Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science

E. de Goede

Het vergelijken van eindige differentieschema's voor het numeriek oplossen van hyperbolische differentiaalvergelijkingen

Afdeling Numerieke Wiskunde Notitie NM-N8601 Mei

The comparison of finite difference schemes for the numerical solution of hyperbolic differential equations

The Centre for Mathematics and Computer Science is a research institute of the Stichting Mathematisch Centrum, which was founded on February 11, 1946, as a nonprofit institution aiming at the promotion of mathematics, computer science, and their applications. It is sponsored by the Dutch Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.).

Het Vergelijken van Eindige Differentieschema's voor het Numeriek Oplossen van Hyperbolische Differentiaalvergelijkingen

Erik de Goede
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Kruislaan 413, 1098 AB Amsterdam, Nederland

We vergelijken bekende differentieschema's voor eerste-orde hyperbolische differentiaalvergelijkingen in twee dimensies. De stabiliteit en de efficiëntie van de schema's worden onderzocht.

Classificatie : 65M10.
Trefwoorden : Hyperbolische vergelijkingen, eindige differentieschema's, stabiliteit, efficiëntie.

1. Inleiding

In de zestiger jaren zijn er tal van differentieschema's opgesteld voor het oplossen van de hyperbolische differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} + \frac{\partial G(u)}{\partial y} = 0\,. \tag{1.1}$$

Het bekendste schema hiervoor is het Lax-Wendroffschema. Dit is een éénstapsmethode. Later zijn er door onder andere Richtmyer en Strang meerstapsversies van het Lax-Wendroffschema opgesteld. Alle bovengenoemde schema's zijn expliciet en tweede orde nauwkeurig. In Wilson ([7]) worden enkele van deze schema's met elkaar vergeleken. De volgende differentieschema's kwamen in dat artikel als beste naar voren : Strang-I, Strang-II, Richtmyer en Rotated-Richtmyer.

We gaan uit van de inhomogene differentiaalvergelijking :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} + \frac{\partial G(u)}{\partial y} + H(u) = 0\,. \tag{1.2}$$

De hierboven genoemde schema's hebben we vergeleken bij zowel een lineair als een niet-lineair probleem. Bij het lineaire probleem hebben we tevens het Lax-Wendroffschema getest. Bovendien hebben we onderzoek gedaan naar de gevolgen van de niet-lineariteit op het resultaat.

We zullen eerst de differentieschema's bespreken, gevolgd door de bijbehorende stabiliteitsvoorwaarden. Vervolgens wordt omschreven op welke wijze de differentieschema's met elkaar vergeleken worden. Ten slotte volgen de numerieke resultaten en conclusies.

Notitie NM-N8601
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 4079, 1009 AB Amsterdam

2. Differentieschema's

We beschouwen de differentiaalvergelijking (1.2). Om een analytische oplossing te kunnen bepalen, hebben we een inhomogene term toegevoegd. De inhomogene term wordt bepaald door de differentiaalvergelijking en de beginvoorwaarden. De differentieschema's, die we zullen bespreken, zijn dan ook inhomogene versies van de schema's in Wilson ([7]). De schema's zijn alle zelfstartend en éénstapsmethoden in de terminologie die gebruikelijk is bij gewone differentiaalvergelijkingen. Ze verschillen echter in het aantal tussenstappen dat uitgevoerd moet worden. Er worden de volgende notaties gebruikt : $U^n_{i,j}$ geeft de numerieke waarde in roosterpunt $(i\Delta x, j\Delta y)$ op $t = n\Delta t$ aan, $F^n_{i,j} = F(U^n_{i,j})$ en $(F^2)^n_{i,j} = F(F^n_{i,j})$.

