



Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science

J.J. Rusch

Enkele resultaten met de schema's
van Roe en Steger & Warming bij transsonie stromingen
in een MG/eindige-volume methode

Afdeling Numerieke Wiskunde

Notitie NM-N8701

Februari

*Some results of the Roe and Steger & Warming schemes for
transonic flows in a MG finite volume method*

Bibliotheek
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Amsterdam

The Centre for Mathematics and Computer Science is a research institute of the Stichting Mathematisch Centrum, which was founded on February 11, 1946, as a nonprofit institution aiming at the promotion of mathematics, computer science, and their applications. It is sponsored by the Dutch Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.).

65 Nos. 65 N 30, 76 H 65

Enkele resultaten met de schema's van Roe en Steger & Warming bij transsone stromingen in een MG/eindige-volume methode

J.J. Rusch

*Centrum voor Wiskunde en Informatica,
Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam*

SAMENVATTING

In dit werk worden drie schema's met elkaar vergeleken in een Multi-Grid eindige-volume methode om de oplossing te vinden van de stationaire Eulervergelijkingen in een kanaal waarin zich een 'bump' bevindt. Het zijn de schema's van Osher, Steger & Warming en Roe. De schema's van Osher en Roe blijken goed overeen te komen, doch het schema van Steger en Warming levert geheel andere resultaten op. Het schema van Roe wordt hier gebruikt in een Newton-methode waardoor de Jacobiaan van de numerieke flux berekend moet worden, wat door de complexe structuur van Roe erg tijdrovend is vergeleken met de schema's van Osher en Steger & Warming.

In het bijzonder werd gekeken naar het gedrag van de oplossing van een transsone stroming.

Samenvatting	1
Inhoud	1
Notaties	2
1. Inleiding	4
2. Discretisatie en numerieke flux	5
3. De numerieke flux volgens Steger en Warming	6
4. De numerieke flux volgens Roe	7
5. Testresultaten	11
6. Conclusie	11
7. Referenties	12
Appendices	
I De Jacobiaan in de Eulervergelijkingen	13
II Rotatie-invariantie van de Eulervergelijkingen	16
III De afgeleiden van $f_{sw}(q_L, q_R)$ naar zijn argumenten	18
IV De afgeleiden van $f_{roe}(q_L, q_R)$ naar zijn argumenten	20
V Beschrijving van het kanaal	22
Tabellen	25
Listings	26
Figuren	28

NOTATIES

symbolen

- c : geluidssnelheid, $c^2 = \gamma p / \rho$,
 c_p : de soortelijke warmte bij constante druk,
 c_v : de soortelijke warmte bij constant volume,
 e : totale energie per eenheid van massa, $e = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + c^2 / \gamma(\gamma - 1)$,
 E : totale energie, $E = \rho e$,
 h : enthalpie, $h = e + p / \rho$,
 M : getal van Mach, $M = (u^2 + v^2)^{1/2} / c$,
 N : aantal cellen in rekengebied,
 $\text{opp}(\cdot)$: de oppervlakte van een gebied in $\mathbb{R}^2$,
 p : de druk,
 s : entropie, $s = p \rho^{-\gamma}$,
 t : de tijd,
 T : de temperatuur,
 u : snelheid in de x -richting,
 v : snelheid in de y -richting,
 x : coördinaat,
 y : coördinaat,
 $\bar{z}$: $\ln(s)$, een rekengrootheid,
 γ : verhouding van de soortelijke warmten, $\gamma = c_p / c_v$; voor lucht: $\gamma = 1.4$,
 $\Delta(\cdot)$: verschil tussen links en rechts, $\Delta(\cdot) = (\cdot)_L - (\cdot)_R$,
 Γ_{ij} : de rand van Ω_{ij} , $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_{ij}$,
 Γ_{ijk} : de rand tussen Ω_{ij} en zijn k^e buur, $\Gamma_{ijk} = (\partial\Omega_{ij}) \cap (\partial\Omega_{ijk})$,
 ρ : massadichtheid,
 Ω : deel van $\mathbb{R}^2$, het definitiegebied van de Eulervergelijkingen,
 Ω_{ij} : celletje uit Ω , $\Omega_{ij} \subset \Omega$,
 Ω_{ijk} : de k^e buur van Ω_{ij} , $k = 1, 2, 3$ of 4 .

subscripts

- ij : geeft de positie binnen het grid aan,
 L : links, linkertoestand,
 R : rechts, rechertoestand,
 Ro : volgens Roe,
 Sw : volgens Steger & Warming,
 x : differentiatie naar x ,
 y : differentiatie naar y .

superscripts

- L : level-nummer in een serie roosters,
 τ : de getransponeerde,
 $+$: bij een scalar α : $\max(0, \alpha)$,
 $+$: bij een diagonaal matrix $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$: $\text{diag}(d_1^+, d_2^+, \dots, d_n^+)$,
 $+$: bij een volle matrix A met als matrix der eigenvectoren $R : R \cdot \Lambda^+ \cdot R^{-1}$,
 $-$: bij een scalar α : $\min(0, \alpha)$,

- : bij een diagonaal matrix $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$: $\text{diag}(d_1^-, d_2^-, \dots, d_n^-)$,
- : bij een volle matrix A met als matrix der eigenvectoren R : $R \cdot \Lambda^- \cdot R^{-1}$.

overige symbolen

- $|\cdot|$: de Euclidische norm van een vector,
- $\|\cdot\|$: als $|\cdot|$,
- $\bar{(\cdot)}$: de gemiddelde waarde van links en rechts, dus: $\bar{(\cdot)} = \frac{1}{2}(\cdot)_L + \frac{1}{2}(\cdot)_R$.

Afkortingen

- vgl : vergelijking,
- vgl'n : vergelijkingen,
- NS : Navier-Stokes,
- Eul : Euler.

