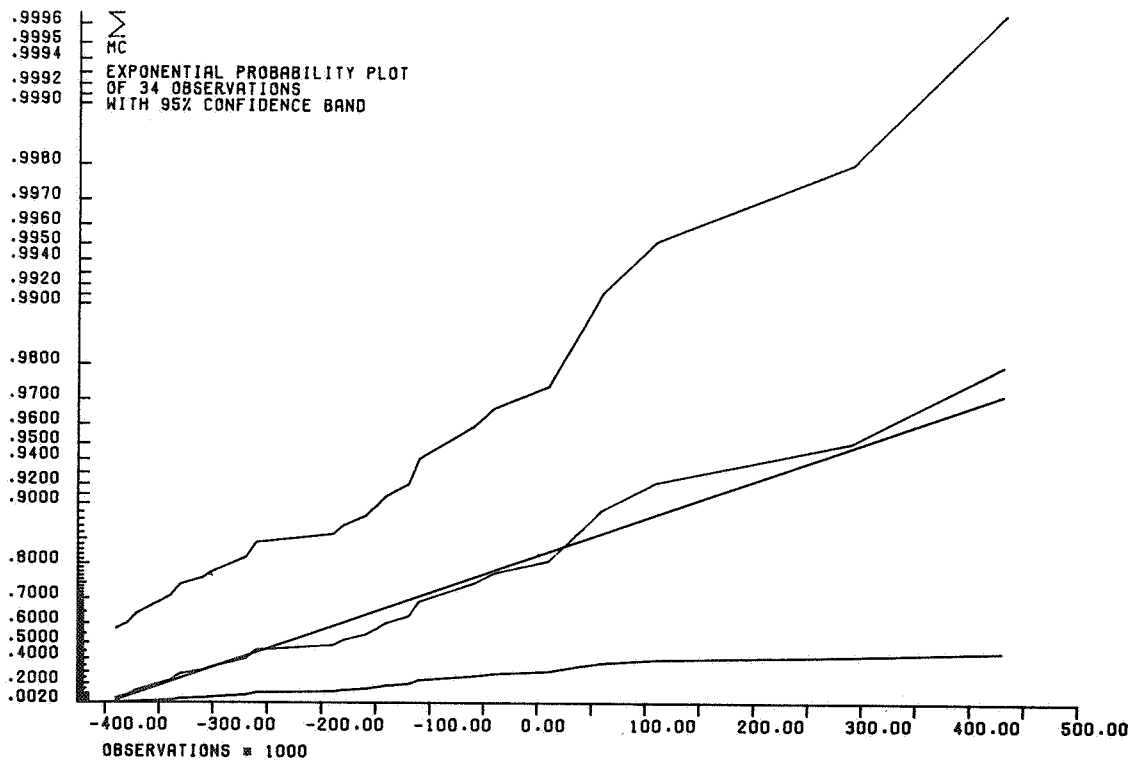
IJsselmeermaxima over oktober bij Markerwaardvariant (tape 3)



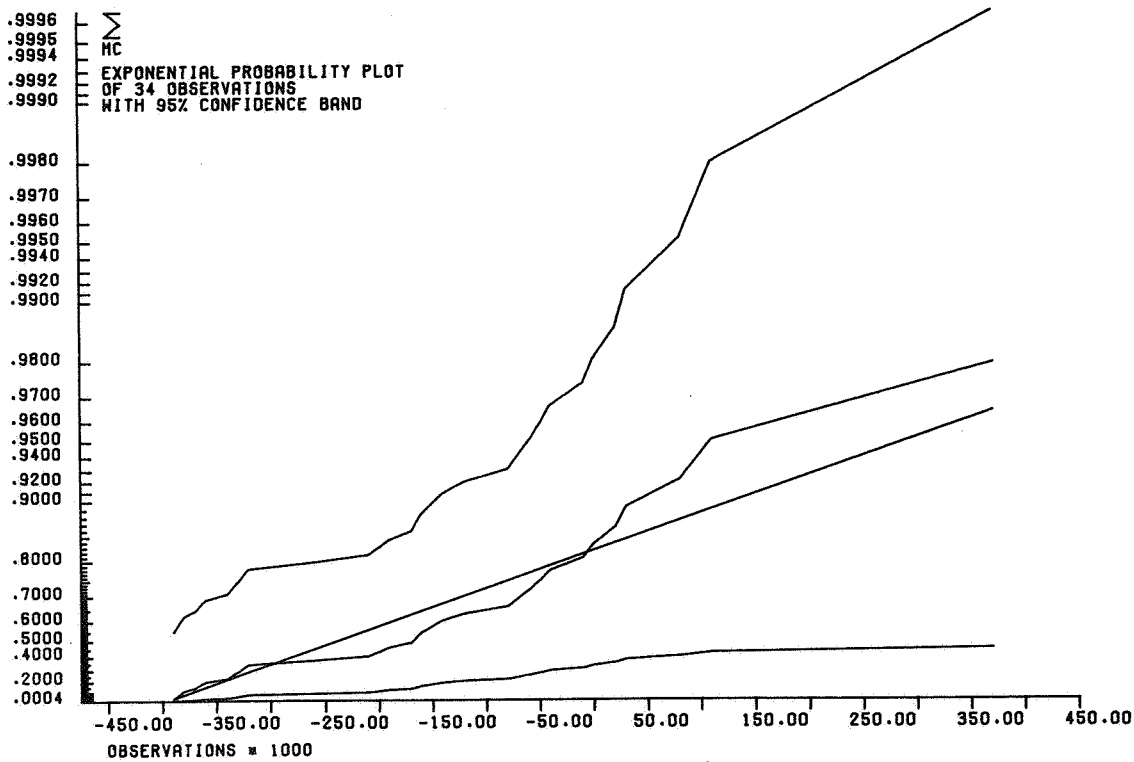
IJsselmeermaxima over november bij Markerwaardvariant (tape 3)



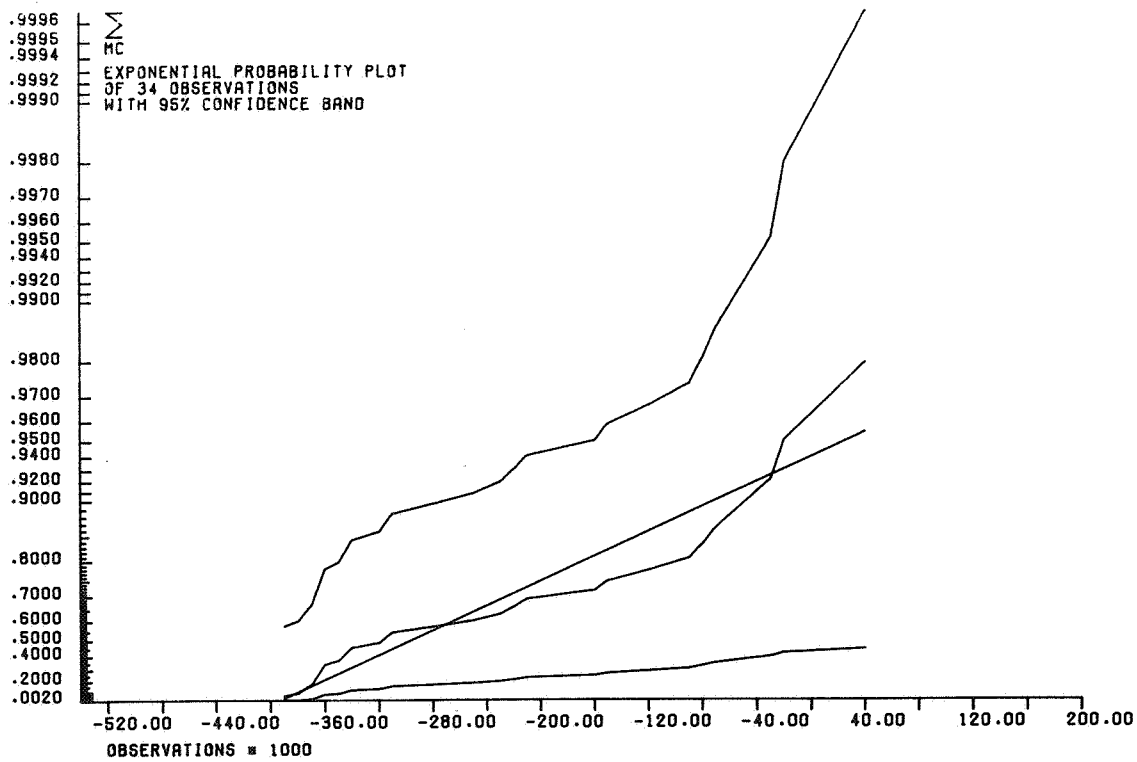
IJsselmeermaxima over december bij Markerwaardvariant (tape 3)



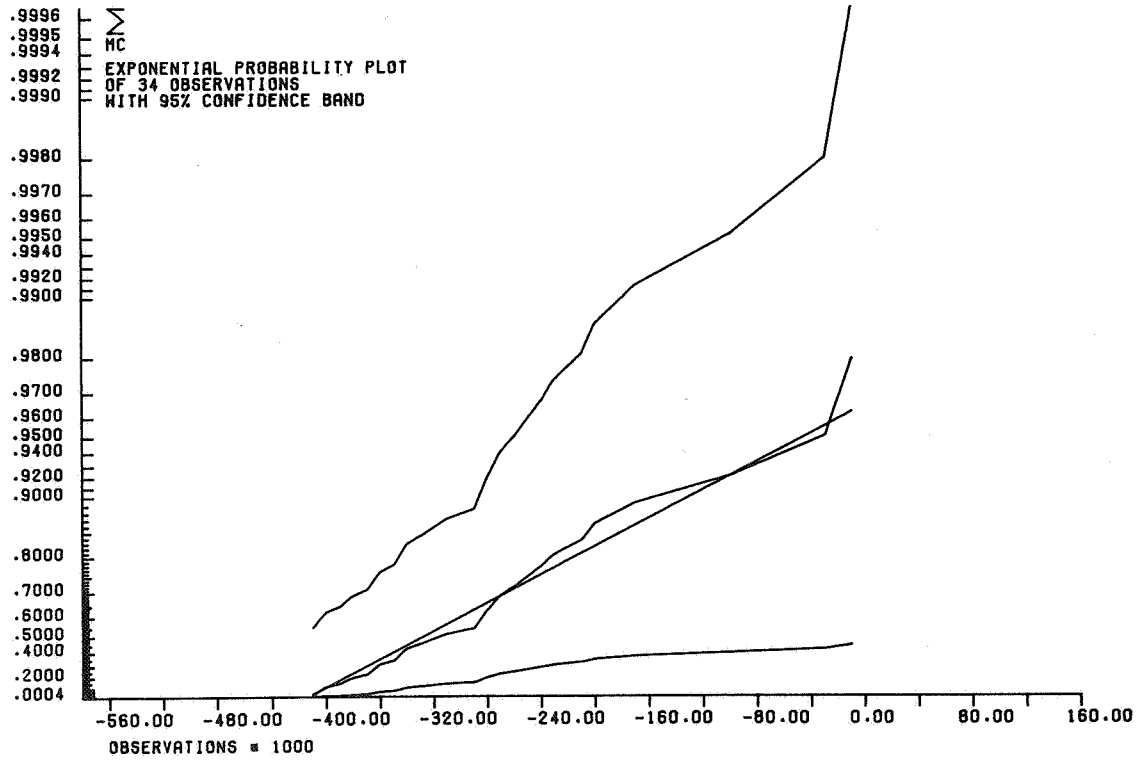
IJsselmeermaxima over januari bij Markerwaardvariant (tape 3)



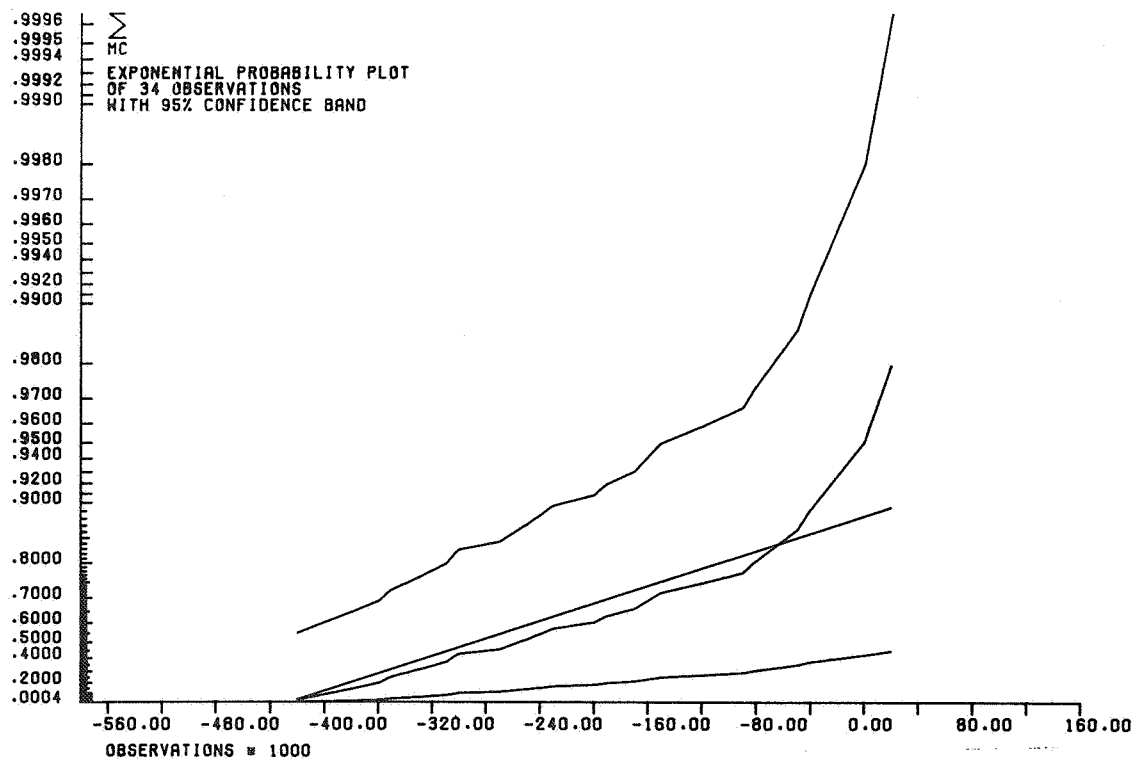
IJsselmeermaxima over februari bij Markerwaardvariant (tape 3)



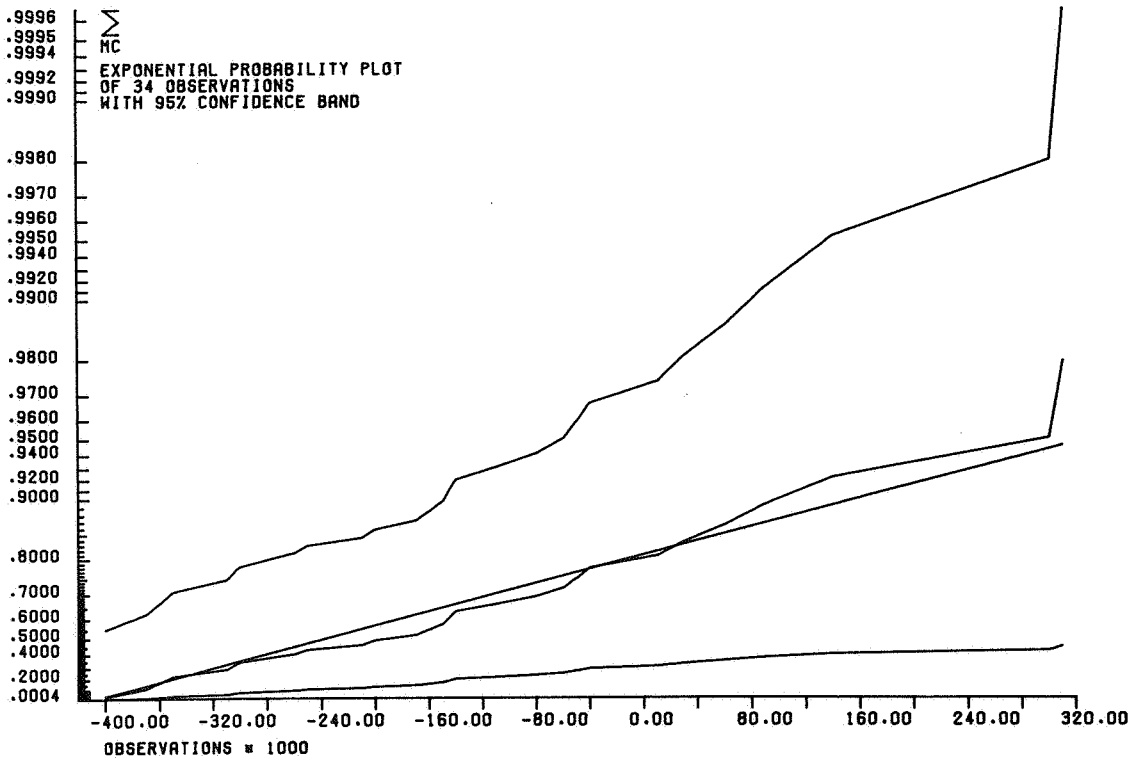
IJsselmeermaxima over maart bij Markerwaardvariant (tape 3)