2.1. *Richtmyer-schema's*

Richtmyer-schema's zijn van de vorm :

$$
\begin{aligned}
U^{n+½} &= \mu(U^n) + \frac{\Delta t}{2}\left[-\left[\tilde{F}^n_x + \tilde{G}^n_y + H^n\right]\right]\\
U^{n+1} &= U^n + \Delta t\left[-\left[\tilde{F}^{n+½}_x + \tilde{G}^{n+½}_y + H^{n+½}\right]\right],
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

met $\mu(U^n)$ één of andere middeling van U^n en $\tilde{F}^n_x$ een benadering van $\partial F^n/\partial x$. In termen van gewone differentiaalvergelijkingen bestaat een Richtmyer-schema dus uit twee niveau's , te weten een Euler-tussenstap met 'smoothing' van U^n, gevolgd door een leap-frog-tussenstap. We zullen nu twee schema's uitschrijven.

2.1.1. *Richtmyer-schema*

$$
\begin{aligned}
U^{n+½}_{i,j} &= \frac{1}{4}(U^n_{i+½,j} + U^n_{i-½,j} + U^n_{i,j+½} + U^n_{i,j-½})\\
&\quad - \frac{\Delta t}{2}\left\{\frac{F^n_{i+½,j} - F^n_{i-½,j}}{\Delta x} + \frac{G^n_{i,j+½} - G^n_{i,j-½}}{\Delta y} + H^n_{i,j}\right\}\\
U^{n+1}_{i,j} &= U^n_{i,j} - \Delta t\left\{\frac{F^{n+½}_{i+½,j} - F^{n+½}_{i-½,j}}{\Delta x} + \frac{G^{n+½}_{i,j+½} - G^{n+½}_{i,j-½}}{\Delta y} + H^{n+½}_{i,j}\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

2.1.2. *Rotated-Richtmyerschema*

Bij dit schema stellen we $\Delta x = \Delta y$.

$$
\begin{aligned}
U^{n+½}_{i,j} &= \frac{1}{4}(U^n_{i+½,j+½} + U^n_{i-½,j+½} + U^n_{i+½,j-½} + U^n_{i-½,j-½})\\
&\quad - \frac{\Delta t}{2}\left\{\frac{(F+G)^n_{i+½,j+½}}{2\Delta x} + \frac{(F-G)^n_{i+½,j-½}}{2\Delta x}\right\}\\
&\quad - \frac{\Delta t}{2}\left\{-\frac{(F-G)^n_{i-½,j+½}}{2\Delta x} - \frac{(F+G)^n_{i-½,j-½}}{2\Delta x} + H^n_{i,j}\right\}\\
U^{n+1}_{i,j} &= U^n_{i,j} - \Delta t\left\{\frac{(F+G)^{n+½}_{i+½,j+½}}{2\Delta x} + \frac{(F-G)^{n+½}_{i+½,j-½}}{2\Delta x}\right\}\\
&\quad - \Delta t\left\{-\frac{(F-G)^{n+½}_{i-½,j+½}}{2\Delta x} - \frac{(F+G)^{n+½}_{i-½,j-½}}{2\Delta x} + H^{n+½}_{i,j}\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

2.2. Strang-schema's

We beschouwen de operatoren L_x en L_y , met

$$L_x: \begin{cases} U_{i,j}^{n+½} = \frac{1}{2}(U_{i+½,j}^n + U_{i-½,j}^n) - \frac{\Delta t}{2}\left\{\frac{F_{i+½,j}^n - F_{i-½,j}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2}H_{i,j}^n\right\} \\ U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \Delta t\left\{\frac{F_{i+½,j}^{n+½} - F_{i-½,j}^{n+½}}{\Delta x} + \frac{1}{2}H_{i,j}^{n+½}\right\}, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$L_x(U_{i,j}^n) = U_{i,j}^{n+1} ,$$

en analoog voor L_y. In Mitchell & Griffiths ([4]) worden L_x en L_y ééndimensionale Lax-Wendroffoperatoren genoemd. In verband met de inhomogene term in de differentiaalvergelijking (1.2) hebben we de operatoren (2.4) aangepast. We hebben de inhomogene term opgesplitst en aan beide operatoren toegevoegd.