1. INLEIDING

De Navier-Stokes vergelijkingen beschrijven het gedrag van een compressibel medium.

De Eulervergelijkingen ontstaan uit de NS-vgl'n door de wrijvings- en warmtegeleidingsverschijnselen te verwaarlozen. Een afleiding van de NS-vgl'n kan men vinden in bijvoorbeeld [18, 19, 20, 21].

Omdat het analytisch oplossen van de Euler-vgl'n alléén in uiterst simpele gevallen mogelijk is moeten voor de ingewikkelder problemen al gauw computers gebruikt worden om een benadering van de oplossing te vinden.

Bij de berekeningen ten behoeve van dit verslag was de discretisatiemethode de eindige-volume methode. Om het vinden van de oplossing te versnellen werd Multi-Grid toegepast. Het schema dat reeds in gebruik was, was dat van Osher [9].

Voor een medium dat voldoet aan de ideale gaswet zijn de Eulervergelijkingen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho e + p) \end{pmatrix} = 0, \quad (1.1a)$$

of kortweg:

$$q_t + f_x(q) + g_y(q) = 0. \quad (1.1b)$$

waarin $q(x, y, t) = (\rho, \rho u, \rho v, \rho e)^T$ de toestand is die van x, y en t afhangt, en waarin $p = p(q) = (\gamma - 1)(\rho e - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2))$. De grootheden $\rho, \rho u, \rho v$ en ρe noemt men de conservatieve grootheden. Vgl (1.1) geeft drie behoudswetten weer, te weten: de wet van behoud van massa, de wet van behoud van impuls (in x - én y -richting) en de wet van behoud van energie. Deze behoudswetten staan in (1.1) genoteerd in differentiaalvorm, doch in integraalvorm herkent men ze makkelijker. Integratie van (1.1) over een willekeurig, begrensd gebied $\Omega' \subset \Omega$ levert, na toepassing van de integraalstelling van Gauss:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega'} q(x, y, t) dx dy + \int_{\partial\Omega'} (n_1 f + n_2 g) ds = 0, \quad (1.2)$$

waarin (n_1, n_2) de naar buiten gerichte normaal voorstelt ($n_1^2 + n_2^2 = 1$). De grootheid $n_1 f + n_2 g$ is de flux in de richting (n_1, n_2) . Vergelijking (1.2) beschrijft dat de verandering per tijdseenheid van alle conservatieve grootheden uitsluitend wordt veroorzaakt door het transport van die grootheden over de rand $\partial\Omega'$.

Oplossingen van (1.1) hoeven niet noodzakelijk glad te zijn. Voor voldoende gladde oplossingen zijn (1.1) en (1.2) equivalent. Vergelijking (1.2) laat echter ook niet-gladde (niet differentieerbare of zelfs discontinue¹) oplossingen toe. Oplossingen van (1.2) noemt men zwakke oplossingen van (1.1).

In dit werk zijn we slechts geïnteresseerd in oplossingen van (1.2) die voldoen aan $q_t = 0$. Voor de stationaire Eul.vgl'n (dit is: (1.1) met weglating van q_t) definiëert men het residu $R(q)$ als:

$$R(q) = f_x(q) + g_y(q). \quad (1.3)$$

1. Een goede behandeling van schokken (dus discontinuïteiten) kan men vinden in [22].

2. DISCRETISATIE EN NUMERIEKE FLUX

Indien men zelfs op een grof rooster een systeem van behoudswetten wil discretiseren dan is het belangrijk een volledig conservatieve discretisatie te gebruiken. Een makkelijke én effectieve ¹ methode is de eindige-volume-methode. Men verdeelt bij deze methode het integratiegebied Ω in onregelmatige, disjuncte deelgebiedjes Ω_{ij} die topologisch equivalent zijn met rechthoekjes (fig. 1). In ieder deelgebiedje, of cel, wordt de toestand van het medium gerepresenteerd door q_{ij} , het gemiddelde van $q(x,y)$ op Ω_{ij} . De semi-discrete vorm van de naar de plaats gediscetiseerde vergelijkingen wordt zo:

$$\text{opp}(\Omega_{ij}) \frac{d}{dt} q_{ij} + \int_{\partial\Omega_{ij}} (n_1 f + n_2 g) ds = 0, \quad \forall \Omega_{ij} \subset \Omega, \quad (2.1)$$

waarin $n_1 f + n_2 g$ de naar buiten gerichte flux weergeeft. ² Voor een stationaire oplossing op ons rooster wordt vgl (2.1) dan:

$$\sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_{ijk}} (n_1 f + n_2 g) ds = 0 \quad \forall i, j. \quad (2.2)$$

Voor iedere k representeert de integraal over Γ_{ijk} de transportsnelheid van q over de rand Γ_{ijk} van cel Ω_{ij} naar zijn buurcel Ω_{ijk} , ofwel: de flux van Ω_{ij} naar Ω_{ijk} , vermenigvuldigd met de lengte van Γ_{ijk} . In de discretisatie wordt $n_1 f + n_2 g$ benaderd door de zogenaamde numerieke flux $f(q_L, q_R)$. In een eerste orde discretisatie (schema) hangt deze numerieke flux over Γ_{ijk} alléén af van q_{ij} en q_{ijk} , dat wil zeggen: $q_L = q_{ij}$ en $q_R = q_{ijk}$. Indien voor de numerieke flux een zekere keuze wordt gemaakt dan ligt de hele vergelijking vast en dan kan (2.2) formeel geschreven worden als:

$$\begin{aligned} N_h: X_h &\rightarrow Y_h \\ N_h(q_h) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

De ruimte X_h is de (eindig-dimensionale) lineaire ruimte der (fysisch realistische) gemiddelde toestanden in de cellen Ω_{ij} en Y_h is de (eindig-dimensionale) lineaire ruimte die de netto transportsnelheid naar de cellen Ω_{ij} voorstelt. We zien dus dat (2.3) een discreet systeem van niet-lineaire vergelijkingen voorstelt.