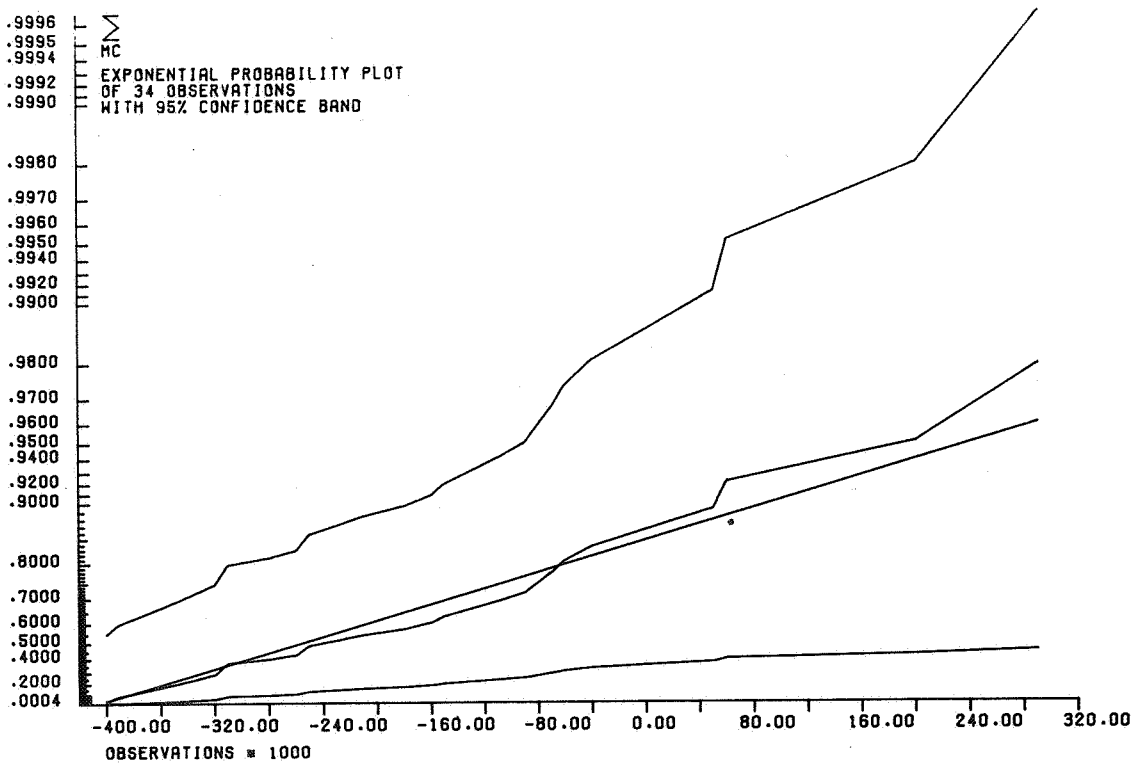
Markermeermaxima over oktober bij Markerwaardvariant (tape 3)



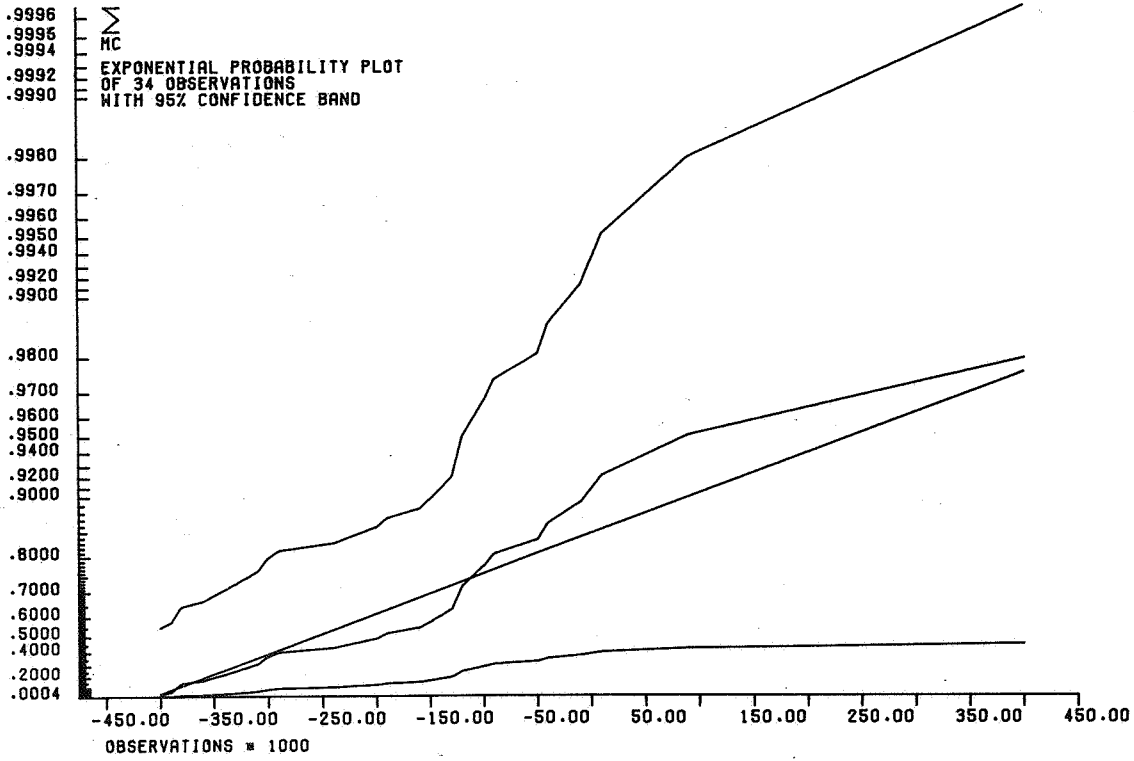
Markermeermaxima over november bij Markerwaardvariant (tape 3)



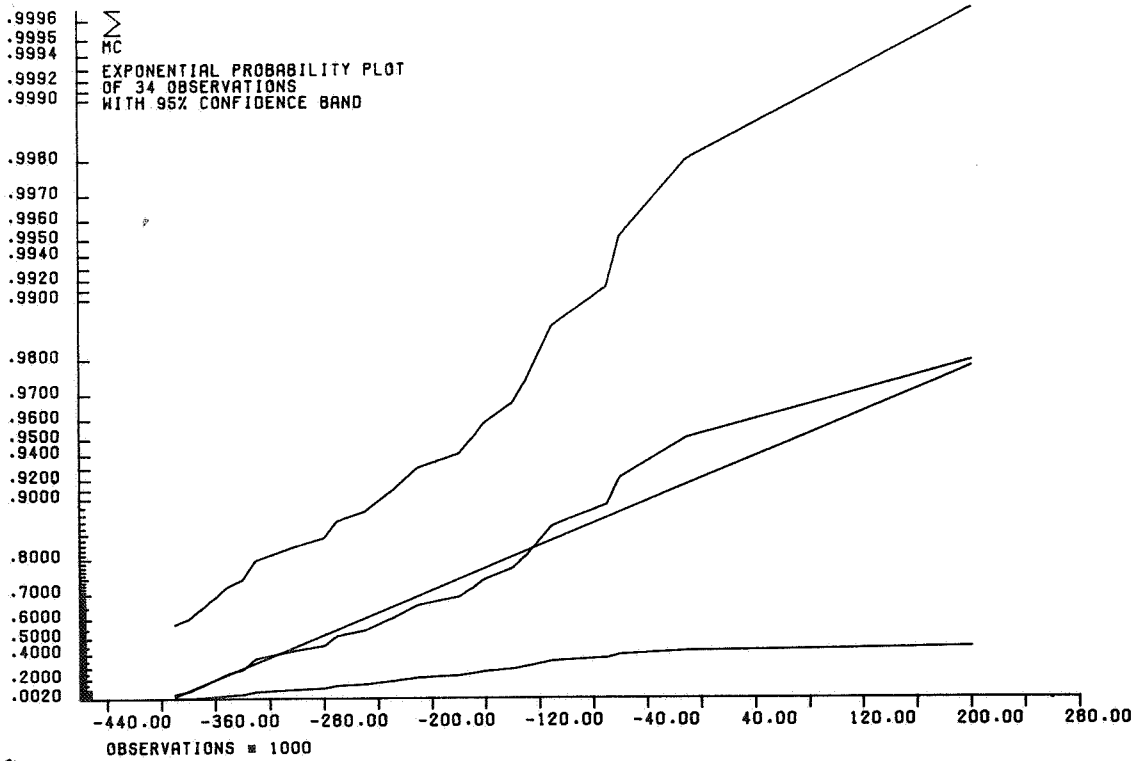
Markermeermaxima over december bij Markerwaardvariant (tape 3)



Markermeermaxima over januari bij Markerwaardvariant (tape 3)

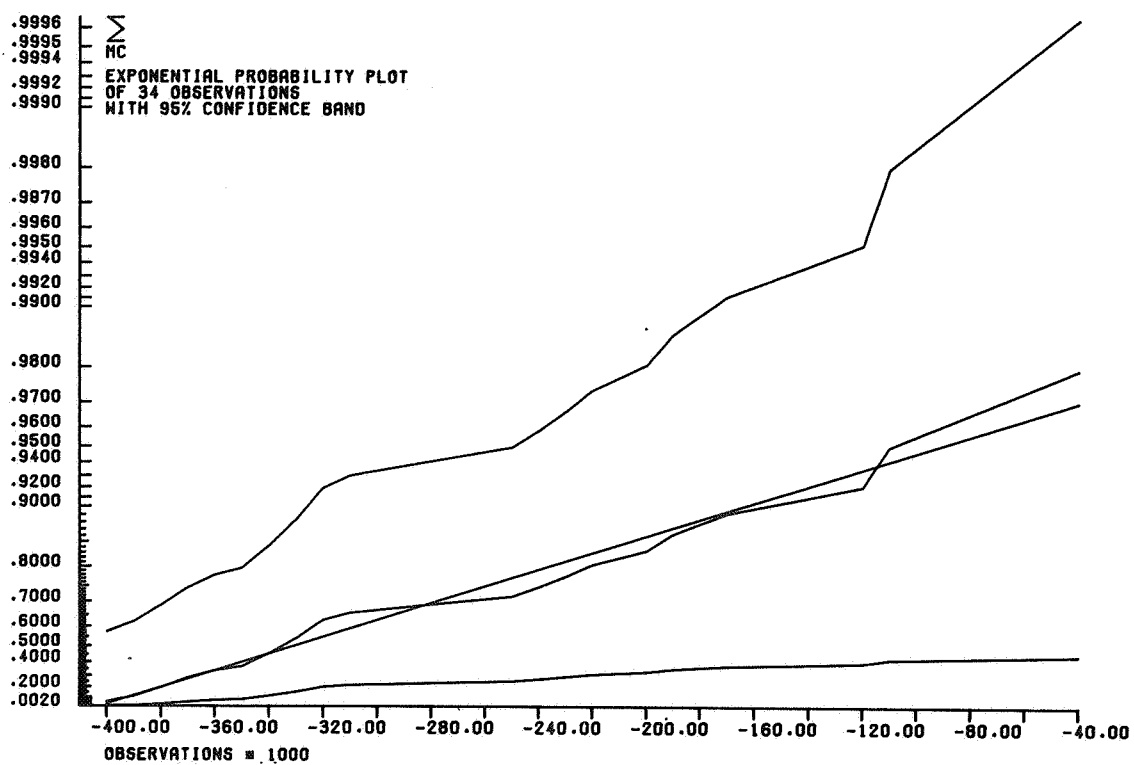


Markermeermaxima over februari bij Markerwaardvariant (tape 3)

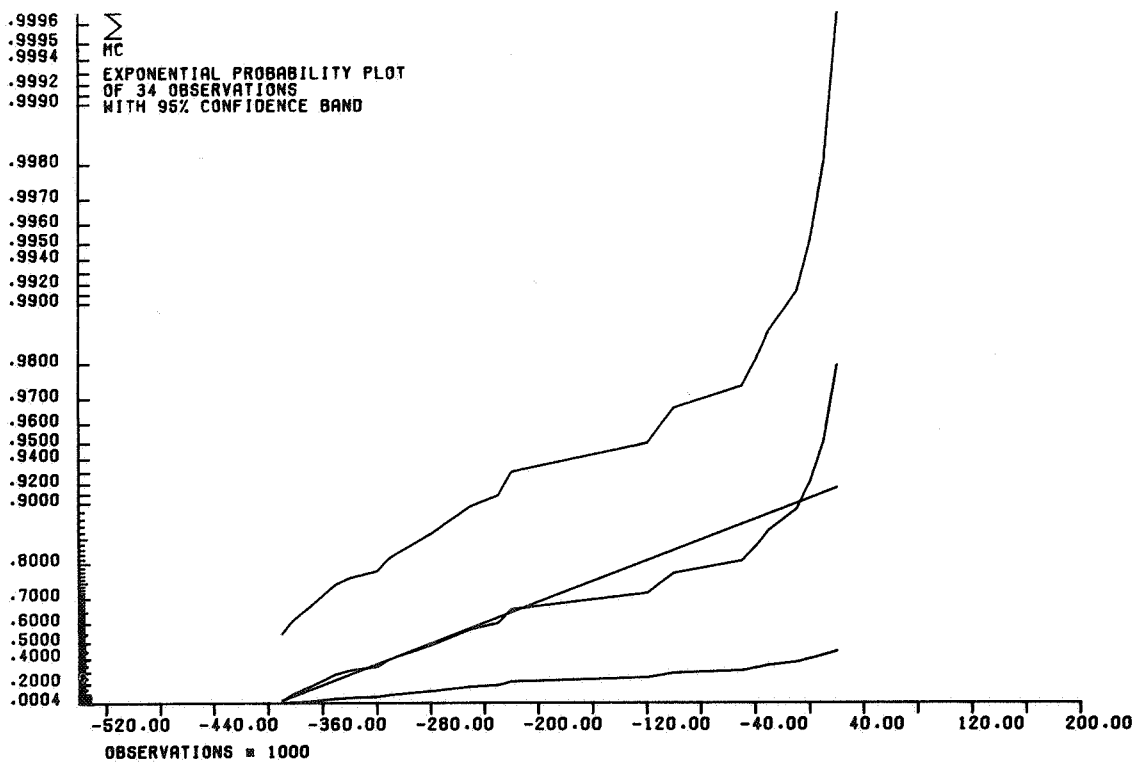


Markermeermaxima over maart bij Markerwaardvariant (tape 3)

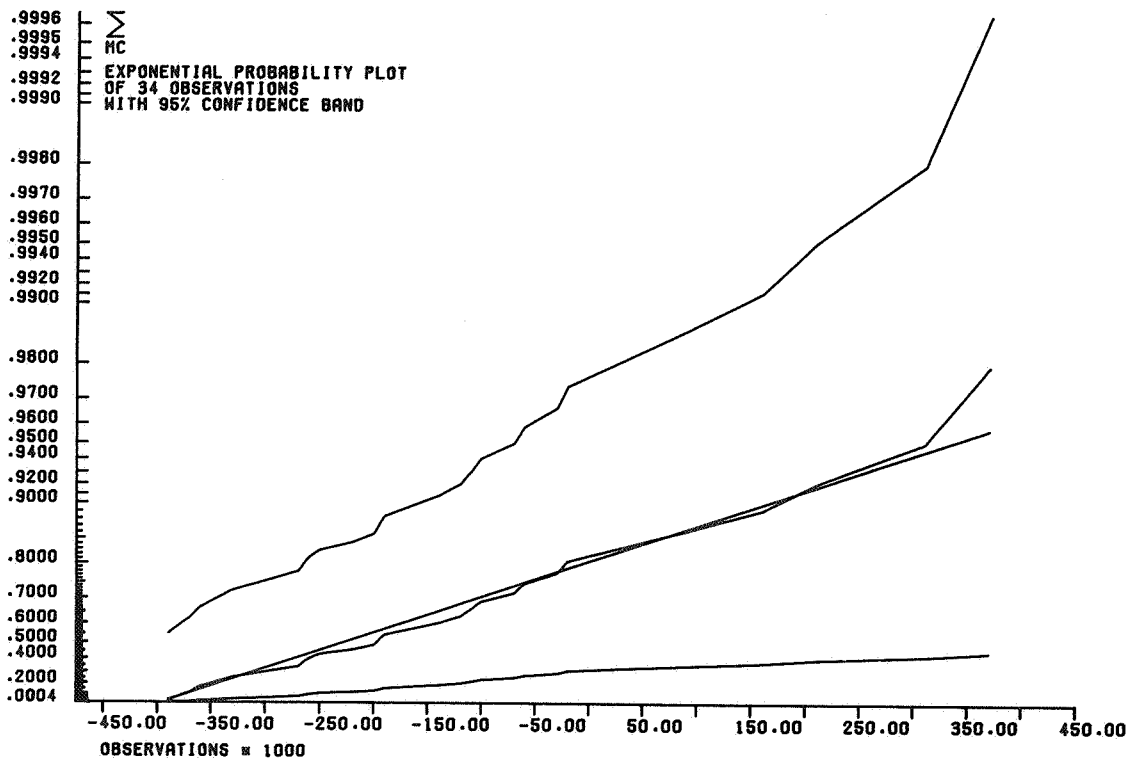
Appendix II.2.2. EXPONENTIELE PLOTS (TWEEDE TAPE).