De Strang-schema's kunnen nu in de volgende vorm geschreven worden :

Strang−I : $U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2}(L_x\, L_y + L_y\, L_x)U_{i,j}^n$ en

Strang−II: $U_{i,j}^{n+1} = (L_{\frac{x}{2}}\, L_y\, L_{\frac{x}{2}})U_{i,j}^n$.

Hierbij strekt de $L_{\frac{x}{2}}$ operator zich uit over de halve tijdstap (in (2.4): $\Delta t \rightarrow \frac{1}{2}\Delta t$).

Het Strang-I-schema voert dus acht tussenstappen uit en het Strang-II-schema zes. In de praktijk kan het Strang-II-schema nog verbeterd worden. Er geldt namelijk

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+2} &= (L_{\frac{x}{2}}\, L_y\, L_{\frac{x}{2}})\,(L_{\frac{x}{2}}\, L_y\, L_{\frac{x}{2}})U_{i,j}^n \\ &= (L_{\frac{x}{2}}\, L_y\, L_x\, L_y\, L_{\frac{x}{2}})U_{i,j}^n . \end{aligned} \tag{2.5}$$

De $L_{\frac{x}{2}}$ operator aan het einde van een cykel kan dus samengesteld worden met de $L_{\frac{x}{2}}$ operator aan het begin van de volgende cykel.

2.3. Lax-Wendroffschema

Het Lax-Wendroffschema formuleren we alleen voor de homogene differentiaalvergelijking (1.1).

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n &- \Delta t\left\{\frac{F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{G_{i,j+1}^n - G_{i,j-1}^n}{2\Delta y}\right\} \\ &+ \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left\{\frac{(F^2)_{i-1,j}^n - 2(F^2)_{i,j}^n + (F^2)_{i+1,j}^n}{(\Delta x)^2}\right\} \\ &+ \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left\{\frac{(G^2)_{i,j-1}^n - 2(G^2)_{i,j}^n + (G^2)_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2}\right\} \\ &+ \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left\{\frac{(FG+GF)_{i+1,j+1}^n - (FG+GF)_{i+1,j-1}^n}{(2\Delta x).(2\Delta y)}\right\} \\ &+ \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left\{\frac{-(FG+GF)_{i-1,j+1}^n + (FG+GF)_{i-1,j-1}^n}{(2\Delta x).(2\Delta y)}\right\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

3. Stabiliteitsvoorwaarden

We zullen de stabiliteitsvoorwaarde voor het Richtmyer-schema afleiden. De methode die we gebruiken, is beschreven in Wilson ([7]). Hierbij gaan we uit van de differentiaalvergelijking (1.1). De term H(u) is weggelaten, want deze is niet significant in de lineaire stabiliteitsanalyse. Om nu de lokale stabiliteit te onderzoeken, stellen we

$$\frac{\partial F(u)}{\partial x} = A(u)\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial G(u)}{\partial y} = B(u)\frac{\partial u}{\partial y},$$

met A(u) en B(u) de jacobiaan van respectievelijk F(u) en G(u). De schema's worden gelineariseerd door A(u) en B(u) constant te nemen. Door nu de Von Neumann-analyse toe te passen, kan de volgende stabiliteitsvoorwaarde afgeleid worden :

$$\lambda\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.1}$$

met $\Delta y = \Delta x$ en $\lambda = \max\limits_{A,B}\left[|\lambda_A|, |\lambda_B|\right]$.

Voor het Rotated-Richtmyerschema kan een analoge methode gevolgd worden. De stabiliteitsvoorwaarden van het Strang-I, Strang-II en Lax-Wendroffschema worden afgeleid in [5],[6] en [3].