Het belang van de numerieke flux moge duidelijk zijn: de vgl (2.3) hangt direct van die numerieke flux af. Zo'n flux moet rekening houden met het feit dat, afhankelijk van de lokale karakteristieken, de flux op Γ_{ijk} op een speciale manier van q_{ij} en q_{ijk} afhangt. In het geval van supersone stroming van Ω_{ij} naar Ω_{ijk} bijvoorbeeld, mag de numerieke flux alléén van q_{ij} afhangen.

Eén manier om de numerieke flux te beschouwen is om de flux-berekening over Γ_{ijk} als een lokaal 1-dimensionaal probleem te beschouwen en het aldus ontstane Riemann-probleem uit de gasdynamica op te lossen, namelijk: bereken de flux op Γ_{ijk} voor $0 \leq t \leq t_0$ met op $t=0$ de beginvoorwaarden dat $q = q_{ij}$ op Ω_{ij} en $q = q_{ijk}$ op Ω_{ijk} . De flux die men nu verkrijgt kan men bij een discretisatie gebruiken en heet het Godunov-schema [6]. Een nadeel van het Godunov-schema is dat die duur is in het gebruik; andere, goedkopere Riemann-oplossers ("Riemann solvers" in Eng.) bestaan óók. Bekend zijn bijvoorbeeld Osher [9] en Van Leer [12]. Hier richten we onze aandacht op Steger & Warming [1] en Roe [3].

Bij het kiezen van een numerieke flux die gebaseerd is op een zekere Riemann oplossing, dienen de volgende voorwaarden te gelden:

1. Continuïteit: $\lim_{\substack{q_L \rightarrow q \\ q_R \rightarrow q}} f(q_L, q_R) = f(q),$
2. de numerieke flux moet schokken opleveren die aan de schokvoorwaarden voldoen,

1. makkelijk: omdat de integraalvorm (1.2) makkelijk is uit te rekenen bij die methode; en efficiënt: omdat het conservatieve karakter behouden blijft.
2. (2.1) laat ook oplossingen toe die niet aan de entropie conditie voldoen; die moet dus eigenlijk nog apart worden vermeld.

3. de numerieke flux moet alleen fysisch relevante schokken opleveren, dus schokken die aan de entropie-conditie voldoen,
4. de numerieke flux moet niet-lineaire stabiliteit opleveren.
5. optioneel: de numerieke flux $f(q_L, q_R)$ moet naar q_L en q_R differentieerbaar zijn, als een Newton methode wordt gebruikt voor het oplossen van (2.3).

3. DE NUMERIEKE FLUX VOLGENS STEGER & WARMING

Beschouw $E(q) := (\text{def.}) n_1 \cdot f(q) + n_2 \cdot g(q)$, dus de flux in de richting (n_1, n_2) . Deze vectorfunctie E is homogeen van de orde 1 in q omdat f en g dat zijn. (cf. appendix A1). Verder definiëren we

$$\begin{aligned} E^+(q) &:= C^+(q) \cdot q \\ E^-(q) &:= C^-(q) \cdot q \end{aligned} \quad (3.1)$$

Duidelijk is nu dat $E(q) = E^+(q) + E^-(q)$ en zo hebben we dus een vectorfunctie gesplitst in een positief en een negatief deel met behulp van het positieve en negatieve deel van z'n Jacobiaan.

Laat twee toestanden q_L en q_R gegeven zijn en zij (n_1, n_2) de richting van de normaal op de wand tussen de twee cellen van q_L en q_R , zodanig dat deze normaal in de cel van q_R wijst. De numerieke flux volgens Steger & Warming is dan gedefinieerd door

$$f_{sw}(q_L, q_R)^{(\text{def.})} := E^+(q_L) + E^-(q_R). \quad (3.2)$$

De achterliggende motivering voor (3.2) is dat de flux over het wandje tussen de cellen van q_L en q_R in principe alleen informatie voelt van het '+'-deel van $E(q_L)$ én van het '-'-deel van $E(q_R)$. Deze numerieke flux f_{sw} is derhalve een upwind-numerical flux.

Om $f_{sw}(q_L, q_R)$ te kunnen analyseren is het voldoende om de vectorfunctie $E(q)$ te analyseren, en, zoals in Appendix A2 wordt aangetoond, kan worden volstaan met $f(q)$. Immers, de functie $E^+(q)$ in (3.2) kan nu worden geschreven als: $T_\phi^{-1} \cdot f^+(T_\phi \cdot q)$ waarbij f^+ wordt gedefinieerd met behulp van het positieve gedeelte van de Jacobiaan van f , dus $f^+(q) = A^+(q) \cdot q$.

Om $f^+(q)$ en $f^-(q)$ te kunnen beschouwen kan $f(q) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(\rho e + p))^T$ het beste gesplitst worden in drie afzonderlijke vectorfuncties, die ieder apart geassocieerd kunnen worden met een verschillende eigenwaarde.