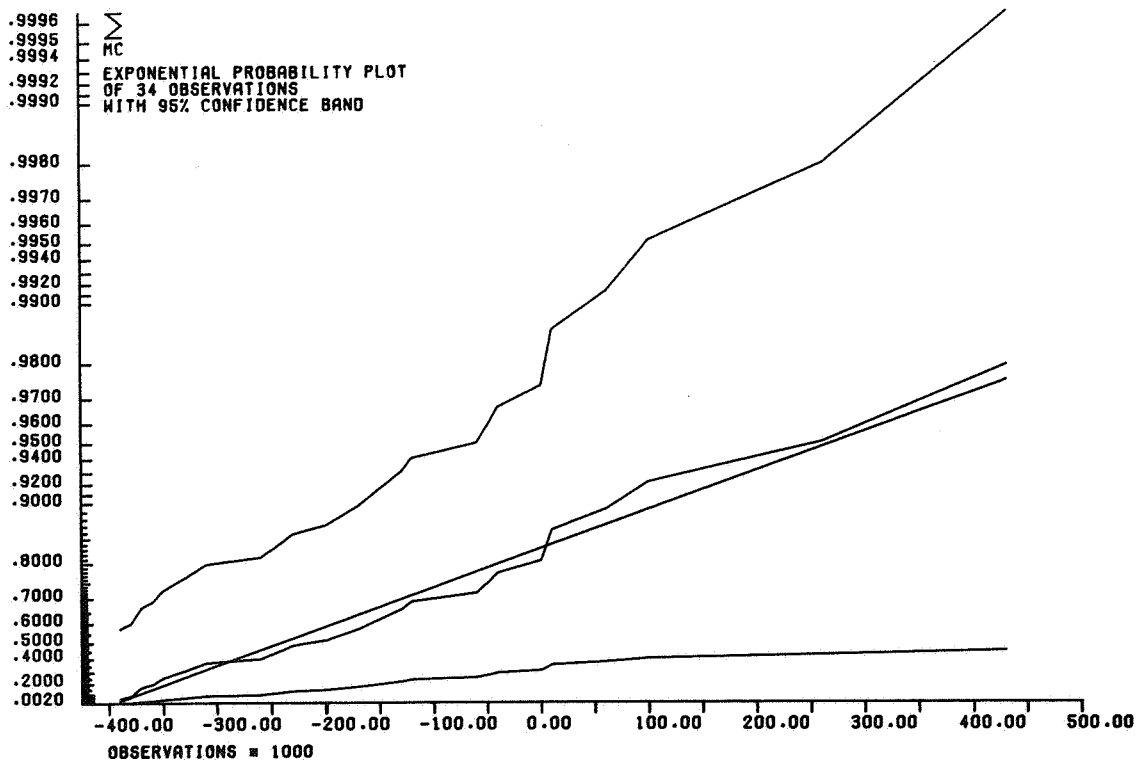
IJsselmeermaxima over oktober bij Markermeervariant (tape 2)



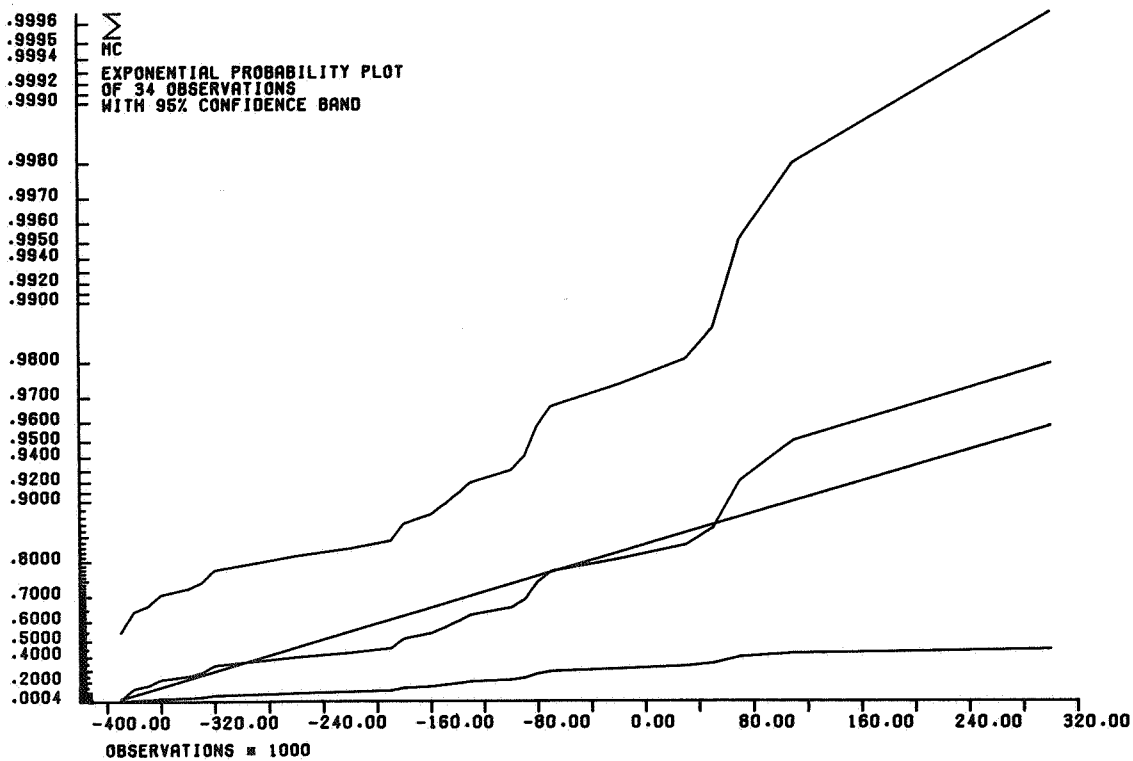
IJsselmeermaxima over november bij Markermeervariant (tape 2)



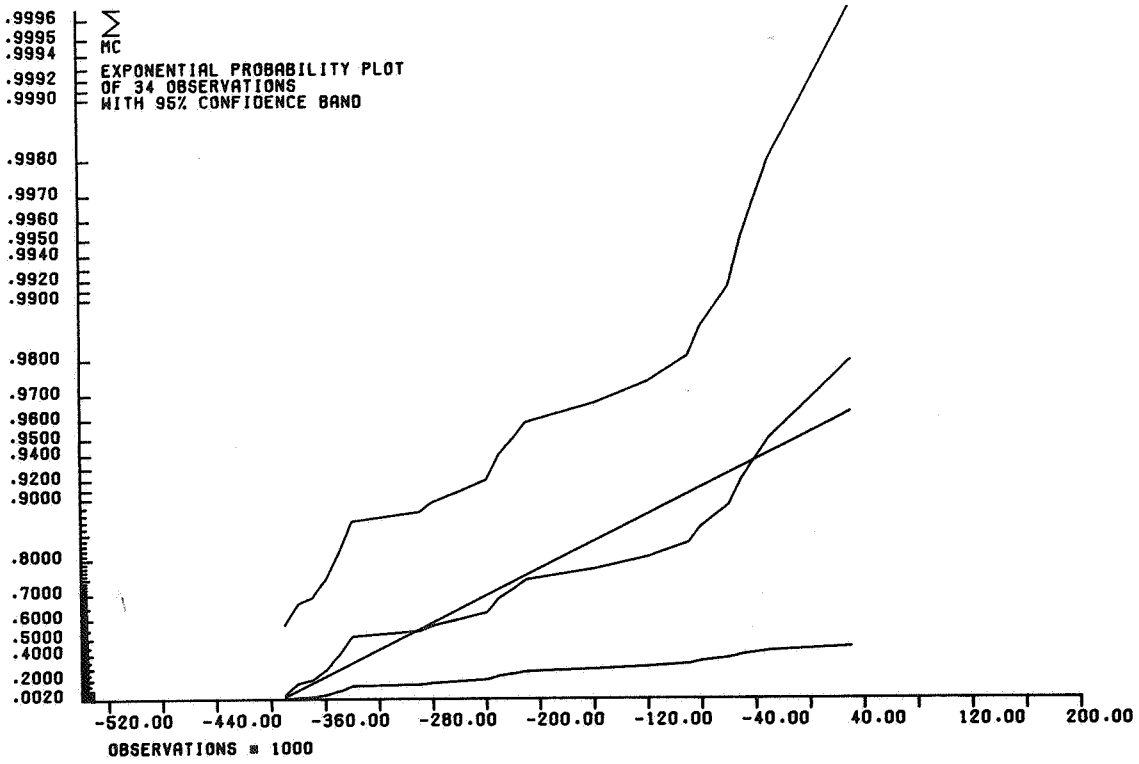
IJsselmeermaxima over december bij Markermeervariant (tape 2)



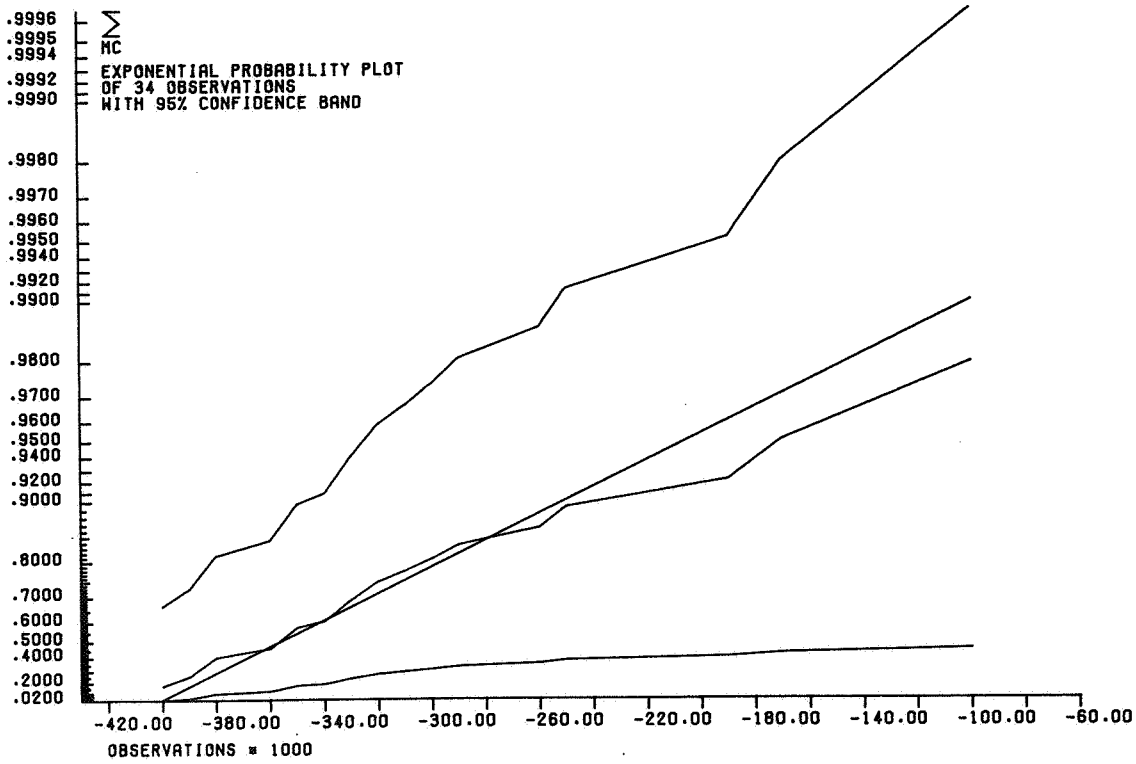
IJsselmeermaxima over januari bij Markermeervariant (tape 2)



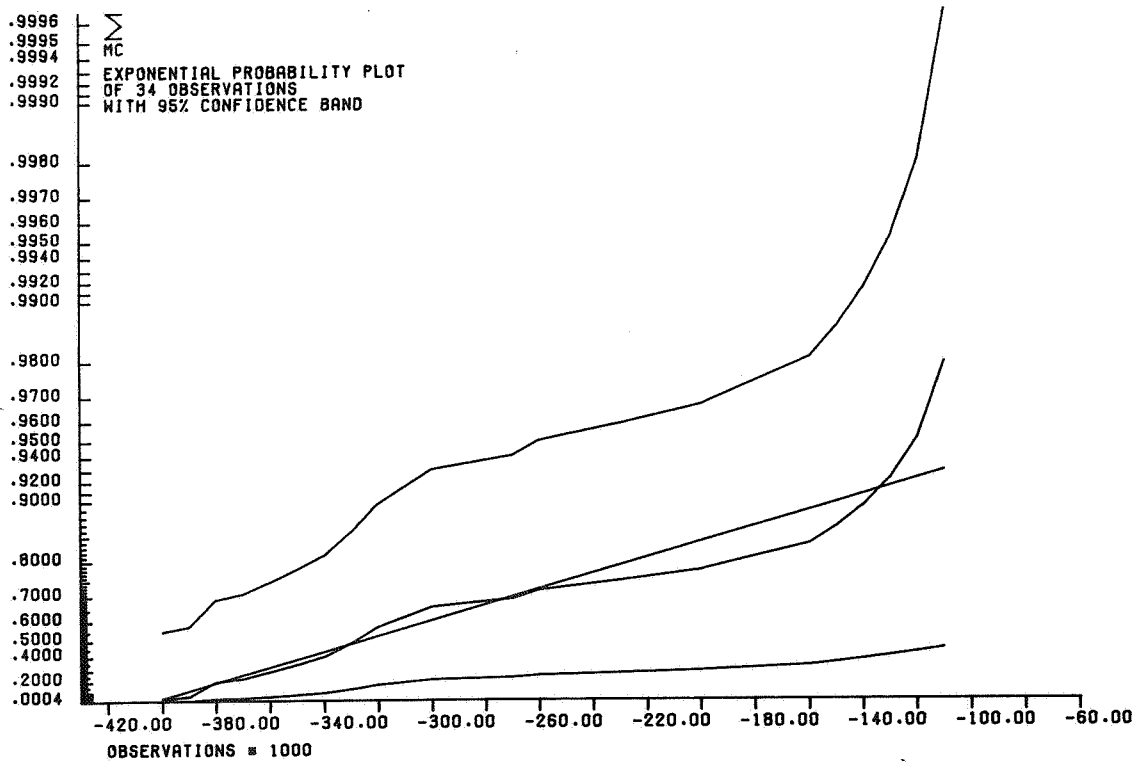
IJsselmeermaxima over februari bij Markermeervariant (tape 2)