Wanneer een hyperbolische vergelijking benaderd wordt door een expliciet differentieschema, dan moet zo'n schema voldoen aan de Courant-Friedrichs-Lewy (C.F.L.)-voorwaarde (zie [1]). Om dit duidelijk te maken beschouwen we de differentiaalvergelijking (1.1) voor een punt P in de tweedimensionale ruimte op een willekeurig tijdstip t_0. Bij P hoort een beïnvloedingsgebied, dat omsloten wordt door de karakteristiekenkegel. Wanneer de beginvoorwaarden in het afhankelijkheidsgebied van P, het gebied omsloten door de karakteristiekenkegel op $t=0$ gegeven zijn, dan is het betreffende differentieschema convergent. Omdat Lax en Richtmyer (zie [2]) bewezen hebben dat convergentie en stabiliteit equivalente begrippen zijn, levert de C.F.L.-voorwaarde dus een noodzakelijke voorwaarde voor de stabiliteit. We zullen nu een overzicht geven van de voldoende en noodzakelijke stabiliteitsvoorwaarden voor bepaalde schema's.

Zij $$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

met A en B constant en

$$\lambda = \max_{A,B}\left[|\lambda_A|, |\lambda_B|\right].$$

Dan vinden we de volgende bovengrenzen voor $\lambda\frac{\Delta t}{\Delta x}$:

schema	voldoende stabiliteits voorwaarde (c1)	C.F.L.-voorwaarde (c2)	quotiënt (c1/c2)
Lax-Wendroff	$1/(2\sqrt{2})$	1	$1/(2\sqrt{2})$
Richtmyer	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
Rotated-Richtmyer	1	1	1
Strang-I	1	1	1
Strang-II	1	1	1

Tabel 3.1: Overzicht van stabiliteitsvoorwaarden

Als voor een schema de beide voorwaarden gelijk zijn (quotiënt = 1), dan is het schema optimaal. Voor het tweedimensionale Lax-Wendroffschema is de stabiliteitsvoorwaarde duidelijk strenger dan de C.F.L.-voorwaarde. Het ééndimensionale Lax-Wendroffschema is overigens wel optimaal.

4. HET VERGELIJKEN VAN DIFFERENTIESCHEMA'S

Bij alle testproblemen nemen we een vaste eindtijd en nemen we tijdstappen die maximaal zijn volgens de stabiliteitsvoorwaarde. Voor elk schema meten we de nauwkeurigheid en de 'central processing time'. Tevens wordt de 'central processing time' vergeleken met de bewerkelijkheid van het betreffende schema. Als maat voor de nauwkeurigheid definiëren we

$$cd = -{}^{10}\log(\mid \text{maximale globale fout op } t=\text{eindtijd} \mid),$$

wat het aantal correcte cijfers op het eindtijdstip aangeeft. Als eenheid voor de bewerkelijkheid definiëren we een berekening van $F_{i,j}^n$ (of $G_{i,j}^n$). Een differentie $(F_{i+\frac{1}{2},j}^n - F_{i-\frac{1}{2},j}^n)/\Delta x$ is een minder geschikte keuze. Immers in de differentieschema's worden, daar waar mogelijk, berekeningen samengenomen. In het algemeen zijn berekeningen van de vorm $(F+G)_{i,j}^n$ namelijk goedkoper dan $(F_{i,j}^n + G_{i,j}^n)$.

Om nu een overzicht te geven van het totale aantal berekeningen, bepalen we eerst het aantal berekeningen dat nodig is om de waarde in één roosterpunt op een zeker tijdstip te bepalen. Om vervolgens een verhouding van het totale aantal berekeningen te bepalen, dienen we deze getallen nog te delen door de bijbehorende stabiliteitsconstante (zie Tabel 3.1). Dit levert de volgende tabel op.

schema	aantal berekingen per roosterpunt per tijdstap	verhouding totale aantal berekeningen
Lax-Wendroff	13	$26\sqrt{2}$
Richtmyer	16	$16\sqrt{2}$
Rotated-Richtmyer	8	8
Strang-I	16	16
Strang-II	8	8

Tabel 4.1: Verhouding van berekeningen

5. Numerieke resultaten en conclusies

Bij alle testproblemen is gebruik gemaakt van periodieke randvoorwaarden. We hebben een uniform rooster gekozen met $\Delta x = \Delta y$. Er is geprogrammeerd in de taal Algol 68.