Laat r_1, r_2, r_3, r_4 de rechter eigenvectoren van $A(q)$ zijn, behorende bij resp. $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = \lambda_3 = u$ en $\lambda_4 = u + c$, en laat s_i de linkereigenvector zijn bij λ_i . Met behulp van deze eigenwaarden, linker-eigenvectoren en rechter-eigenvectoren definiëren we $f_1(q), f_2(q)$ en $f_3(q)$ door:

$$\begin{aligned} f_1(q) &:= (\lambda_1 r_1 s_1^T) \cdot q &:= A_1(q) \cdot q &:= \lambda_1 \cdot (s_1^T q) \cdot r_1 \\ f_2(q) &:= (\lambda_2 r_2 s_2^T + \lambda_3 r_3 s_3^T) \cdot q &:= A_2(q) \cdot q &:= \lambda_2 [(s_2^T q) \cdot r_2 + (s_3^T q) \cdot r_3] \\ f_3(q) &:= (\lambda_4 r_4 s_4^T) \cdot q &:= A_3(q) \cdot q &:= \lambda_4 \cdot (s_4^T q) \cdot r_4 \end{aligned} \quad (3.3)$$

waaruit voor f, f_1, f_2, f_3 en A, A_1, A_2, A_3 volgt:

$$\begin{aligned} f(q) &= \sum_{i=1}^3 f_i(q) \\ A(q) &= \sum_{i=1}^3 A_i(q). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Uitwerken van $f_i(q)$ ($i=1,2,3$) levert de volgende vormen op:

$$\begin{aligned} f_1(q) &= \lambda_1 \cdot \rho / 2\gamma \cdot r_1 \\ f_2(q) &= \lambda_2 \cdot \rho(\gamma - 1) / \gamma \cdot r_2 \\ f_3(q) &= \lambda_4 \cdot \rho / 2\gamma \cdot r_4 \end{aligned} \quad (3.5a)$$

met

$$\begin{aligned} r_1 &= (1, u - c, v, h - uc)^T, \\ r_2 &= (1, u, v, 1/2(u^2 + v^2))^T, \\ r_4 &= (1, u + c, v, h + uc)^T. \end{aligned} \quad (3.5b)$$

De functies $f_i^\pm(q)$ verkrijgt men uit $f_i(q)$ door λ_i te vervangen door $\lambda_i^\pm$; de functies $f_i^\pm(q)$ vindt men nu weer door te gebruiken dat

$$f_i^+(q) = \sum_{i=1}^3 f_i^+(q) \quad \text{en} \quad f_i^-(q) = \sum_{i=1}^3 f_i^-(q).$$

De numerieke flux volgens Steger & Warming ligt nu geheel vast omdat $f_i^+(q)$ en $f_i^-(q)$ bekend zijn. Bij vele numerieke oplos-methoden van de Eul.vgln. (bijv. de Newton-methode) zijn de Jacobiaanen $\partial f_{sw}/\partial q_L$ en $\partial f_{sw}/\partial q_R$ vereist; expliciete uitdrukkingen hiervoor kan men vinden in Appendix A3.

De numerieke flux volgens Steger & Warming is continu in q_L en q_R zoals men aan (3.5a) en (3.5b) kan zien, en voldoet derhalve aan voorwaarde 1. De flux f_{sw} is differentieerbaar naar q_L en q_R waardoor ook aan voorwaarde 5. voldaan is. De voorwaarden 2., 3., en 4. zijn moeilijker te controleren. Onderzoek hiernaar is te vinden in [1]. Bij een Newton-methode is het gewenst (doch niet strikt noodzakelijk!) dat f_{sw} continu differentieerbaar is naar zijn beide argumenten. Aan (3.5a) ziet men direct dat $f_{sw}(q_L, q_R)$ niet continu differentieerbaar is naar q_L en q_R omdat $\lambda_i^\pm$ dat niet is, namelijk in $\lambda_i = 0$. In [1] wordt daarom voorgesteld om $\lambda_i^\pm$ te vervangen door $\hat{\lambda}_i^\pm$, met:

$$\hat{\lambda}_i^\pm := \frac{1}{2} \lambda_i \pm \sqrt{\lambda_i^2 + \epsilon^2}, \quad \epsilon > 0. \quad (3.6)$$

De functie $\hat{\lambda}_i^\pm$ is wél continu differentieerbaar naar λ_i . (Zie ook figuur 2) Het verschil $|\hat{\lambda}_i^\pm - \lambda_i^\pm|$ wordt voor steeds kleinere ϵ óók steeds kleiner, doch voor steeds kleinere ϵ begint de functie $\partial \hat{\lambda}_i^\pm / \partial \lambda_i$ steeds minder glad te worden, wat voor een Newton-methode nadelig kan zijn. De parameter ϵ moet dus zodanig gekozen worden dat tussen het voordeel ($\partial \hat{\lambda}_i^\pm / \partial \lambda_i$ glad voor een grotere ϵ) en het nadeel ($|\hat{\lambda}_i^\pm - \lambda_i^\pm|$ groter bij grotere ϵ) een gunstig compromis wordt gevonden. De functies $\hat{f}_{i,\epsilon}^\pm(q)$ definiëren we nu als de $f_i^\pm(q)$ maar dan met $\hat{\lambda}_i^\pm$ in plaats van $\lambda_i^\pm$. De numerieke flux die met $\hat{f}_i^\pm(q)$ ontstaat noemen we $f_{sw}^{(\epsilon)}$.

Resultaten zoals die met behulp van f_{sw} en $f_{sw}^{(\epsilon)}$ werden verkregen kan men vinden in § 5 e.v. Het schema van Steger & Warming behoort tot de klasse der 'flux-vector-splitting' schema's [13].

4. DE NUMERIEKE FLUX VOLGENS ROE

We beschouwen eerst een begin-waarde probleem van een hyperbolisch systeem van behouds-vergelijkingen en zoeken dus een vector $u(x, t)$ zodat:

$$\begin{cases} u_t + F_x(u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (4.1)$$

Hierin is F een vector-functie van u en de Jacobiaan $A = \partial F / \partial u$ heeft slechts reële eigenwaarden. Verder maken we van (4.1) een Riemann probleem door te eisen:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &\equiv u_L \quad \text{voor } x < 0, \\ u(x, 0) &\equiv u_R \quad \text{voor } x > 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Als discrete representatie van dit Riemann probleem gebruiken we u_i^n als een benadering van $u(x_i = x_0 + i\Delta x, t_n = t_0 + n\Delta t)$. Godunov loste het gediscretiseerde Riemann-probleem exact op onder aanname dat op het interval $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$ de oplossing constant was.