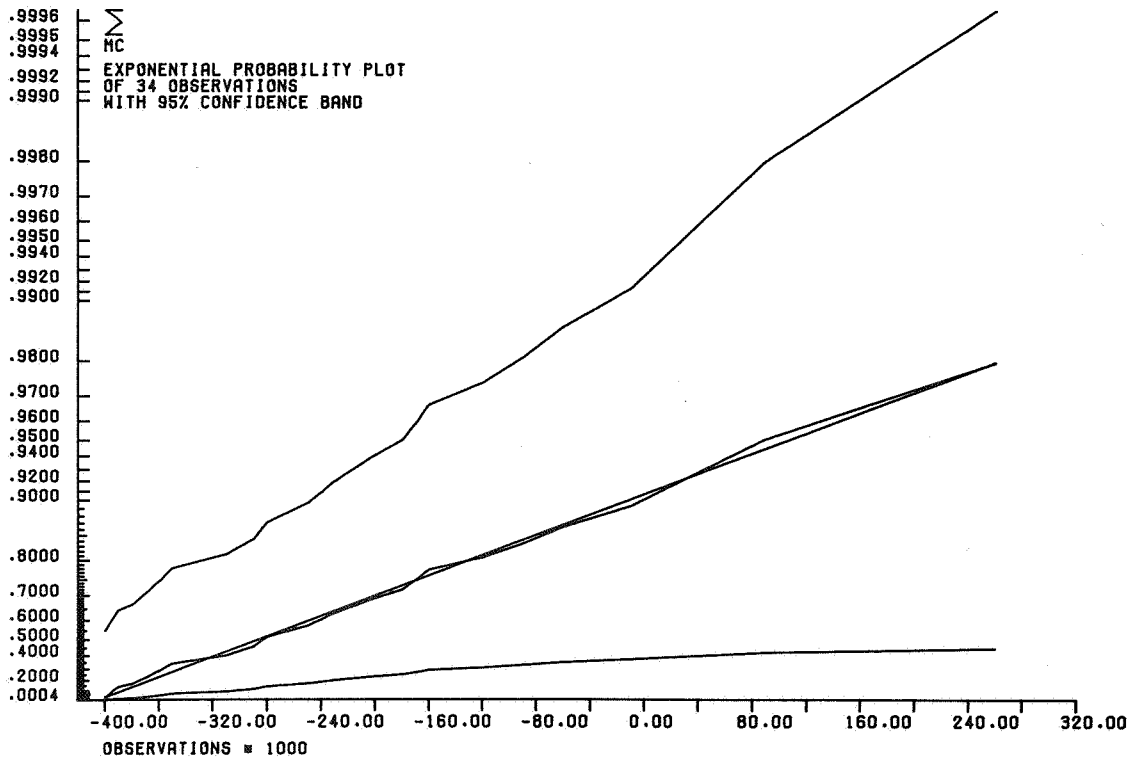
IJsselmeermaxima over maart bij Markermeervariant (tape 2)



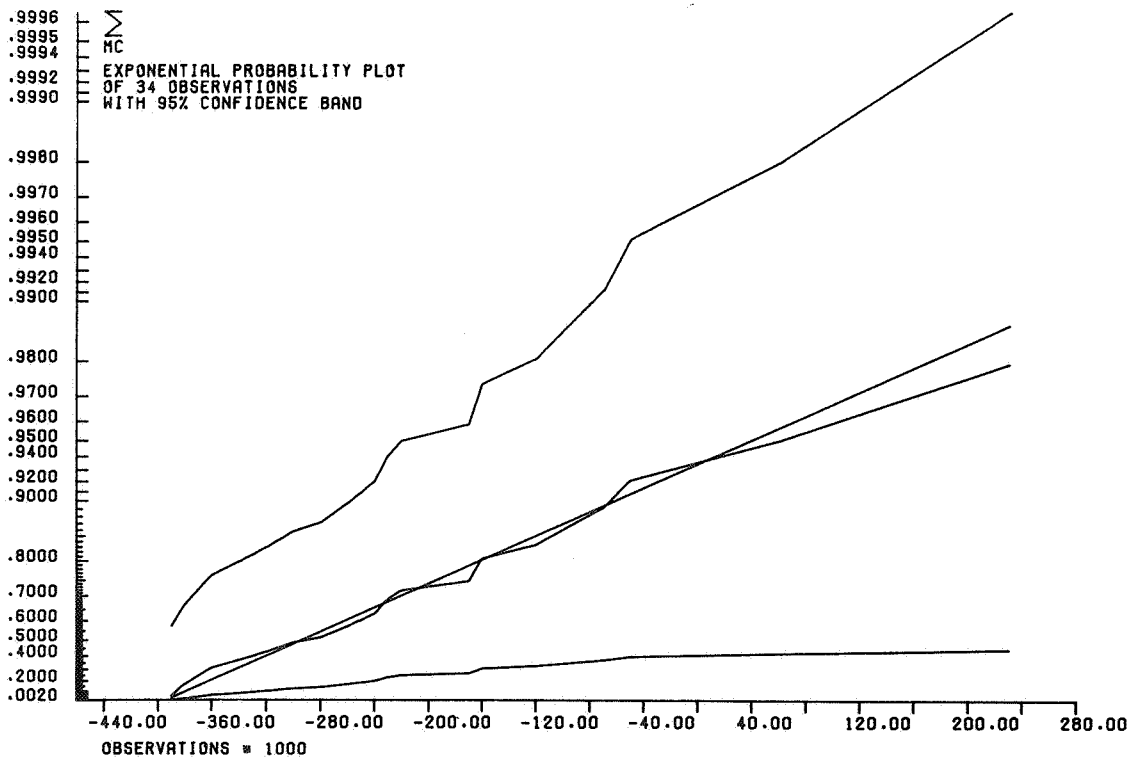
Markermeermaxima over oktober bij Markermeervariant (tape 2)



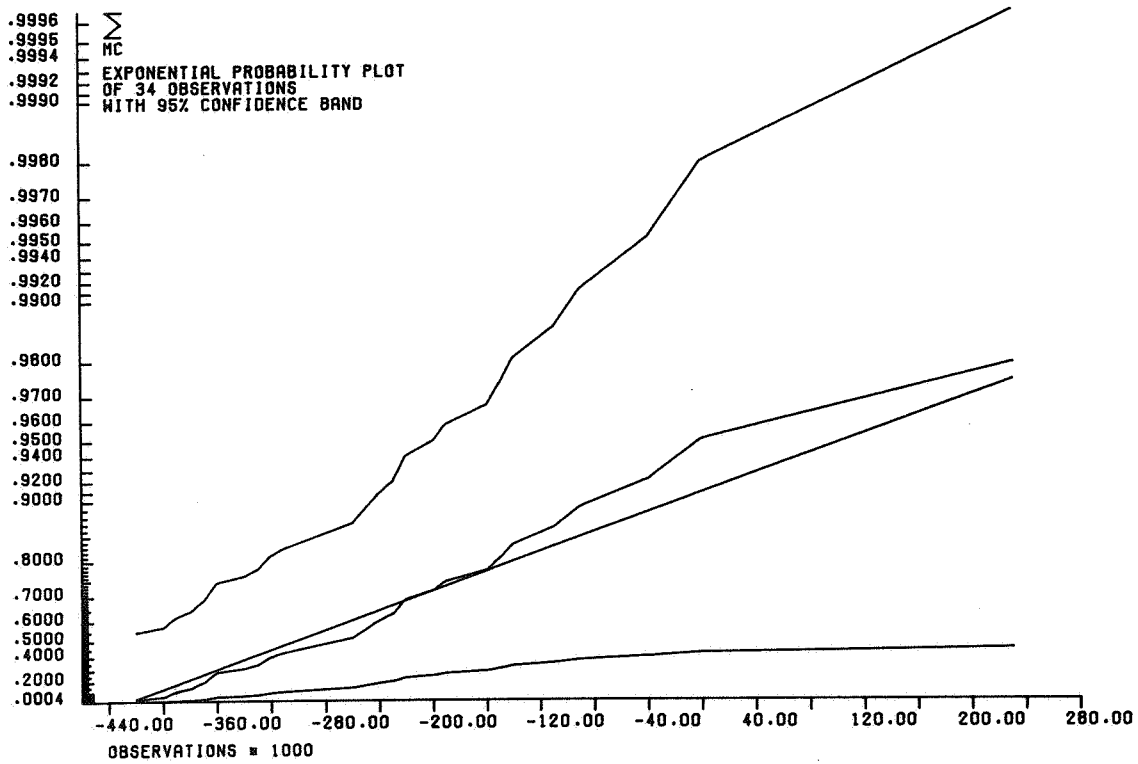
Markermeermaxima over november bij Markermeervariant (tape 2)



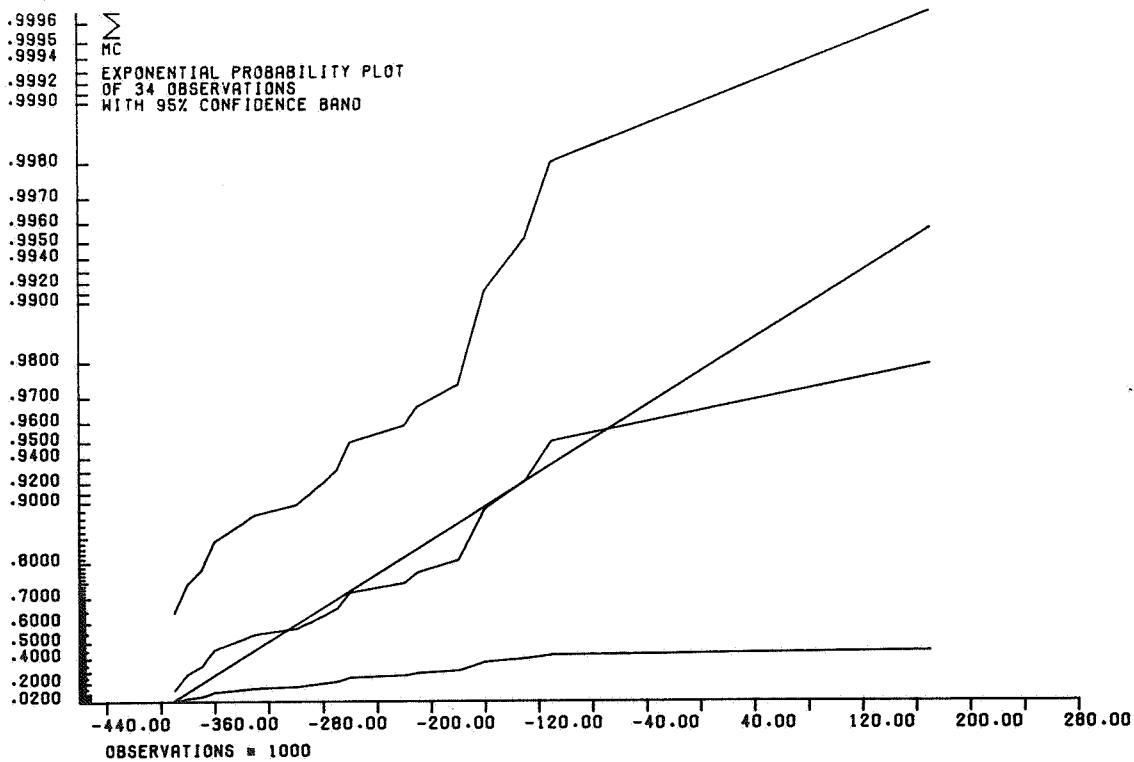
Markermeermaxima over december bij Markermeervariant (tape 2)



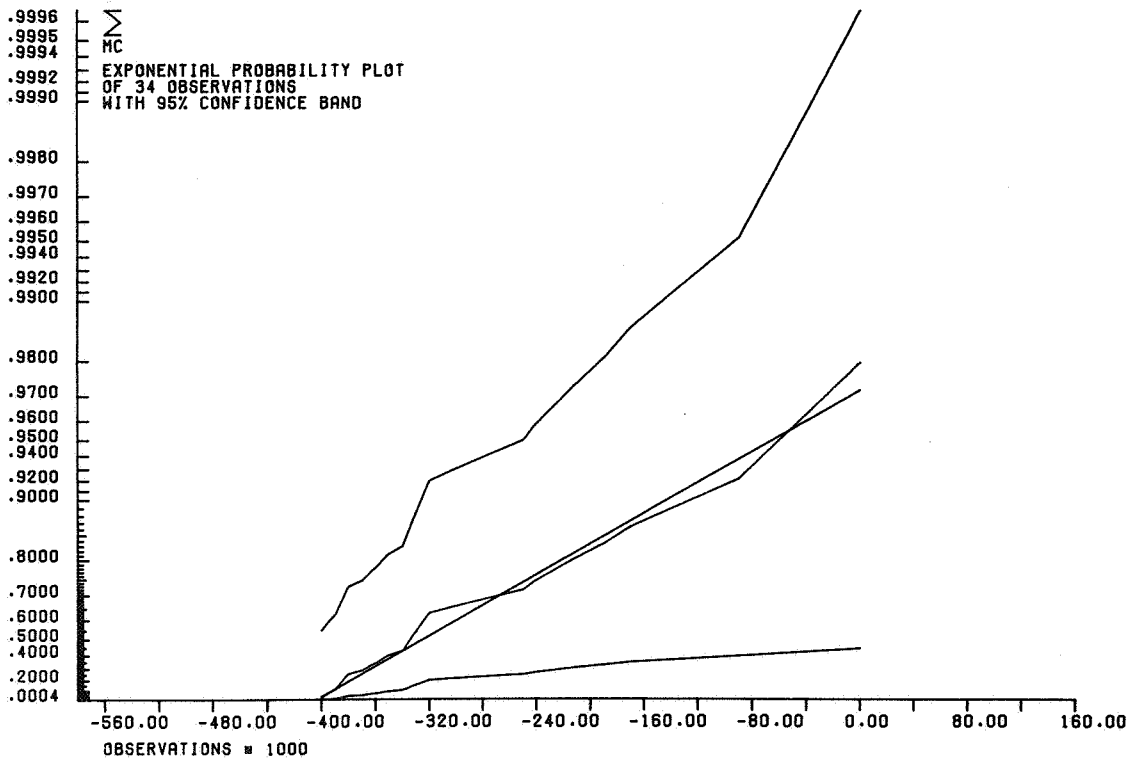
Markermeermaxima over januari bij Markermeervariant (tape 2)



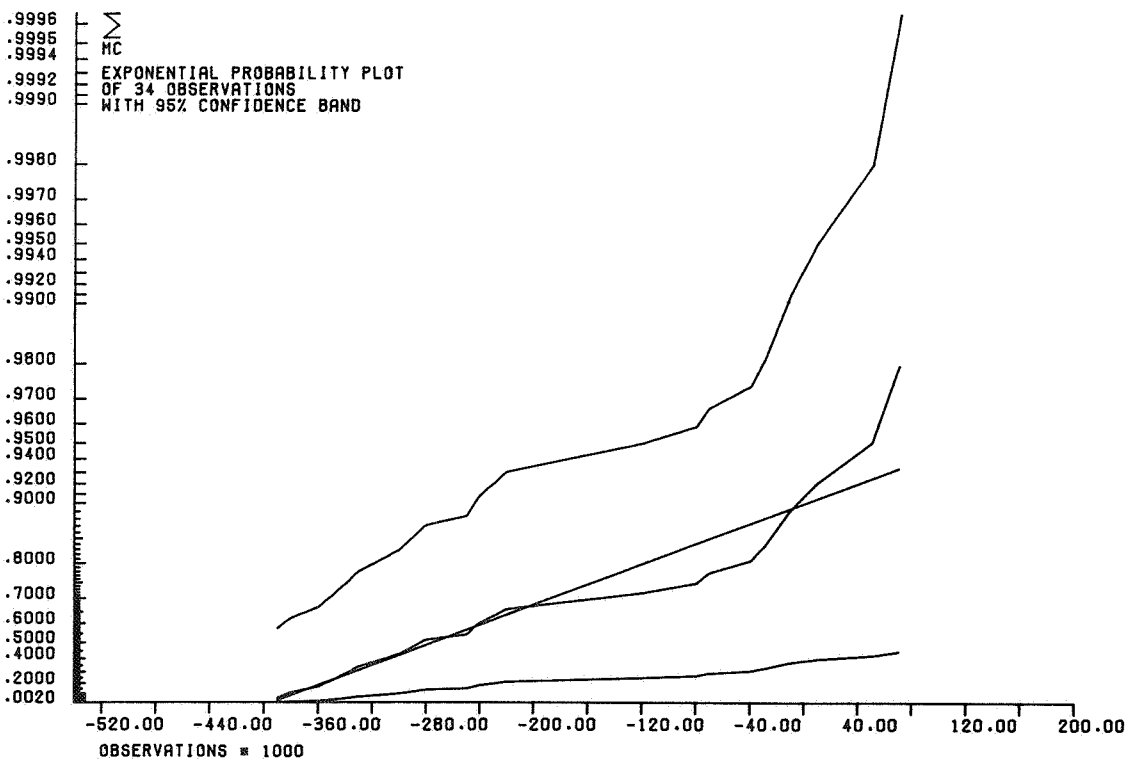
Markermeermaxima over februari bij Markermeervariant (tape 2)