5.1. Lineair testprobleem

We beschouwen de lineaire vergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (5.1)$$

$$(x,y) \in [0,1]\times[0,1], \quad t \in [0,0.7],$$

met de beginvoorwaarde

$$u_1 = \frac{1}{2}(\sin(2\pi x)+\sin(2\pi y))$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(\sin(2\pi x)+\cos(2\pi y)), \quad (x,y) \in [0,1]\times[0,1]. \qquad (5.2)$$

Dan is de analytische oplossing gegeven door

$$u_1 = \frac{1}{2}(\sin(2\pi(x-t))+\sin(2\pi(y-t)))$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(\sin(2\pi(x-t))+\sin(2\pi(y-t))). \qquad (5.3)$$

Omdat de grootste eigenwaarde van λ van de matrices A en B (zie (3.1)) gelijk is aan twee, verkrijgen we de stabiliteitsvoorwaarde

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant \frac{k_{schema}}{2}, \qquad (5.4)$$

met $k_{Richtmyer} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $k_{Lax-Wendroff} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ *en*

$$k_{Rotated-Richtmyer} = k_{Strang-I} = k_{Strang-II} = 1. \qquad (5.5)$$

In Tabel 5.1 geven we de resultaten voor de verschillende differentieschema's. Hierbij geeft het bovenste getal het aantal correcte cijfers (c.d) aan en het onderste getal de 'central processing time' (in sec.).

Het aantal correcte cijfers en de benodigde 'central processing time'

Δx	Lax-Wendroff	Richtmyer	Rotated-Richtmyer	Strang-I	Strang-II
1 / 10	0.49 7.9	0.78 4.4	0.61 1.5	0.61 3.9	0.61 2.1
1 / 17	0.94 35.1	1.22 20.5	1.05 7.1	1.05 18.0	1.04 9.3
1 / 20	1.08 55.9	1.36 33.5	1.19 11.3	1.19 28.8	1.19 14.6
1 / 27	1.33 135.3	1.62 82.0	1.45 27.4	1.45 70.2	1.44 35.3

Tabel 5.1: Numerieke resultaten voor testprobleem (5.1)

5.1.1. Conclusies

Uit de resultaten volgt duidelijk dat alle schema's tweede orde nauwkeurig zijn in plaats en tijd. Immers bij halvering van de maaswijdte, en dus ook de tijdstap, wordt het aantal correcte cijfers ongeveer 0.6 ($\approx$ log 4) groter. Verder blijkt de nauwkeurigheid van het Rotated-Richtmyer-, Strang-I- en Strang-II-schema ongeveer gelijk te zijn. Het Richtmyer-schema heeft daarentegen een iets grotere nauwkeurigheid, terwijl het Lax-Wendroffschema de kleinste nauwkeurigheid oplevert.

Wanneer de verhouding van de 'c.p.time' tussen de Richtmyer-schema's onderling en de Strang-schema's onderling bekeken wordt, dan blijkt dit aardig te kloppen met de vooraf berekende verhouding van het totale aantal berekeningen, respectievelijk 2.8 en 2.0 (zie Tabel 4.1). De Strang-schema's blijken echter 1.3 maal zo duur te zijn als de vergelijkbare Richtmyer-schema's. De wijze van programmeren zou hiervoor een verklaring kunnen zijn. Bovendien blijkt bij een vergelijking van de 'c.p.time' tussen het Lax-Wendroffschema en het Rotated-Richtmyerschema, dat het Lax-Wendroffschema ongeveer 5.0 maal zo duur is (de berekende verhouding is 4.6). Het Lax-Wendroffschema is dus duidelijk inefficiënter dan de andere schema's.