In de methode van Roe [3] wordt de exacte oplossing van het benaderende probleem (4.3) gezocht.

$$u_t + \tilde{A} \cdot u_x = 0 \quad (4.3)$$

Daarin wordt $\tilde{A}$ dan constant genomen en u_L en u_R uit (4.2) blijven voor dit nieuwe probleem ongewijzigd. De moeilijkheid is dat $\tilde{A}$ zó moet worden gekozen dat lokale eigenschappen van de (exacte) oplossing van (4.1) en (4.2) zo goed mogelijk worden gerepresenteerd. We accepteren daarom alléén $A(u_L, u_R)$ die voldoen aan:

1. $\tilde{A}(u_L, u_R) \cdot u$ is een lineaire afbeelding van u naar F
2. $\lim_{\substack{u_L \rightarrow u \\ u_R \rightarrow u}} A(u_L, u_R) = A(u) = \partial F(u) / \partial u$
3. Voor alle u_L, u_R moet gelden: $\tilde{A}(u_L, u_R) \cdot (u_L - u_R) = F(u_L) - F(u_R)$
4. De eigenvectoren van $A(u_L, u_R)$ zijn lineair onafhankelijk

(4.4)

De eisen 3. en 4. uit (4.4) worden gerechtvaardigd door het volgende. Stel dat er een (u_L, u_R) -paar is dat voldoet aan de volgende schokgolfrelatie:

$$F(u_L) - F(u_R) = S(u_L - u_R) \quad (4.5)$$

voor zekere $S \in \mathbb{R}$. Uit 3. (4.4) volgt nu dat S een eigenwaarde is van $\tilde{A}(u_L, u_R)$. De projectie van $u_L - u_R$ op de eigenvectoren van $\tilde{A}$ zal dus alleen een projectie ervan op die eigenvector van $\tilde{A}$ zijn die behoort bij de eigenwaarde S . (volgens 4!). In dit geval is de oplossing van het Riemann-probleem exact.

Voorwaarde 2. van (4.4) waarborgt een gladde oplossing daar waar de oplossing glad hoort te zijn.

AFLEIDING VAN $f_{roe}(u_L, u_R)$ INDIEN $\tilde{A}$ BEKEND IS.

De toename per tijdseenheid van u op het interval $(x_i, x_i + \frac{1}{2})$ wordt gegeven door $F(u_L) - f_{roe}(u_L, u_R)$ en volgens (4.3) moet dit gelijk zijn aan $\tilde{A} \cdot u_L - (A^+ \cdot u_L + A^- \cdot u_R)$. (fig. 3). De laatste term ontstaat door $A \cdot u_L$ en $\tilde{A} \cdot u_R$ in 'upwind'-delen te splitsen. Met behulp van eis 3. uit (4.4) vindt voor $f_{roe}(u_L, u_R)$: (cf. [8], vgl (2.1) e.v.)

$$f_{roe}(u_L, u_R) = \frac{1}{2} \{ F(u_L) + F(u_R) + |\tilde{A}(u_L, u_R)| \cdot (u_L - u_R) \} \quad (4.6)$$

CONSTRUCTIE VAN $\tilde{A}$ VOOR DE EULERVERGELIJKINGEN.

Indien de matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{ij}$ voldoet aan:

$$F_i(u_L) - F_i(u_R) = \sum_j \tilde{a}_{ij} [(u_L)_j - (u_R)_j] \quad (4.7)$$

(dit is dus voorwaarde 3.) dan moeten de waarden $\tilde{a}_{ij}$ nu gevonden worden. Aan voorwaarde 1. is ook voldaan. Voorwaarde 2. is echter minder triviaal. In de Euler-vergelijking zal $\tilde{a}_{ij}$ worden geconstrueerd door een nieuwe vector, een parameter-vector, in te voeren.

We herhalen de Euler-vergelijkingen nogmaals, zoals deze in §1 waren gepresenteerd, namelijk:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho e + p) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

en definiëren nu een nieuwe vector w , een parameter-vector, door:

$$w = \sqrt{\rho} \cdot (1, u, v, h)^T. \quad (4.9)$$

Met deze w zijn alle elementen van de vectoren $q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho e)^T$ en $f(q)$ en $g(q)$ homogeen van de orde 2 in de elementen van w . Doordat de Eul.vgln rotatie-invariant zijn (appendix A3) richten we

ons vanaf nu alleen op $f(q)$ i.p.v. op $f(q)$ én $g(q)$. Met de definities: $w_i := w \cdot e_i$, $q_i := q \cdot e_i$ en $f_i := f(q) \cdot e_i$ (dus: i als index selecteert het i -e element; e_i is de i^e eenheidsvector.) kan men afleiden dat:

$$\begin{cases} q_1 = w_1^2 \\ q_2 = w_1 w_2 \\ q_3 = w_1 w_3 \\ q_4 = \frac{1}{\gamma} w_1 w_4 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} (w_2^2 + w_3^2) \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 = w_1 w_2 \\ f_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma} w_1 w_4 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} w_2^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} w_3^2 \\ f_3 = w_2 w_3 \\ f_4 = w_2 w_4 \end{cases} \quad (4.10)$$