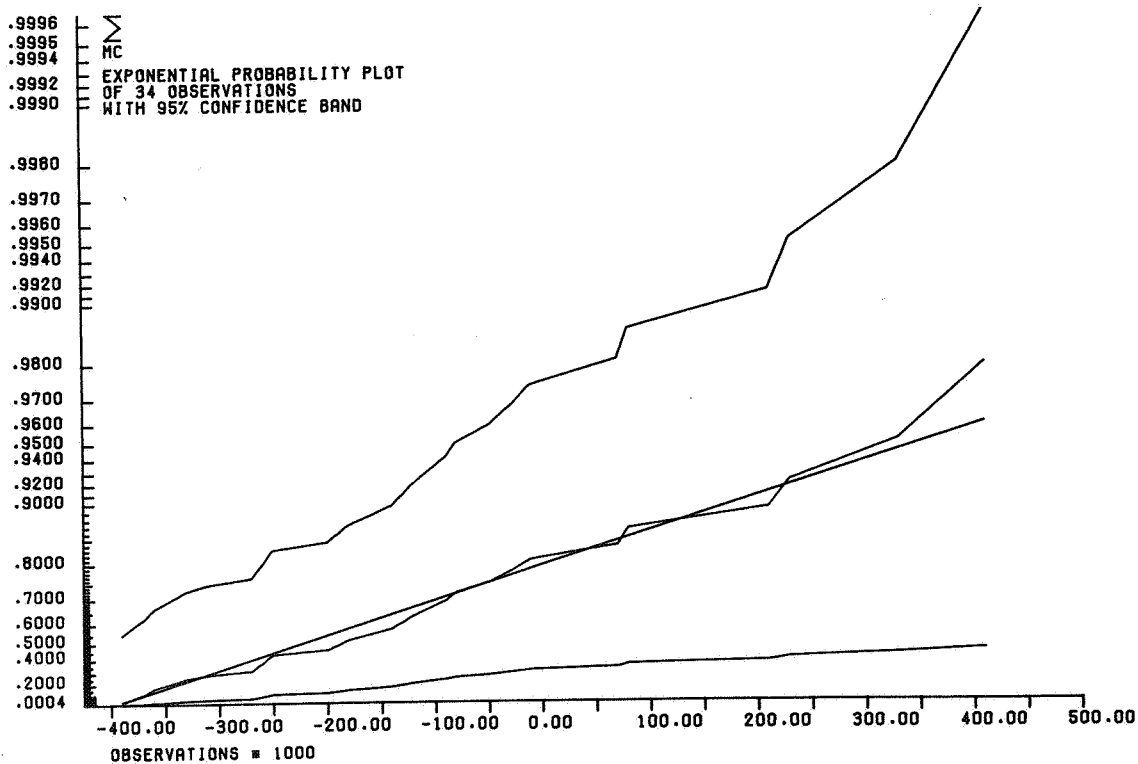
Markermeermaxima over maart bij Markermeervariant (tape 2)



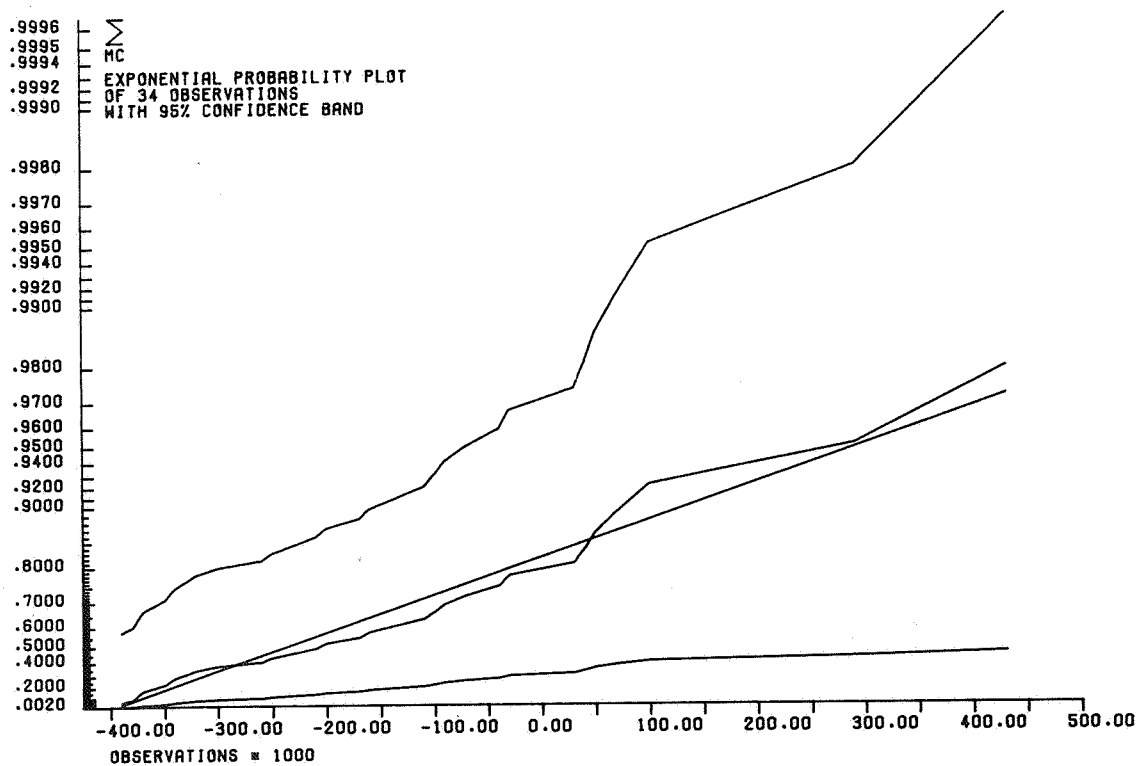
IJsselmeermaxima over oktober bij Markerwaardvariant (tape 2)



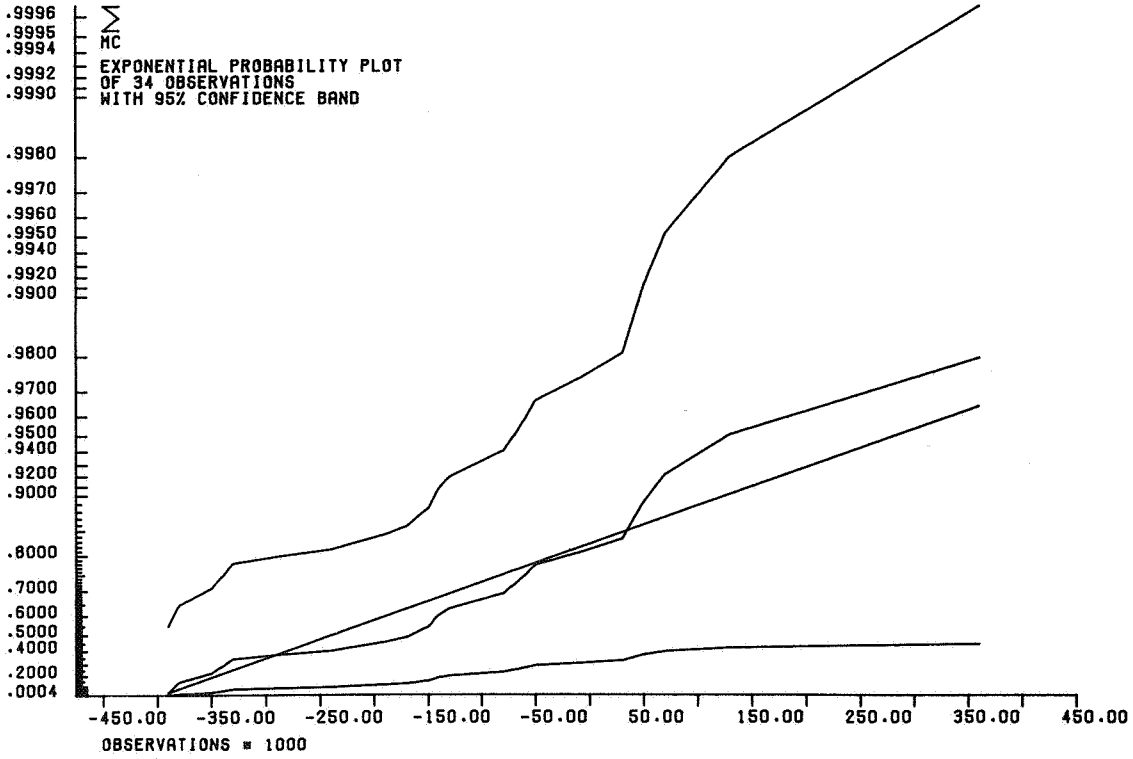
IJsselmeermaxima over november bij Markerwaardvariant (tape 2)



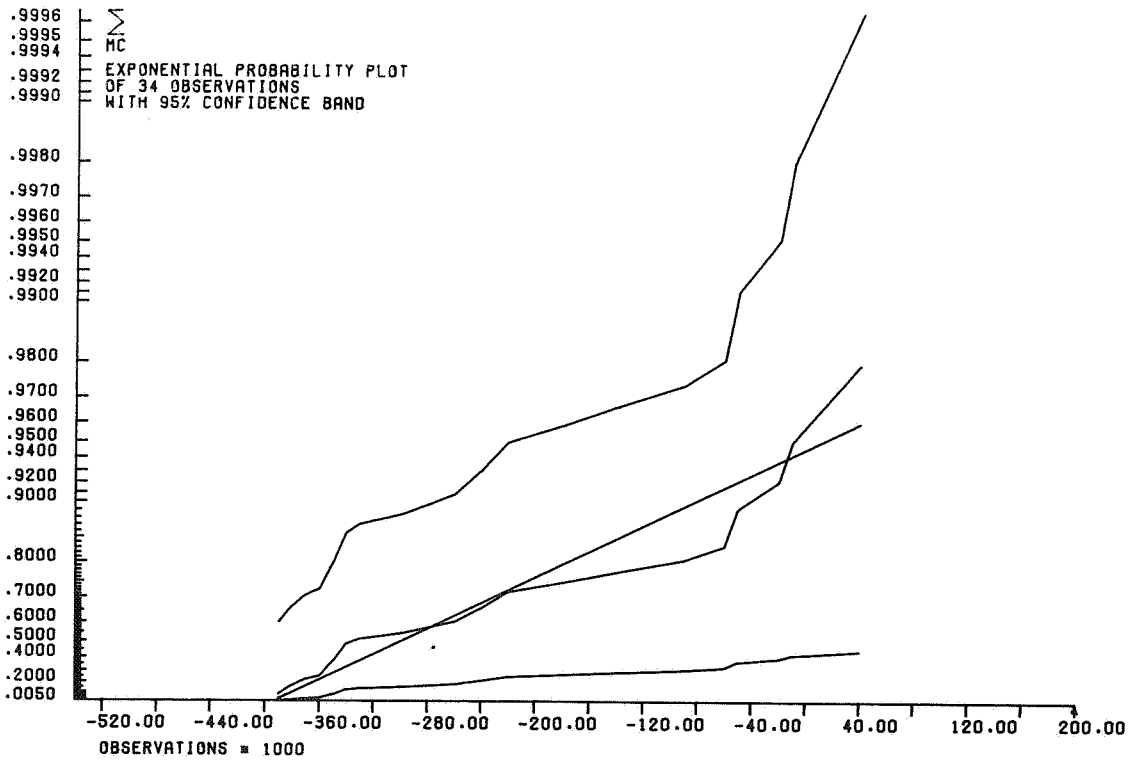
IJsselmeermaxima over december bij Markerwaardvariant (tape 2)



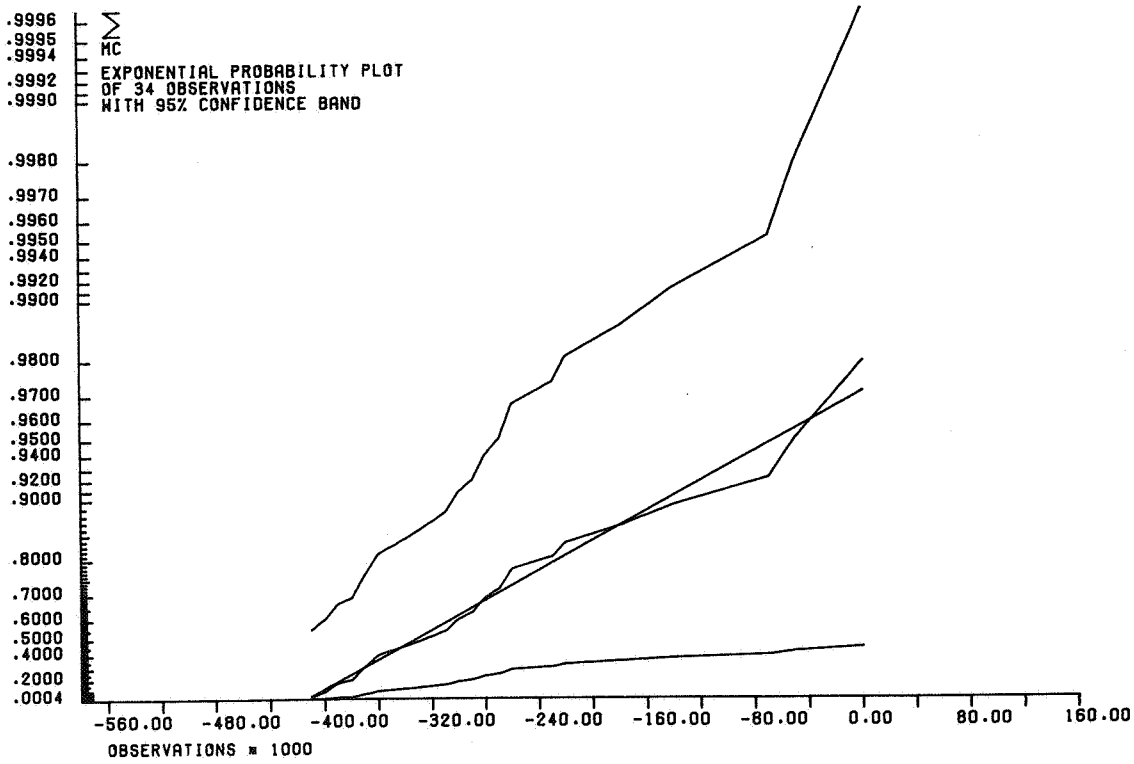
IJsselmeermaxima over januari bij Markerwaardvariant (tape 2)



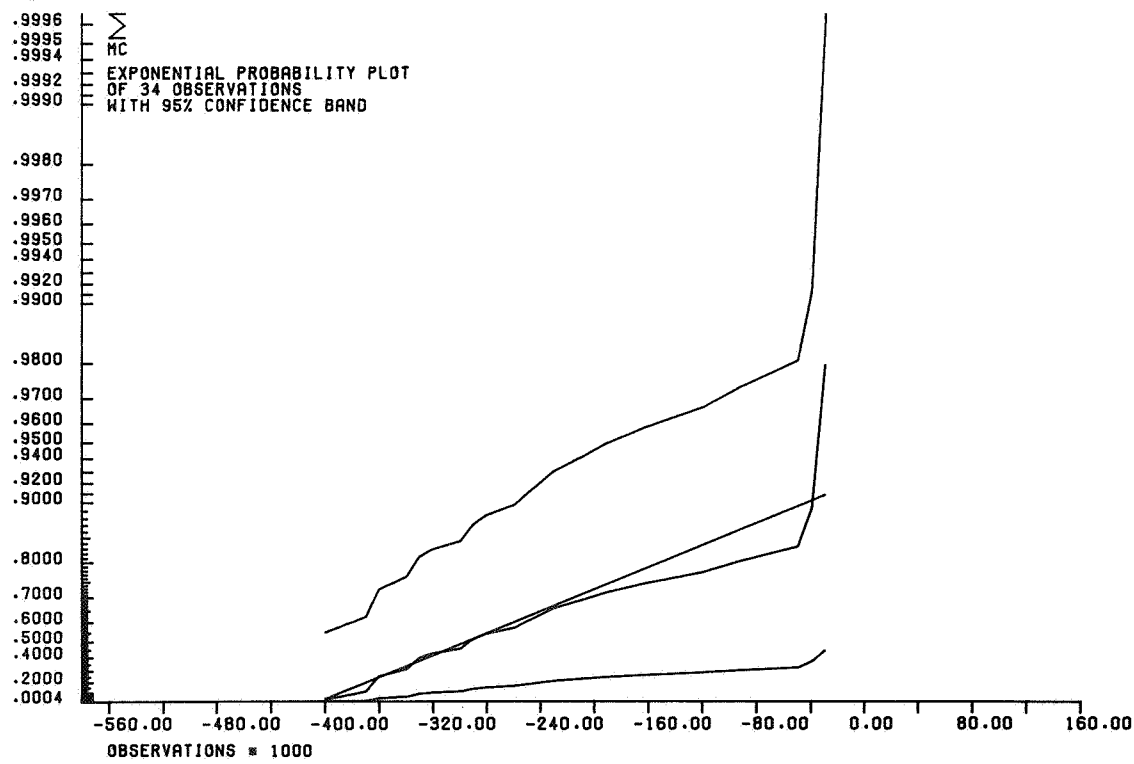
IJsselmeermaxima over februari bij Markerwaardvariant (tape 2)