Ten slotte merken we op dat bij alle schema's geconstateerd werd dat de globale fout lineair was met het aantal tijdstappen. De oorzaak van deze constatering valt nader te onderzoeken.

5.2. Niet-lineair testprobleem

We beschouwen de differentiaalvergelijking (1.2) en kiezen

$$\mathrm{F}(u) = (1 - c_1 u)u$$
$$\mathrm{G}(u) = (\exp(c_2 u))u \,, \tag{5.6}$$

met c_1 en c_2 constanten. Neem als beginvoorwaarde

$$u(x,y,0) = \sin(2\pi x) + \sin(2\pi y)\,. \tag{5.7}$$

Dan wordt de analytische oplossing gegeven door

$$u(x,y,t) = \sin(2\pi(x - t)) + \sin(2\pi(y - t))\,. \tag{5.8}$$

Er geldt

$$H(u) = -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{F}(u)}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{G}(u)}{\partial y} \tag{5.9}$$
$$= 2\pi\{\cos(2\pi(y - t)).(1 - (1 + c_2 u).\exp(c_2 u)) + \cos(2\pi(x - t)).2c_1 u\}\,.$$

Om de stabiliteitsvoorwaarden te bepalen, schrijven we het testprobleem in de volgende vorm:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1 - 2c_1 u)\frac{\partial u}{\partial x} + (1 + c_2 u)(\exp(c_2 u))\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{H}(u) = 0\,. \tag{5.10}$$

Zij

$$\lambda_1 = |(1 - 2c_1 u)| \leqslant |(1 - 4c_1)| \ \ \textit{en}$$
$$\lambda_2 = |(1 + c_2 u).\exp(c_2 u)| \leqslant |(1 + 2c_2).\exp(2c_2)| \,, \tag{5.11}$$

dan is de stabiliteitsvoorwaarde

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant \frac{k_{schema}}{\max(\lambda_1, \lambda_2)} \quad (\textit{voor } k_{schema} \ \textit{ zie } (5.5))\,. \tag{5.12}$$

Het overeenkomstige lineaire probleem is

$$\mathrm{F}(u) = \mathrm{G}(u) = u \quad en \quad \mathrm{H}(u) = 0 \text{ (dus } c_1 = c_2 = 0) \,,$$

met de stabiliteitsvoorwaarde

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant k_{\,schema} \,. \tag{5.13}$$

In Tabel 5.2 worden de resultaten van het niet-lineaire probleem en het overeenkomstige lineaire probleem gegeven. Omdat het Lax-Wendroffschema alleen voor differentiaalvergelijking (1.1) gegeven is, laten we dit schema buiten beschouwing. Zoals in Tabel 5.1, geeft het bovenste getal het aantal correcte cijfers aan en het onderste getal de gebruikte 'central processing time'. Voor het lineaire probleem kiezen we

$$c_1 = c_2 = 0 \tag{5.14}$$

en voor het niet-lineaire probleem

$$c_1 = c_2 = 0.09 \quad (=> \frac{1}{\max(\lambda_1, \lambda_2)} \approx 0.7 \,). \tag{5.15}$$

Het aantal correcte cijfers en de benodigde 'central processing time'						
	(5.15)					(5.14)
Δx	Richtmyer	Rotated-Richtmyer	Strang-I	Strang-II		Richtmyer
1/10	0.65 2.6	0.45 1.2	0.53 2.9	0.50 1.5		1.09 0.7
1/14	0.92 7.0	0.69 3.2	0.79 7.3	0.76 3.8		1.34 1.8
1/20	1.18 19.6	0.95 8.9	1.08 20.9	1.02 10.8		1.67 5.2
1/28	1.46 53.4	1.23 23.7	1.37 56.6	1.26 28.3		1.91 12.9

Tabel 5.2: Numerieke resultaten voor testprobleem (5.6)

5.2.1. Conclusies

Uit de resultaten blijkt dat er geen grote verschillen zijn tussen het lineaire testprobleem (5.1) en dit niet-lineaire probleem (5.6). Zo is de nauwkeurigheid van het Richtmyer-schema wederom iets groter dan bij het Rotated-Richtmyer-, Strang-I- en Strang-II-schema, welke een ongeveer gelijke nauwkeurigheid leveren. Dit is geheel in overeenstemming met de resultaten verkregen voor het lineaire testprobleem.