Voor willekeurige scalair p en q leidt men af dat $\Delta(p+q) = \Delta p + \Delta q$ en $\Delta(pq) = \bar{p} \cdot \Delta q + \bar{q} \cdot \Delta p$. Hiervan gebruik makend leidt (4.10) tot:

$$\Delta q = \tilde{B} \cdot \Delta w = \begin{bmatrix} 2\bar{w}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{w}_2 & \bar{w}_1 & 0 & 0 \\ \bar{w}_3 & 0 & \bar{w}_1 & 0 \\ \frac{1}{\gamma} \bar{w}_1 & \frac{\gamma-1}{\gamma} \bar{w}_2 & \frac{\gamma-1}{\gamma} \bar{w}_3 & \frac{1}{\gamma} \bar{w}_1 \end{bmatrix} \Delta \bar{w}, \quad (4.11a)$$

$$\Delta f(q) = \tilde{C} \cdot \Delta w = \begin{bmatrix} \bar{w}_2 & \bar{w}_1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} \bar{w}_4 & \frac{\gamma+1}{\gamma} \bar{w}_2 & \frac{1-\gamma}{\gamma} \bar{w}_3 & \frac{\gamma-1}{\gamma} \bar{w}_1 \\ 0 & \bar{w}_3 & \bar{w}_2 & 0 \\ 0 & \bar{w}_4 & 0 & \bar{w}_2 \end{bmatrix} \Delta w. \quad (4.11b)$$

In de matrices $\tilde{B}$ en $\tilde{C}$ staan alleen gemiddelden van w_L en w_R . Om de eigenwaarden te kennen van $\tilde{A}$, gedefinieerd door $\Delta f = \tilde{A} \cdot \Delta q$, moet worden opgelost: $(\tilde{C}\tilde{B}^{-1} - \lambda I) \cdot \Delta q = 0$ wat equivalent is met $(\tilde{C} - \lambda \tilde{B}) \cdot \Delta w = 0$. Aannemend dat $\bar{w}_1 > 0$ (en in de fysica ziet men dat dit realistisch is omdat $\rho > 0$) komt dit neer op:

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_2 - 2\lambda \bar{w}_1 & \bar{w}_1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} \bar{w}_4 - \lambda \bar{w}_2 & \frac{\gamma+1}{\gamma} \bar{w}_2 - \lambda \bar{w}_1 & -\frac{(\gamma-1)}{\gamma} \bar{w}_3 & \frac{\gamma-1}{\gamma} \bar{w}_1 \\ -\lambda \bar{w}_3 & \bar{w}_3 & \bar{w}_2 - \lambda \bar{w}_1 & 0 \\ -\frac{\lambda}{\gamma} \bar{w}_4 & \bar{w}_4 - \lambda \frac{\gamma-1}{\gamma} \bar{w}_2 & -\lambda \frac{\gamma-1}{\gamma} \bar{w}_3 & \bar{w}_2 - \frac{\lambda}{\gamma} \bar{w}_1 \end{bmatrix} \cdot \Delta w = 0. \quad (4.12)$$

Nu introduceren we u_m, v_m en h_m als de u, v en h van een nieuwe toestand, die uit w_L en w_R (en dus uit q_L en q_R) ontstaan door:

$$\begin{cases} u_m = \bar{w}_2 / \bar{w}_1 = (\sqrt{\rho_L} \cdot u_L + \sqrt{\rho_R} \cdot u_R) / (\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}) \\ v_m = \bar{w}_3 / \bar{w}_1 = (\sqrt{\rho_L} \cdot v_L + \sqrt{\rho_R} \cdot v_R) / (\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}) \\ h_m = \bar{w}_4 / \bar{w}_1 = (\sqrt{\rho_L} \cdot h_L + \sqrt{\rho_R} \cdot h_R) / (\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}). \end{cases} \quad (4.13)$$

Herschrijven van (4.12) met behulp van (4.13) levert dan op:

$$\begin{pmatrix} u_m - 2\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} h_m - u_m \lambda & \frac{\gamma+1}{\gamma} u_m - \lambda & -\frac{(\gamma-1)}{\gamma} v_m & \frac{\gamma-1}{\gamma} \\ -v_m \lambda & v_m & u_m - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{\gamma} h_m \lambda & h_m - \frac{\gamma-1}{\gamma} u_m \lambda & -\frac{(\gamma-1)}{\gamma} v_m \lambda & u_m - \frac{\lambda}{\gamma} \end{pmatrix} \Delta w = 0. \quad (4.14)$$

De determiniant van (4.14) levert het volgende karakteristieke polynoom:

$$\begin{aligned} (u_m - \lambda)^2 \{ (\lambda - u_m)^2 - (\gamma - 1)(h_m^2 - \frac{1}{2}(u_m^2 + v_m^2)) \} &= 0 \\ \Leftrightarrow (u_m - \lambda)^2 \cdot [(\lambda - u_m)^2 - c_m^2] &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

De grootheid c_m wordt gedefinieerd door (4.15). De eigenwaarden van $\tilde{A}$ zijn derhalve $u_m - c_m$, $u_m(2\times)$ en $u_m + c_m$. De matrix $\tilde{A}$ kan dus beschouwd worden als een functie in q_m , een nieuwe toestand die afhangt van q_L en q_R en waarvan u, v en h de gewogen gemiddelden zijn van $(u_L, u_R), (v_L, v_R)$ en (h_L, h_R) , met als gewicht de wortel van de dichtheid.¹ Na enig rekenen vindt men dat de matrix A de volgende eigenvectormatrix heeft:

$$R_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ u_m - c_m & 0 & u_m & u_m + c_m \\ v_m & 1 & v_m & v_m \\ h_m - u_m c_m & v_m & \frac{1}{2}(u_m^2 + v_m^2) & h_m + u_m c_m \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Deze kolommen van de matrix R_m zijn dus de eigenvectoren van de matrix $\tilde{A}$. Deze matrix is van een bekende vorm (zie A1.14) en daarom is R^{-1} direct bekend (zie A1.16), namelijk