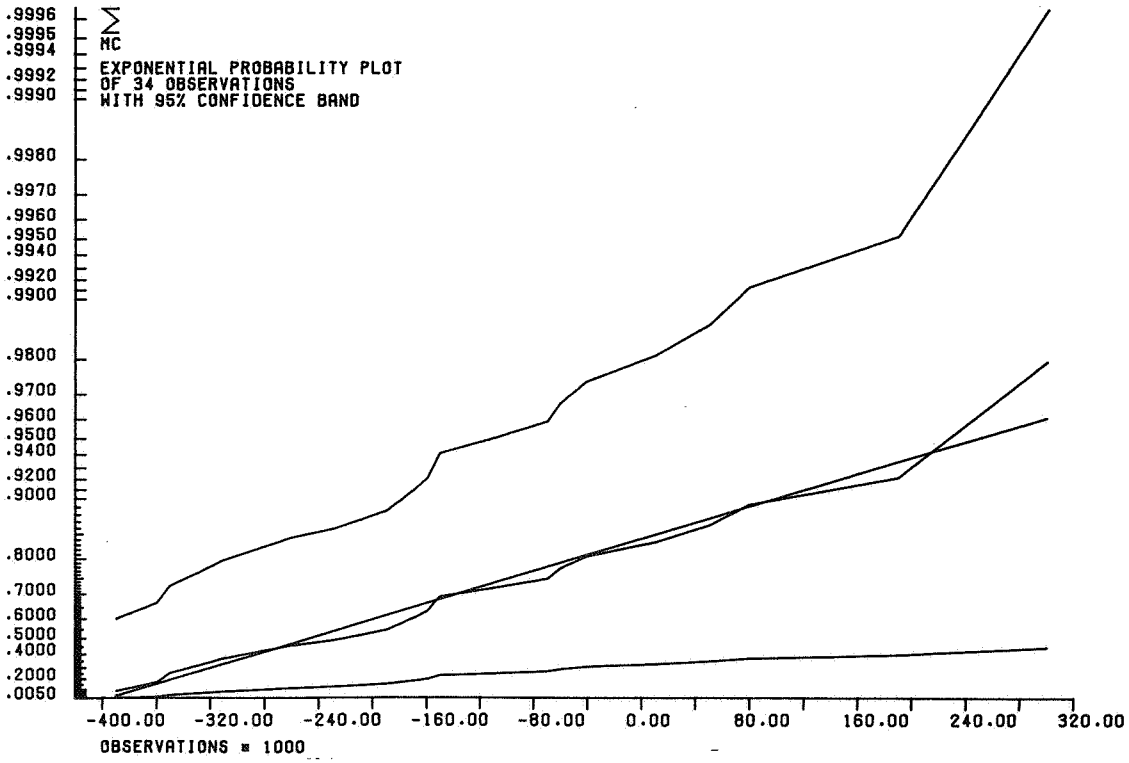
IJsselmeermaxima over maart bij Markerwaardvariant (tape 2)



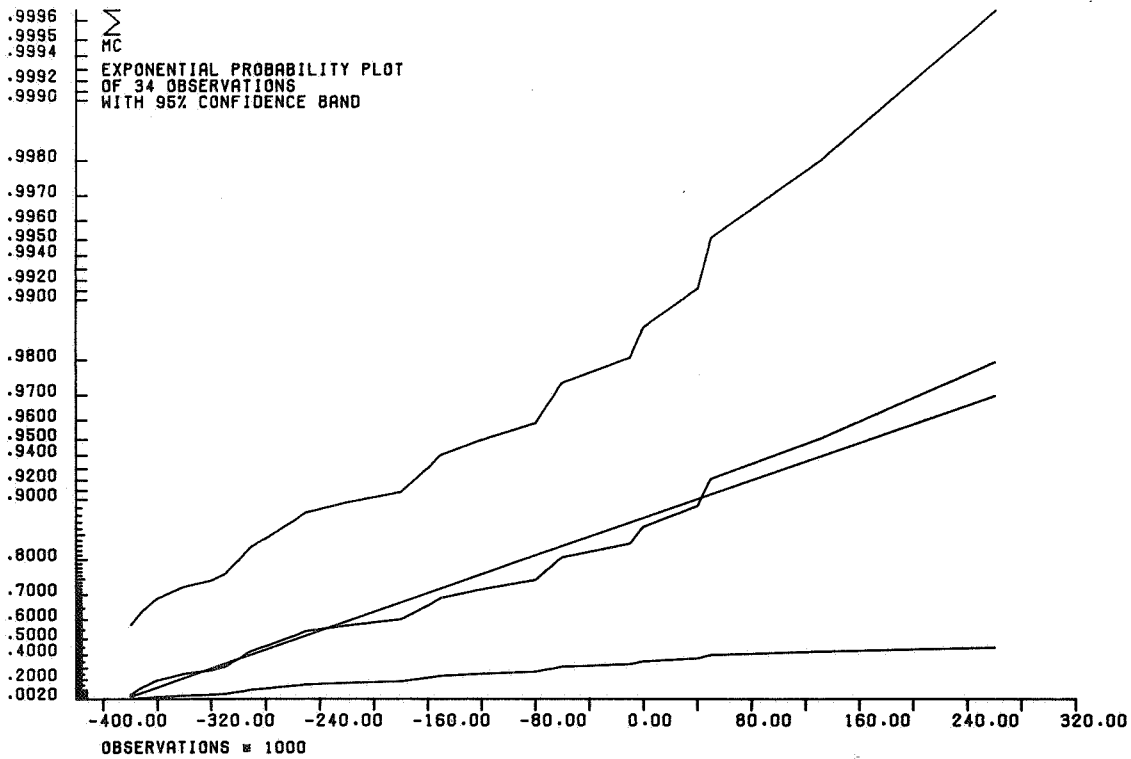
Markermeermaxima over oktober bij Markerwaardvariant (tape 2)



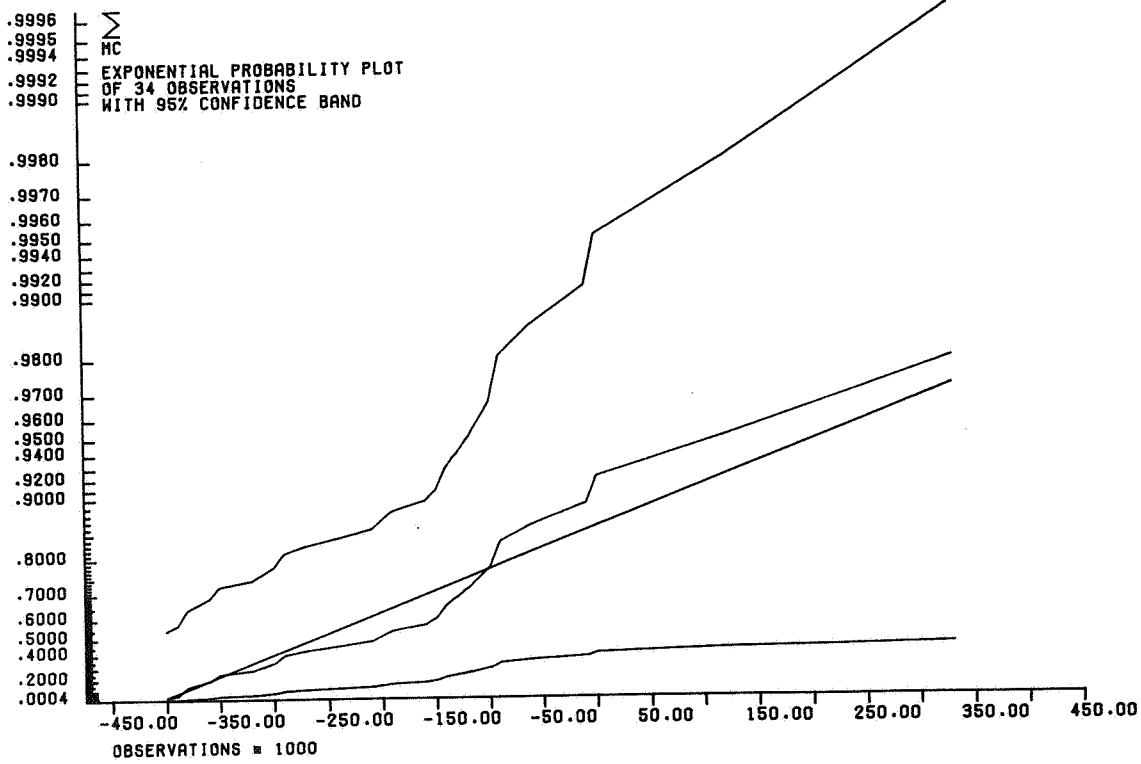
Markermeermaxima over november Markerwaardvariant (tape 2)



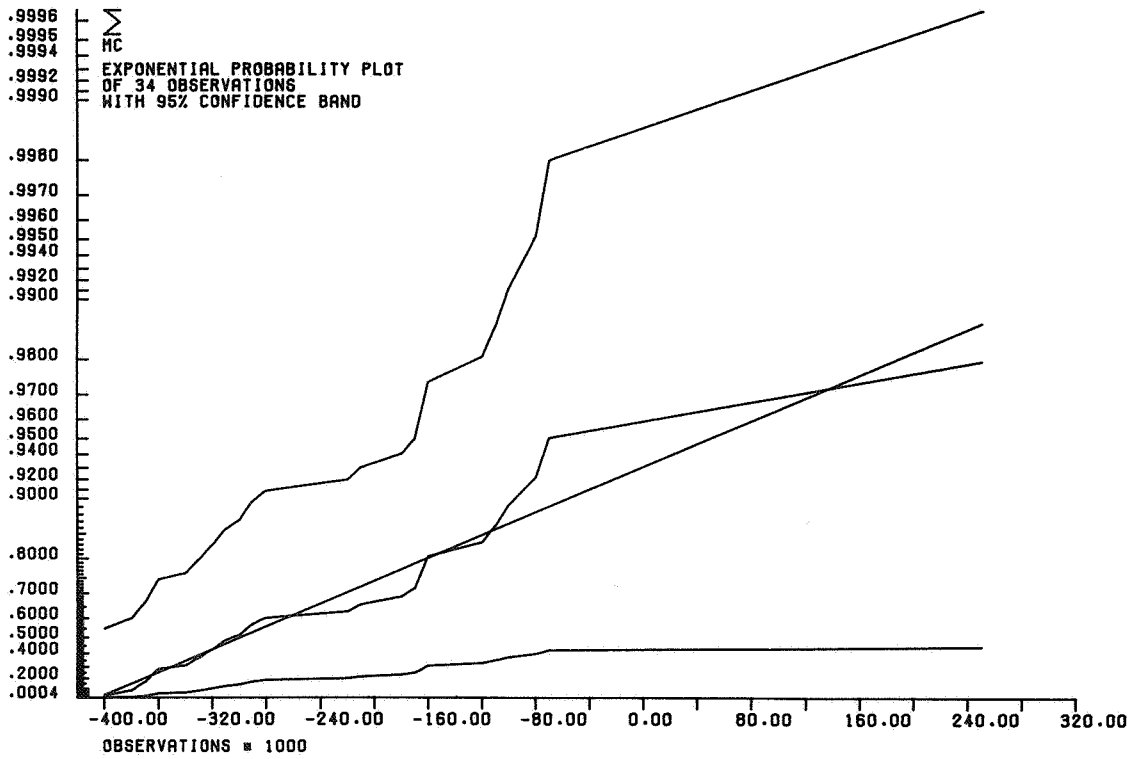
Markermeermaxima over december bij Markerwaardvariant (tape 2)



Markermeermaxima over januari bij Markerwaardvariant (tape 2)



Markermeermaxima over februari bij Markerwaardvariant (tape 2)



Markermeermaxima over maart bij Markerwaardvariant (tape 2)

APPENDIX III - OVERIGE TOETSINGSRESULTATEN EN SCHATTINGEN.

Appendix III.1. TOETSEN OP EXPONENTIALITEIT.

	KS	AD	CTTT	aantal waarnemingen
A.				
H_0	1.788	3.693	4.101	33
H'_0	0.922	0.631	0.143	24
B.				
H_0	1.325	2.011	2.744	33
H'_0	0.430	0.611	0.515	11
C.				
H_0	2.007	3.781	4.165	33
H'_0	0.567	1.315	0.871	24
D.				
H_0	1.615	2.758	3.450	33
H'_0	0.395	0.354	0.155	24
kritieke waarden $\alpha=0.05$	1.094	1.341	± 1.960	

- A. - IJsselmeer bij de Markermeervariant.
- B. - Markermeer bij de Markermeervariant
- C. - IJsselmeer bij de Markerwaardvariant
- D. - Markermeer bij de Markerwaardvariant

Appendix III.2. TOETSEN M.B.T. HET GEV MODEL.

	W^2	U^2	A^2	Aantal waarnemingen
A. H_0	0.074	0.071	0.534	34
B. H_0	0.079	0.078	0.509	34
C. H_0	0.083	0.078	0.601	34
D. H_0	0.109	0.104	0.661	34
kritieke waarden $\alpha=0.05$	0.124	0.117	0.757	

- A. - IJsselmeer bij de Markermeervariant
- B. - Markermeer bij de Markermeervariant
- C. - IJsselmeer bij de Markerwaardvariant
- D. - Markermeer bij de Markerwaardvariant

Appendix III.3. TOETSEN OP NORMALITEIT.

	KS	AD	Aantal waarnemingen
A. H_0	0.615	0.498	34
B. H_0	0.999	0.686	34
C. H_0	0.625	0.501	34
D. H_0	0.615	0.510	34
kritieke waarden $\alpha=0.05$	0.895	0.787	

- A. - IJsselmeer bij de Markermeervariant
- B. - Markermeer bij de Markermeervariant
- C. - IJsselmeer bij de Markerwaardvariant
- D. - Markermeer bij de Markerwaardvariant

	kurtosis	skewness
A.	-0.188	0.398
B.	0.174	0.700
C.	-0.303	0.327
D.	-0.065	0.458

Appendix III.4. OVERIGE SCHATTINGEN.

		okt.	nov.	dec.	jan.	feb.	maart
A.	X_{\min}	-0.40	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39
	$1/\hat{\lambda} = \bar{X} - X_{\min}$	0.11	0.17	0.25	0.22	0.21	0.13
	$\hat{\mu}$	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	-0.39
B.	X_{\min}	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	-0.39
	$1/\hat{\lambda} = \bar{X} - X_{\min}$	0.07	0.12	0.18	0.16	0.16	0.11
	$\hat{\mu}$	-0.40	-0.40	-0.41	-0.40	-0.40	-0.39
C.	X_{\min}	-0.40	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39
	$1/\hat{\lambda} = \bar{X} - X_{\min}$	0.11	0.18	0.26	0.23	0.22	0.14
	$\hat{\mu}$	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	-0.39
D.	X_{\min}	-0.41	-0.42	-0.40	-0.40	-0.40	-0.39
	$1/\hat{\lambda} = \bar{X} - X_{\min}$	0.12	0.19	0.24	0.21	0.21	0.15
	$\hat{\mu}$	-0.41	-0.43	-0.41	-0.41	-0.41	-0.39

- A. - IJsselmeer bij de Markermeervariant
 B. - Markermeer bij de Markermeervariant
 C. - IJsselmeer bij de Markerwaardvariant
 D. - Markermeer bij de Markerwaardvariant

APPENDIX IV - WISKUNDIGE ACHTERGROND.

Appendix IV.1. DE TOETSEN VAN STEPHENS.

We geven een korte beschrijving van de ideeën achter de toetsen die besproken worden in STEPHENS (1974, 1976, 1977). We hebben een aantal van deze toetsen in dit rapport gebruikt om te toetsen of de elementen van een steekproef X_1, \dots, X_n exponentieel, normaal of Gumbel verdeeld waren met onbekende parameters tegen algemene alternatieven.

De benadering van Stephens voor dit soort problemen is de volgende. Er zijn een aantal klassieke toetsen voor de uniforme verdeling op het interval $[0,1]$, zoals de Kolmogorov-Smirnov toets en de Anderson-Darling toets. Aan de andere kant kan elke steekproef X_1, \dots, X_n uit een continue verdeling F , als deze verdeling bekend is, getransformeerd worden naar een steekproef $F(X_1), \dots, F(X_n)$ uit een uniforme verdeling op $[0,1]$. Als we $H_0: F=F_0$ willen toetsen voor een gegeven vaste F_0 dan kunnen we deze twee gegevens combineren door de klassieke toetsingsgrootheden uit te rekenen voor de getransformeerde steekproef $F_0(X_1), \dots, F_0(X_n)$. Vaak willen we echter toetsen of F tot een bepaalde familie van verdelingen behoort, b.v. de $\text{Exp}(0,\lambda)$ verdelingen waarbij λ onbekend is. Stephens heeft nu voorgesteld om in zulke gevallen als volgt te handelen.