Wanneer we de verhouding van de 'c.p.time' tussen de Strang-schema's bekijken, dan blijkt deze hetzelfde te zijn als de voorspelde verhouding (namelijk 2.0). Dit in tegenstelling tot de verhouding die bij de Richtmyer-schema's wordt bereikt. Het Rotated-Richtmyerschema blijkt namelijk niet 2.8 maar slechts 2.2 maal zo efficiënt te zijn als het Richtmyer-schema. Dit valt als volgt te verklaren: Bij het lineaire probleem is de berekening van $(F+G)_{i,j}^n$ echt tweemaal zo goedkoop als $(F_{i,j}^n+G_{i,j}^n)$, want F en G zijn lineaire functies. Wanneer F en G meer ingewikkelde functies worden, dan geldt dit niet meer. Bij een niet-lineair testprobleem levert het samennemen van berekeningen dus veel minder voordeel op. Bovendien moet er in elke tussenstap een relatief dure functie H geëvalueerd worden.

Wanneer we het niet-lineaire testprobleem vergelijken met het overeenkomstige lineaire probleem, dan blijkt het niet-lineaire probleem aanmerkelijk duurder te zijn. Dit wekt geen verbazing, want de evaluaties van de functies F en G vergen veel meer rekentijd. Bovendien is de nauwkeurigheid ook minder dan bij het lineaire probleem. Bij het lineaire probleem hebben we overigens alleen het Richtmyer-schema getest. Immers voor het Rotated-Richtmyer-, Strang-I- en Strang-II- schema worden bij dit testprobleem niet relevante resultaten verkregen. Bij deze schema's wordt er namelijk geïntegreerd langs de karakteristieken, met als gevolg dat de resultaten exact zijn binnen machine-precisie. Een vergelijking met het overeenkomstige niet-lineaire probleem is dan niet meer mogelijk.

De eindconclusie mag luiden dat voor het oplossen van de hyperbolische differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} + \frac{\partial G(u)}{\partial y} + H(u) = 0 \tag{5.16}$$

het **Rotated-Richtmyerschema** en het **Strang-II-schema** het meest efficiënt zijn van alle beschouwde schema's. Bij het Richtmyer-schema wordt weliswaar een grotere nauwkeurigheid verkregen, maar dit weegt niet op tegen het aantal extra berekeningen. Bovengenoemde schema's blijken aanmerkelijk beter te zijn dan het Lax-Wendroffschema, het bekendste schema voor hyperbolische differentiaalvergelijkingen.

6. Referenties

[1] Courant,R., K.O.Friedrichs & H.Lewy, Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Math. Annln., 100(1928), 32-74.

[2] Lax,P.D. & R.D.Richtmyer, Survey of the stability of lineair finite difference equations, Communs pure appl. Math., 9(1956), 267-293.

[3] Lax,P.D. & B.Wendroff, Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy, Communs pure appl. Math., 17(1964), 381-398.

[4] Mitchell,A.R. & D.F.Griffiths, The finite difference method in partial differential equations, Wiley, Chichester, (1980).

[5] Strang,W.G., Accurate partial difference methods: Lineair Cauchy problems, Arch. Rat. Mech. Anal., 12(1963), 392-402.

[6] Strang,W.G., On the construction and comparison of difference schemes, SIAM J. Numer. Anal., 5(1968), 506-517.

[7] Wilson,J.C., Stability of Richtmyer type difference schemes in any finite number of space variables and their comparison with multistep Strang schemes, J.Inst. Maths. Applics., 10(1972), 238-257.