$$S_m := R_m^{-1} = \frac{1}{c_m^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\beta l_m^2 + \frac{1}{2}u_m c_m & -\beta u_m - \frac{1}{2}c_m & -\beta v_m & \beta \\ -v_m c_m^2 & 0 & c_m^2 & 0 \\ -\beta l_m^2 + c_m^2 & 2\beta u_m & 2\beta v_m & -2\beta \\ \frac{1}{2}\beta l_m^2 - \frac{1}{2}u_m c_m & -\beta u_m + \frac{1}{2}c_m & -\beta v_m & \beta \end{pmatrix} \quad (4.17a)$$

waarin

$$l_m^2 = u_m^2 + v_m^2, \quad \beta = \frac{1}{2}(\gamma - 1). \quad (4.17b)$$

De matrix $\tilde{A}$ is nu geheel bekend omdat $\tilde{A} = R_m \Lambda_m R_m^{-1}$, met $\Lambda_m = \text{diag}(u_m - c_m, u_m, u_m, u_m + c_m)$. Inderdaad voldoet $\tilde{A}$ aan de vier gestelde eisen van (4.4). Met behulp van (4.6), (4.13) en (4.15) t/m (4.17) ligt de numerieke flux van Roe nu dus geheel vast.

Evenals bij de numerieke flux van Steger & Warming zijn we hier geïnteresseerd in de Jacobiaan $\partial f_{roe}/\partial q_L$ en $\partial f_{roe}/\partial q_R$. Uit de constructie van $\tilde{A}$ blijkt dat deze Jacobianen van een veel complexere vorm zijn dan hun analoga bij Steger & Warming. Tijdens de berekeningen bleek ook dat de berekening van de Jacobianen het meest tijdrovend was. Voor een uitwerking van de matrices wordt verwezen naar appendix A4.

Voor zover bekend is de numerieke flux van Roe alleen gebruikt in tijdstapmethoden; de resultaten

1. De nieuwe dichtheid ρ_m , die hier niet vermeld staat, is $(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})/(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}) = 1 = \rho_m!$

die in dit werk met f_{roe} werden verkregen vertoonden dezelfde orde van nauwkeurigheid als die met f_{osher} . Voor een behandeling van die resultaten zij verwezen naar § 5. De numerieke flux volgens Roe behoort, evenals die van Osher, tot de klasse der 'flux-vector-difference-splitting' fluxes. (cf. [12], inleiding).

Onderzoek naar het goed herkennen van schokken is verricht in [5].

5. TESTRESULTATEN

In dit werk werden proeven uitgevoerd met de volgende schema's: Osher (welke reeds in gebruik was!), Steger en Warming, Steger en Warming met de parameter $\epsilon \neq 0$ en Roe. De proef bestond uit het doorrekenen van een subsonic instroming in het kanaal van figuur 7; de exacte vorm kan men vinden in appendix (A5) en dit model is ontleend aan [17]. Op de inlaat werden drie randvoorwaarden opgelegd, op de uitlaat één. Als instroomsnelheid u werd steeds $0,85c$ genomen (met c = geluidssnelheid). De hoogte van de bobbel op de vaste wand was maximaal 0.042 bij een kanaalhoogte van 2. Dit is in de praktijk voldoende om boven de bobbel een supersoon gebied te krijgen.

De berekeningen toonden aan dat Osher en Roe nagenoeg gelijke resultaten gaven. Het schema van Steger & Warming gaf echter geheel andere, onverwachte resultaten, óók bij het gebruik van de parameter ϵ . (cf.: vgl (3.6)). Opvallend was dat de oplossing die verkregen werd met Steger & Warming nergens supersoon was, terwijl de schema's van Osher en Roe wél een supersoon gebied in hun oplossing opleverden. Voor de druk langs de wand met de bobbel had dit nogal belangrijke consequenties zoals te zien is in figuur 4a. Hierin staat c_p uitgezet tegen de plaats op de wand. Men berekent $c_p(x,y)$ als volgt:

$$c_p(x,y) = \frac{p(x,y) - p_{ref}}{\frac{1}{2} \gamma p_{ref} M_{ref}^2}, \quad (5.1)$$

waarin p_{ref} en M_{ref} respectievelijk een referentiedruk en een referentie Machgetal zijn. De oorzaak van dit relatief grote verschil tussen de resultaten van Osher en Roe enerzijds en Steger en Warming anderzijds is tot nu toe onverklaarbaar gebleven.

Ook de convergentiefactoren van de twee schema's leverden een groot verschil op: Osher en Roe leverden convergentiefactoren op die van dezelfde orde van grootte waren doch het schema van S.W. leverde (ook bij variërende ϵ -waarden) een veel slechtere convergentie. (Zie tabel 2).

De rekentijden waren zoals verwacht werd: Roe had 3 x zoveel tijd nodig als Osher en S.W., wat te verwachten was: voor het berekenen van de partiële afgeleiden moet in het geval van Roe zeer veel rekenwerk worden verricht. (Vgl. Appendix A3 met A4!).

6. CONCLUSIE

De moeite die bij de constructie van het schema van Roe is gestoken in het realiseren van de eis 3 (4.4) is niet voor niets geweest: de resultaten vertoonden een mooie schok dáár waar deze hoorde te zitten en ze kwamen nagenoeg overeen met de resultaten die waren verkregen met het schema van Osher (waarvan reeds bekend was dat deze zeer goed waren!).

Het schema van Roe is echter zeer arbeidsintensief en kost zeer veel computertijd ten opzichte van Osher en is derhalve minder convergent per tijdseenheid van rekenen. Daarentegen is het schema van S.W. erg goedkoop in het gebruik en zeer makkelijk te begrijpen doch levert hier slechte resultaten af, uitgedrukt in de kwaliteit van de verkregen oplossing: het supersone gebied is niet aanwezig terwijl dat er wél is in de oplossing van Osher en Roe! Dit is een kwalijke zaak: van twee of meer numerieke schema's moet men kunnen verwachten dat ze kwalitatief gelijke resultaten af zullen leveren; de oorzaak van de genoemde afwijkingen is onbekend.