Stel we toetsen $H_0: F \in \{F_\theta: \theta \in \Theta\}$. Schat nu eerst dmv. maximum likelihood onder H_0 de parameter θ , zeg met $\hat{\theta}$, en bereken vervolgens de steekproef $F_{\hat{\theta}}(X_1), \dots, F_{\hat{\theta}}(X_n)$. Pas nu een van de klassieke toetsen op uniformiteit op $[0,1]$ toe. Dit idee is door Stephens uitgewerkt voor de families van de exponentiele, de normale en de Gumbel verdelingen. Omdat de nulhypothese verdeling van de aldus verkregen toetsingsgrootheden door het invullen van de schattingen anders is dan die van de klassieke toetsen kunnen we niet zomaar de oude kritieke waarden gebruiken. Aangepaste kritieke waarden en modificaties voor kleine steekproeven zijn te vinden in de drie genoemde artikelen.

Appendix IV.2. DE CUMULATIVE TOTAL TIME ON TEST STATISTIC.

Zij X_1, \dots, X_n onderling onafhankelijk en gelijk verdeeld met verdelingsfunctie F . We willen toetsen of F exponentieel verdeeld is met drempelwaarde 0 en onbekende schaalparameter $\lambda > 0$, dwz. $\text{Exp}(0,\lambda)$. Definieer de "hazard rate" van F als volgt

$$r(t) \stackrel{\text{def}}{=} P(X \in [t, t+dt] | T \geq t) = f(t)/(1-F(t)), \quad t \geq 0 \quad (\text{IV.1})$$

Merk op dat r constant is voor de $\text{Exp}(0,\lambda)$ verdeling, immers

$$r(t) = \lambda e^{-\lambda t} / (e^{-\lambda t}) = \lambda \quad (\text{IV.2})$$

De Cumulative Total Time on Test statistic (CTTT) (zie BARLOW et al. (1972)) toetst exponentialiteit, dwz. constante hazard, tegen alternative verdelingen met stijgende of dalende hazard rate. De toets is gebaseerd op een eigenschap van de genormaliseerde spacings van de exponentiele verdeling

$$D_{i:n} = (n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}) \quad (\text{IV.3})$$

waarbij $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ de geordende steekproef is ($X_{(0)}=0$). Onder de nulhypothese van exponentialiteit, $F=1-e^{-\lambda x}$, zijn $D_{1:n}, \dots, D_{n:n}$ onafhankelijk en $\text{Exp}(0,\lambda)$ verdeeld. Onder alternatieven met dalende of stijgende hazard rate geldt echter respectievelijk

$$\begin{aligned} D_{1:n} \stackrel{st}{\leq} D_{2:n} \leq \dots \leq D_{n:n} \\ D_{1:n} \stackrel{st}{\geq} D_{2:n} \geq \dots \geq D_{n:n} \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

waarbij $X \stackrel{st}{\geq} Y$ betekent $F_X(x) \leq F_Y(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dit is de eigenschap die de basis is voor de

afleiding van de CTTT statistic V_n

$$V_n \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (i-1) D_{n-i+1:n} \right] / \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{i:n} \right] = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{j=1}^i D_{j:n} \right] \right] / \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{i:n} \right]. \quad (\text{IV.5})$$

De stochast

$$T_n(X_{(i)}) = \sum_{j=1}^i D_{j:n} \quad (\text{IV.6})$$

wordt ook wel de Total Time on Test genoemd. De alternatieven waarop de CTTT statistic gericht is kunnen we als volgt beschouwen. Als we de cumulatieve hazard als volgt definiëren

$$\Lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \lambda(s) ds \quad (\text{IV.7})$$

dan kan worden aangetoond dat

$$\Lambda(t) = -\ln(1-F(t)). \quad (\text{IV.8})$$

Aangezien een exponentiele probability plot niets anders is dan een grafiek van $-\ln(1-F(x))$ tegen x zijn de verdelingen met stijgende of dalende hazard rates juist die verdelingen die uitgezet in een exponentiele probability plot convex resp. concaaf zijn, en dus verdelingen die lagere resp. hogere waarden als geschatte quantielen zouden opleveren dan onder het exponentiele model. Omdat de exponentiele verdeling geheugenloos is, dwz. dat we voorwaardelijk dat we voorbij een vaste waarde kijken weer een exponentiele verdeling hebben, kunnen we de CTTT toets ook gebruiken om exponentiele staarten te toetsen tegen staarten met stijgende of dalende hazard rates door alleen te kijken naar elementen van de steekproef die groter zijn dan een vaste waarde.

Appendix IV.3. DE MODIFIED LIKELIHOOD RATIO TOETS IN HET GEV MODEL.

In HOSKING (1984) worden dmv. een simulatiestudie veertien toetsingsgrootheden voor de nulhypothese $\theta=0$ (Gumbel) in het GEV model vergeleken. Van deze toetsingsgrootheden bleek de modified likelihood ratio de beste eigenschappen te hebben, ook voor kleine steekproeven.

Zij $L(X, \eta)$ de loglikelihood functie onder het GEV model, $\eta=(x_0, \sigma, \theta)$. De schatters $\hat{\eta}$ en $\tilde{\eta}$ zijn de maximum likelihood schatters onder het volledige GEV model en het beperkte GEV model met $\theta=0$ (Gumbel model). Dwz. $L(X, \eta)$ wordt gemaximaliseerd over alle mogelijke waarden van $\eta=(x_0, \sigma, \theta)$ door $\hat{\eta}=(\hat{x}_0, \hat{\sigma}, \hat{\theta})$ en over alle waarden van $\eta=(x_0, \sigma, 0)$ door $\tilde{\eta}=(\tilde{x}_0, \tilde{\sigma}, 0)$. De modified likelihood ratio statistic is dan gelijk aan

$$T_{LR}^* = T_{LR}(1-2.8/n) \quad (\text{IV.9})$$

waarbij T_{LR} de bekende likelihood ratio statistic is

$$T_{LR} = 2(L(X, \hat{\eta}) - L(X, \tilde{\eta})). \quad (\text{IV.10})$$

Van T_{LR} is het bekend dat hij onder de nulhypothese asymptotisch χ_1^2 verdeeld is. Het doel van het aanbrengen van een modificatie als de bovenstaande is om de verdeling onder de nulhypothese ook voor kleine steekproeven beter te laten lijken op een χ_1^2 verdeling.

Appendix IV.4. BETROUWBAARHEIDSINTERVALLEN.

In de volgende paragrafen leiden we 95% asymptotische betrouwbaarheidsintervallen af voor de parameters en quantielen van de door ons beschouwde modellen. We veronderstellen steeds dat er aan de modelaanname voldaan is en dat het aantal waarnemingen n groot genoeg is om de

benaderingen te rechtvaardigen.

4.1. Het samengestelde exponentiele model.

De onder dit model gehanteerde schatter voor x_α was

$$\hat{x}_\alpha = d + \frac{1}{\hat{\lambda}} (\ln(1-\hat{p}) - \ln(1-\alpha)). \quad (\text{IV.11})$$

Zijn $\eta = \frac{1}{\lambda}$ en $\hat{\eta} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \bar{X}_{>d} - d$ en

$$T(p, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} d + \eta (\ln(1-p) - \ln(1-\alpha)) \quad (\text{IV.12})$$

dan geldt wegens

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{-\eta}{1-p}$$

en

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = \ln(1-p) - \ln(1-\alpha)$$

het volgende (Taylor benadering)

$$n^{1/2} (T(\hat{p}, \hat{\eta}) - T(p, \eta)) \approx n^{1/2} \left(\frac{-\eta}{1-p} (\hat{p} - p) + (\ln(1-p) - \ln(1-\alpha)) (\hat{\eta} - \eta) \right) \quad (\text{IV.13})$$

Uit de centrale limietstelling volgt

$$n^{1/2} (\hat{p} - p) \rightarrow N(0, p(1-p)) \quad (\text{IV.14})$$

en

$$R^{1/2} (\hat{\eta} - \eta) \rightarrow N(0, 1/\lambda^2), \quad (\text{IV.15})$$

waarbij R het (stochastische) aantal waarnemingen groter of gelijk aan d is. Omdat $\hat{\eta}$ en \hat{p} asymptotisch onafhankelijk zijn en $\frac{R}{n} \rightarrow 1-p$, bijna zeker, volgt hieruit

$$n^{1/2} (\hat{x}_\alpha - x_\alpha) \rightarrow N\left(0, \frac{1}{\lambda^2(1-p)} ((\ln(1-p) - \ln(1-\alpha))^2 + p)\right). \quad (\text{IV.16})$$

Dit levert het volgende 95% asymptotische betrouwbaarheidsinterval voor x_α

$$x_\alpha^L = \hat{x}_\alpha - 1.96n^{-1/2} V < x_\alpha < \hat{x}_\alpha + 1.96n^{-1/2} V = x_\alpha^R \quad (\text{IV.17})$$

waarbij

$$V^2 = \frac{1}{\hat{\lambda}^2(1-\hat{p})} ((\ln(1-\hat{p}) - \ln(1-\alpha))^2 + \hat{p}) \quad (\text{IV.18})$$

de geschatte asymptotische variatie van $n^{1/2}(\hat{x}_\alpha - x_\alpha)$ is. We gebruiken de volgende intervallen voor de parameters p en λ :

$$\hat{p} - 1.96n^{-1/2} (\hat{p}(1-\hat{p}))^{1/2} < p < \hat{p} + 1.96n^{-1/2} (\hat{p}(1-\hat{p}))^{1/2} \quad (\text{IV.19})$$

en voor λ

$$\hat{\lambda}(1 + 1.96R^{-1/2})^{-1} < \lambda < \hat{\lambda}(1 - 1.96R^{-1/2})^{-1} \quad (\text{IV.20})$$

Deze intervallen volgen uit (IV.14) en (IV.15).

4.2. Het Normale model.

Bij dit model hanteerden we als schatter voor x_α

$$\hat{x}_\alpha = \bar{x} + s\Phi^{-1}(\alpha). \quad (\text{IV.21})$$

Onder de aanname dat de waarnemingen onafhankelijk zijn en allen $N(\mu, \sigma^2)$ verdeeld zijn, zijn \bar{x} en s onafhankelijk, bovendien geldt

$$\bar{x} \stackrel{d}{=} N(\mu, \sigma^2/n) \quad (\text{IV.22})$$

en

$$s^2 \stackrel{d}{=} \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1}^2. \quad (\text{IV.23})$$

Asymptotisch geldt wegens de centrale limiet stelling

$$n^{1/2}(s^2 - \sigma^2) \stackrel{d}{=} n^{1/2}\sigma^2\left(\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} N_j^2 - 1\right) \rightarrow N(0, 2\sigma^4), \quad (\text{IV.24})$$

hierbij is N_1, N_2, \dots een rij onafhankelijke standaard normale stochasten (merk op $EN_j^2 = 1$, $EN_j^4 = 3 \Rightarrow \text{var}N_j^2 = 2$). Aangezien (Taylor benadering)

$$n^{1/2}(s - \sigma) = n^{1/2}(\sqrt{s^2} - \sqrt{\sigma^2}) \approx \frac{1}{2}n^{1/2}\sigma^{-1}(s^2 - \sigma^2) \rightarrow N(0, \frac{1}{2}\sigma^2) \quad (\text{IV.25})$$

vinden we nu

$$n^{1/2}(\hat{x}_\alpha - x_\alpha) = n^{1/2}(\bar{x} - \mu) + n^{1/2}\Phi^{-1}(\alpha)(s - \sigma) \rightarrow N(0, \sigma^2(1 + \frac{1}{2}\Phi^{-1}(\alpha)^2)). \quad (\text{IV.26})$$

Als we nu s^2 als schatting voor σ^2 invullen in de asymptotische variantie dan vinden we het volgende 95% asymptotische betrouwbaarheids interval voor x_α

$$x_\alpha^L = \hat{x}_\alpha - 1.96n^{-1/2}V < x_\alpha < \hat{x}_\alpha + 1.96n^{-1/2}V = x_\alpha^R \quad (\text{IV.27})$$

waarbij

$$V^2 = s^2(1 + \frac{1}{2}\Phi^{-1}(\alpha)^2). \quad (\text{IV.28})$$

We gebruiken de volgende intervallen voor μ en σ^2 :

$$\bar{x} - 1.96n^{-1/2}s < \mu < \bar{x} + 1.96n^{-1/2}s \quad (\text{IV.29})$$

en voor σ

$$s(1 - 1.96\frac{n^{-1/2}}{\sqrt{2}})^{-1} < \sigma < s(1 + 1.96\frac{n^{-1/2}}{\sqrt{2}})^{-1}. \quad (\text{IV.30})$$

Deze intervallen volgen uit (IV.22) en (IV.25).

4.3. Het GEV model en het Gumbel model.

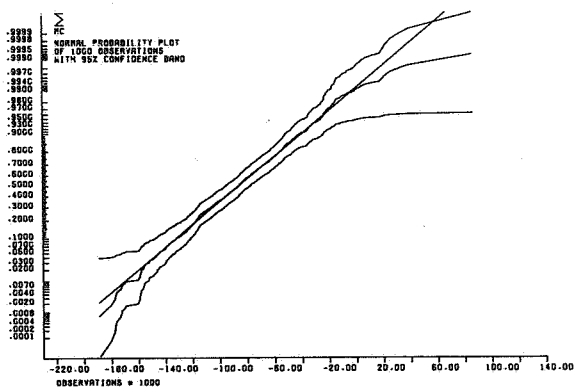
Voor het bepalen van betrouwbaarheidsintervallen onder het GEV en het Gumbel model hebben we gekozen voor *parametrische bootstrap* intervallen in plaats van intervallen gebaseerd op de asymptotische normaliteit van maximum likelihood schatters, zoals in de vorige paragrafen. Deze methode die we in deze paragraaf verder zullen beschrijven levert in het algemeen betere betrouwbaarheidsintervallen voor kleine steekproeven. Het bepalen van betrouwbaarheidsintervallen (ook voor quantielen) onder het GEV model wordt besproken in PRESCOTT and WALDEN (1980b). Hier stellen de auteurs dat er voor redelijke intervallen gebaseerd op asymptotische normaliteit minstens vijftig waarnemingen nodig zijn. Uit de resultaten van de bootstrap blijkt dan omdat er wat betreft de schatters voor θ en de quantielen (asymmetrische intervallen rond de geschatte waarden!) bij

een steekproef omvang van 34 in het GEV model weinig sprake is van normaliteit. Een interessante bespreking van het schatten dmv. maximum likelihood schatters in het Gumbel model wordt gegeven door J. Cohen in een artikel in TIAGO DE OLIVEIRA (1984) (p. 435-442).

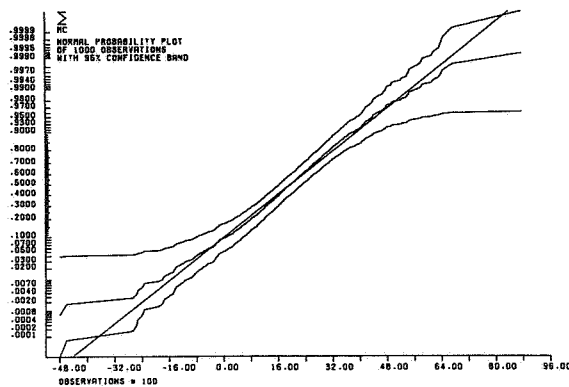
De parametrische bootstrap methode werkt als volgt. Zij gegeven een steekproef X_1, \dots, X_n uit een parametrische familie van verdelingen $\{F_\theta: \theta \in \Theta\}$ en stel dat we geïnteresseerd zijn in het schatten van een parameter $\eta(\theta)$, zoals bv. een quantiel dmv. een schatter $\hat{\eta}$. Schat nu eerst θ dmv. maximum likelihood. Dit levert een schatting $\hat{\theta}$. Maak vervolgens dmv. computersimulaties een hoop, zeg m (wij hebben gekozen voor $m = 1000$), steekproeven uit de verdeling $F_{\hat{\theta}}$ van omvang n . Bereken vervolgens schattingen $\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_m$ van η op grond van deze m steekproeven, en bepaal de empirische verdelingsfunctie G_m van de steekproef $\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_m$. Neem nu als betrouwbaarheidsinterval

$$[G_m^{-1}(\alpha/2), G_m^{-1}(1-\alpha/2)] \quad (\text{IV.31})$$

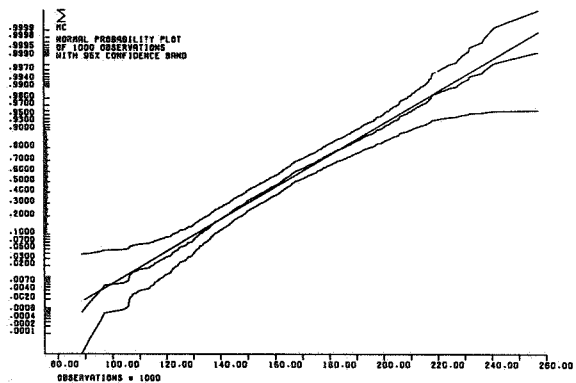
Deze methode houdt beter rekening met de vorm van de verdeling van de schatter $\hat{\eta}$ dan de methode gebaseerd op asymptotische normaliteit van $\hat{\eta}$. Voor grote steekproeven leveren beide methoden dezelfde intervallen. In EFRON (1984) wordt een verfijning van de parametrische bootstrap methode besproken. Tenslotte geven we de normale probability plots van de bootstrap-steekproeven die bestaan uit 1000 replicaties van de schattingen van de parameters en de vier quantielen in de beide GEV-modellen en het Gumbel model.



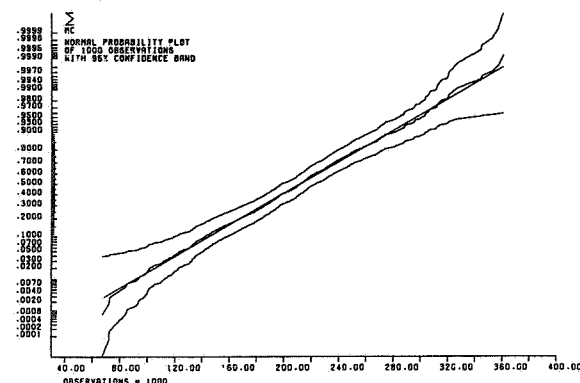
a.



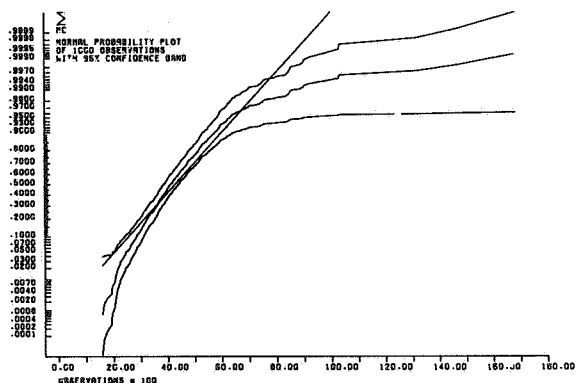
b.



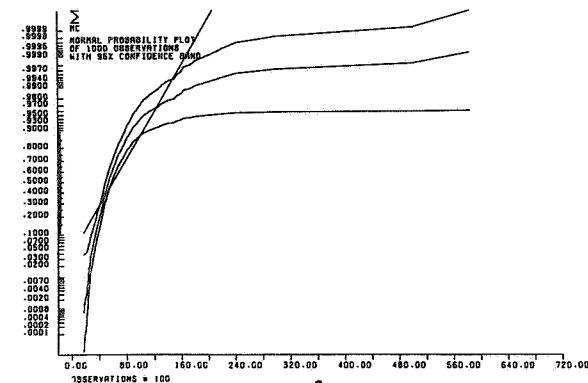
c.



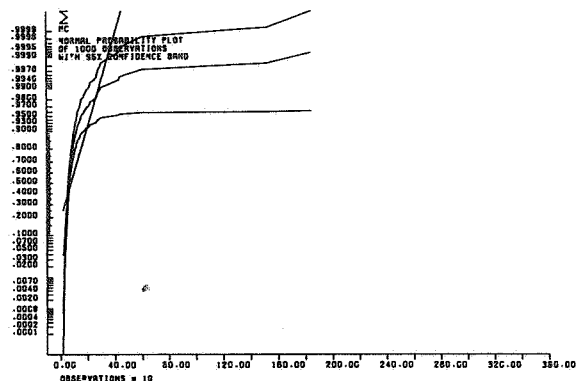
d.



e.



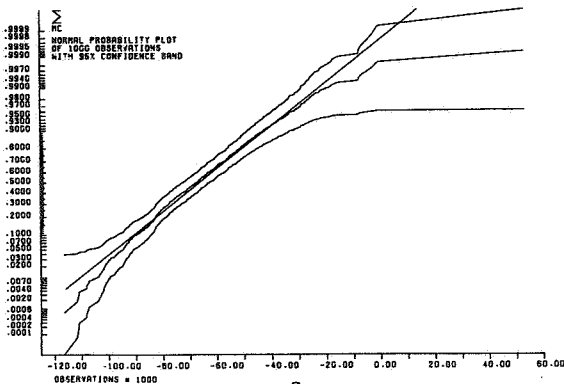
f.



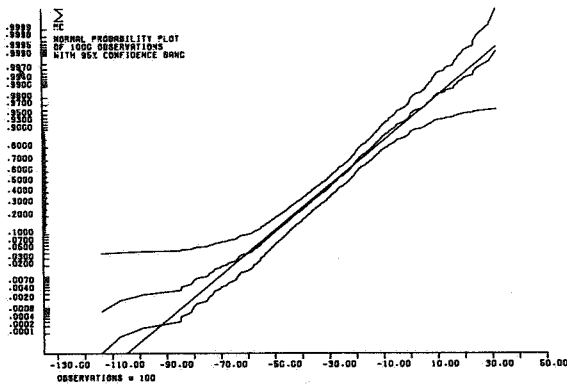
g.

GEV Model gebaseerd op alle waarnemingen.

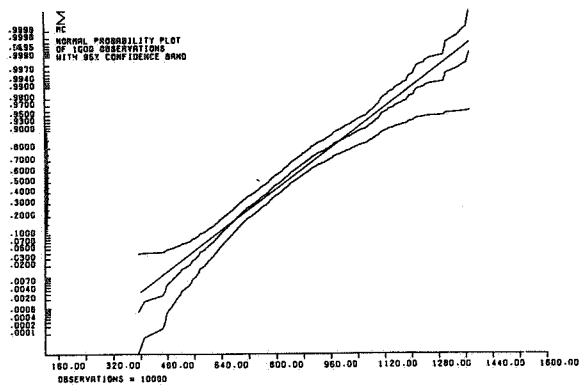
- a. x_0
- b. θ
- c. σ
- d. $1 - 10^{-1}$ quantiel
- e. $1 - 10^{-2}$ quantiel
- f. $1 - 10^{-3}$ quantiel
- g. $1 - 10^{-4}$ quantiel



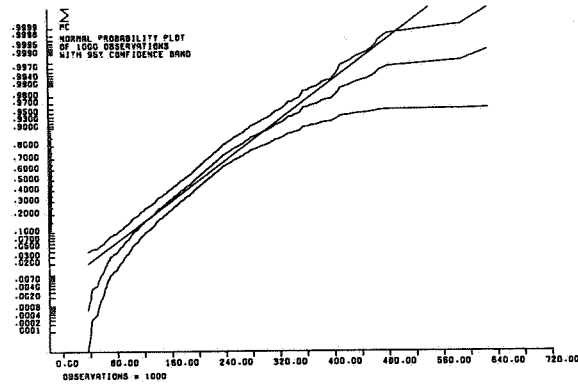
a.



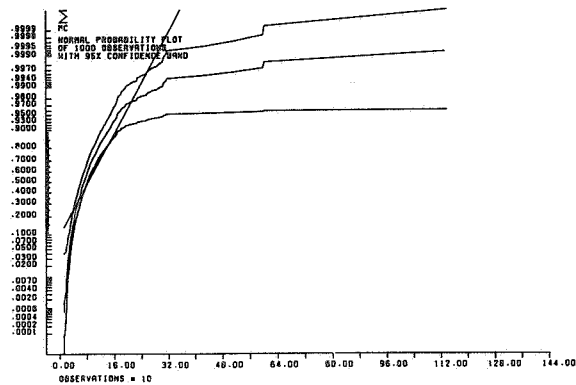
b.



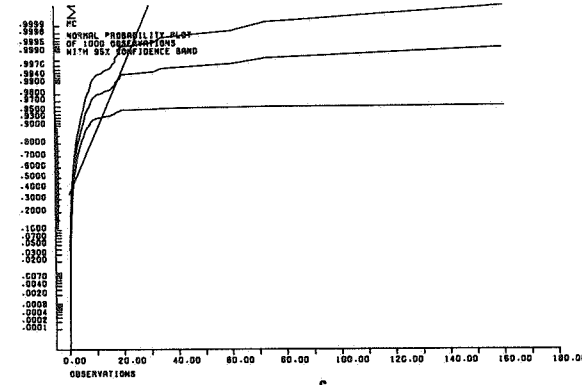
c.



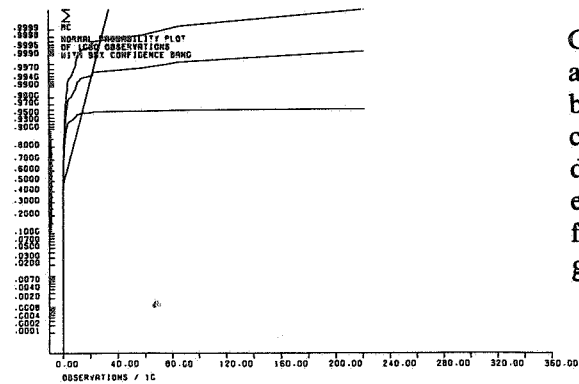
d.



e.



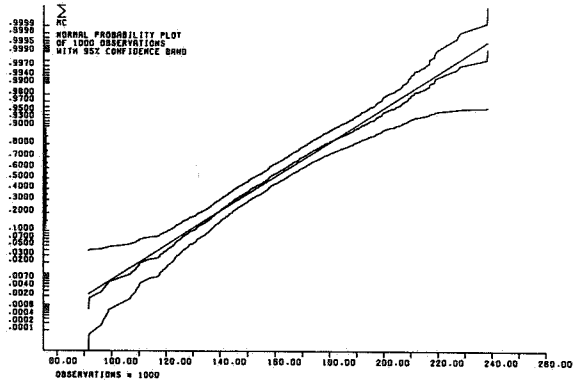
f.



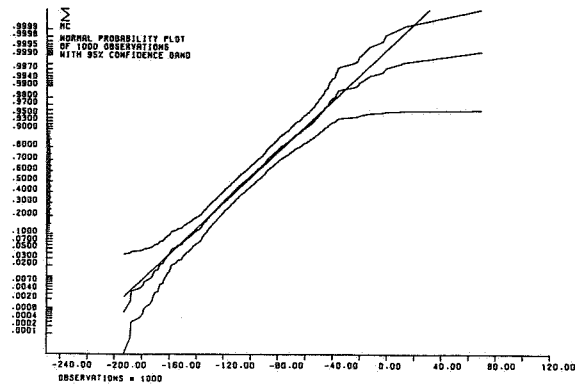
g.

GEV Model gebaseerd op de 24 grootste waarnemingen.

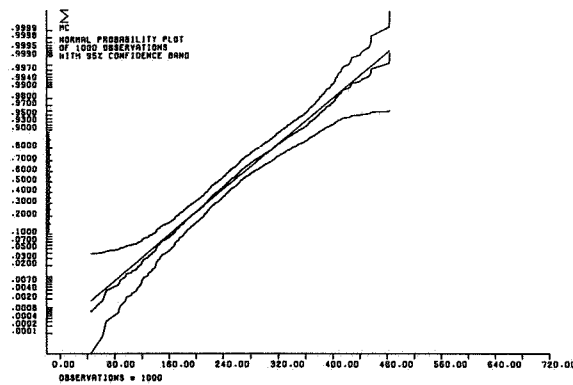
- a. x_0
- b. θ
- c. σ
- d. $1-10^{-1}$ quantiel
- e. $1-10^{-2}$ quantiel
- f. $1-10^{-3}$ quantiel
- g. $1-10^{-4}$ quantiel



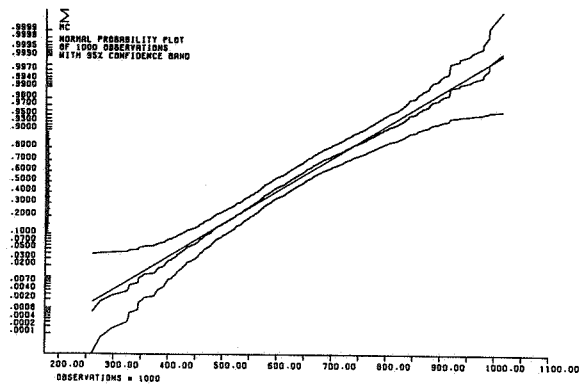
a.



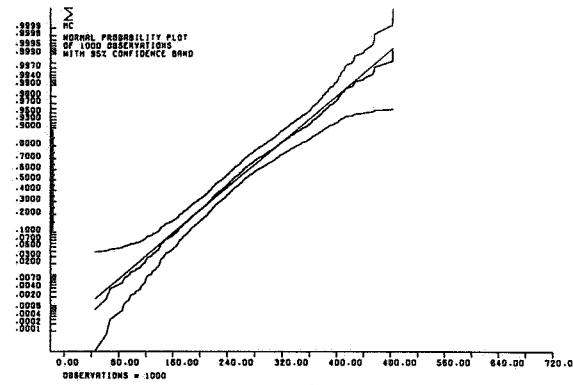
b.



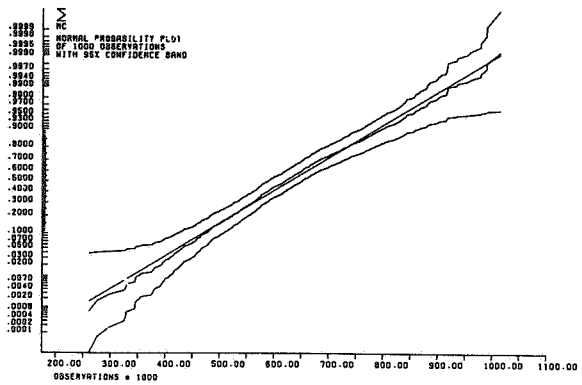
c.



d.



e.



f.

Gumbel Model.

- a. σ
- b. x_0
- c. $1-10^{-1}$ quantiel
- d. $1-10^{-2}$ quantiel
- e. $1-10^{-3}$ quantiel
- f. $1-10^{-4}$ quantiel

REFERENTIES.

- BARLOW, R.E., D.J. BARTHOLOMEW, J.M. BREMNER and H.D. BRUNK (1972). *Statistical inference under order restrictions*. Wiley. London.
- BICKEL, P.J. and K.A. DOKSUM (1977), *Mathematical Statistics: Basic ideas and selected topics*. Holden-Day, San Francisco.
- EFRON, B. (1984). Bootstrap confidence intervals for parametric problems. Technical report no. 90. Division of Biostatistics, Stanford University.
- EMBRECHTS, P.A.L., PUGH, D. and R.L. SMITH (1985). *Statistical extremes and risks (Syllabus)*. Department of mathematics. Imperial College. Londen.
- VAN ES, A.J. en C. VAN PUTTEN (1983). *Probability plots*. Statal report 3. Mathematisch Centrum. Amsterdam.
- HOSKING, J.R.M. (1984). Testing whether the shape parameter is zero in the generalized extreme value distribution. *Biometrika* 71, pp. 367-374.
- JOHNSON, N.L. and S. KOTZ (1970). *Distributions in statistics, continuous univariate distributions, vol 1*, Houghton Mifflin, Boston.
- LEADBETTER, M.R., LINDGREN, G. and H. ROOTZÉN (1983). *Extremes and related properties of random sequences and processes*. Springer. New York.
- NELSON, W. (1982). *Applied life data analysis*. Wiley. New York.
- PEARSON, E.S. and H.O. HARTLEY (1970). *Biometrika tables for statisticians, vol. 1*. Cambridge Univ. Press.
- PRESCOTT, P. and A.T. WALDEN (1980a). Maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme value distribution. *Biometrika* 67, pp. 723-724.
- PRESCOTT, P. and A.T. WALDEN (1980b). Approximate confidence intervals for port diagram curves. *Proc. Instn. Civ. Engrs.* 69, pp. 1015-1023 with discussion in nr. 71 (1981), pp. 617-621.
- PRESCOTT, P. and A.T. WALDEN (1983). Maximum likelihood estimation of the parameters of the three parameter-generalized extreme value distribution from censored samples. *J. Statist. Comp. Simul.* 10, pp. 241-250.
- RIJKSWATERSTAAT. (1984). *Markermeer-Markerwaard. Een onderzoek naar de overschrijdingsfrequenties van meerpeilen in de randmeren van de Markerwaard*.
- STEPHENS, M.A. (1974). EDF statistics for goodness of fit and some comparisons. *J. Ann. Stat. Assoc.* 69, pp. 730-737.
- STEPHENS, M.A. (1976). Asymptotic results for goodness of fit statistics with unknown parameters. *Ann. Statist.* 4, pp. 357-369.
- STEPHENS, M.A. (1977). Goodness of fit for the extreme value distribution. *Biometrika* 64, pp. 583-588.
- TIAGO DE OLIVEIRA, J. (ed). (1984). *Statistical extremes and applications*. D. Reidel. Dordrecht.

ONTVANGEN 1 0 SEP. 1985