7. REFERENTIES

- [1] STEGER, J.L., WARMING, R.F., "Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with applications to finite-difference methods", J. of. Comp. Physics 40, pp. 263-293, 1981
- [2] STEGER, J.L., "A preliminary study of relaxation methods for the inviscid conservative equations using flux splitting", NASA contractor report 3415
- [3] ROE, P.L., "Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes", J. of Comp. Physics 43, pp. 357-372, 1981
- [4] ROE, P.L., "The use of the Riemann problem in finite difference schemes", Proceedings of the 7th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, 1980, (Reynolds & Mc. Cormac eds.), Springer LNPh 141, pp. 354-359, Springer Verlag, 1981
- [5] BAINES, M.J., "Two dimensional shock recognition and Roe's scheme", Numerical Analysis Report 10/83, Department of mathematics, University of Reading
- [6] GODUNOV, S.K., "A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics", Mat. Sb. (N.S.) 47, 1959, pp. 271-; ook in een Cornell Aeronautical Laboratory vertaling
- [7] OSHER, S., CHAKRAVARTHY, S., "Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometrics", J. of Comp. Physics 50, pp. 447-481, 1983
- [8] OSHER, S., CHAKRAVARTHY, S., "Computing with high resolution - upwind schemes for hyperbolic equations", Lectures in Appl. Math. 22, 1985, pp. 57-86, American Math. Soc.
- [9] OSHER, S., SOLOMON, F., "Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws", Math. Comp. 38, pp. 339-374, 1982
- [10] HEMKER, P.W., SPEKREIJSE, S.P., "Multiple Grid and Osher's scheme for the efficient solution of the steady Euler equations", Rapport NM-R8507, CWI, Amsterdam, 1985
- [11] HEMKER, P.W., SPEKREIJSE, S.P., "Multi Grid solution of the steady Euler equations",
- [12] VAN LEER, B., "Flux-vector splitting for the Euler equations", Proceedings 8th International Conf. on numerical methods in fluid dynamics, Aachen, Juni, 1982, Lecture notes in Physics 170, Springer Verlag
- [13] VAN LEER, B., "On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Enquist-Osher and Roe", ICASE Report nr. 81-11, maart 16, 1981, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1981; verscheen ook in SIAM
- [14] DICK, E., "A multi grid method for Cauchy-Riemann and Steady Euler equations based on flux difference splitting", Department of machinery, State University of Gent
- [15] BRANDT, A., "Multi level adaptive solutions to boundary value problems", Math. of Comp., 31, number 138, april 1977, pp. 333-390
- [16] SPEKREIJSE, S., "Second order accurate upwind solutions of the 2D Euler equations by the use of a defect correction method", Report NM-R8520, september 1985, Amsterdam, CWI
- [17] RIZZI, A., VIVIAND, H., eds., "Numerical methods for the computation of inviscid transsonic flows with shock waves", Proceedings GAMM Workshop, Stockholm, 1979, Vieweg Verlag, 1981
- [18] SCHLICHTING, H., "Boundary layer theory", Mc.Graw-Hill, 1979
- [19] THOMPSON, P.A., "Compressible fluid dynamics", Mc.Graw-Hill, 1972
- [20] LIEPMANN & ROSHKO, "Elements of gasdynamics", John Wiley & Sons, New York etc., 1957
- [21] BATCHELOR, G.K., "An introduction to fluid dynamics", Cambridge University Press, 1967
- [22] LAX, P.D., "Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves"

DANKWOORD

Piet Hemker en Barry Koren ben ik zeer erkentelijk voor hun hulp en geduld tijdens dit onderzoek. Mini Middelberg dank ik voor haar vele en goede typewerk.

Appendix I

DE JACOBIAAN IN DE EULER-VERGELIJKINGEN

In de inleiding zagen we dat de Eulervergelijkingen (2-dimensionaal) kunnen worden geschreven als: $q_t + f_x(q) + g_y(q) = 0$. Een hiermee equivalente vorm verkrijgt men door de functies f en g te differentiëren naar de toestand q , en die matrices ervoor te plaatsen, (dus het gebruik van de kettingregel!), namelijk:

$$q_t + A(q) \cdot q_x + B(q) \cdot q_y = 0, \quad A(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q}, \quad B(q) = \frac{\partial g(q)}{\partial q}. \quad (\text{A1.1})$$

HOMOGENITEIT

De vectorfuncties f en g in de Eulervergelijkingen hebben beide de eigenschap dat ze homogeen zijn in q van de orde 1. Dit houdt in dat:

$$f(\lambda q) = \lambda \cdot f(q), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{A1.2})$$

en analoog voor $g(\lambda q)$. Hieruit volgt dat f (en g) te schrijven zijn als het produkt van hun Jacobiaan en hun argument, q , dus:

$$f(q) = A(q) \cdot q \quad \text{en} \quad g(q) = B(q) \cdot q. \quad (\text{A1.3})$$

ROTATIE VAN HET ASSENSTELSEL

De vgl (A1.1) is geschreven ten opzichte van een cartesisch coördinatenstelsel in x en y . We draaien nu dit assenstelsel over een hoek α en noemen de nieuwe coördinaten x' en y' . (zie figuur 5) Voor x' en y' geldt dus:

$$\begin{cases} x' = cx + sy \\ y' = -sx + cy \end{cases}, \quad \begin{cases} c = \cos(\alpha) \\ s = \sin(\alpha) \end{cases}. \quad (\text{A1.4})$$

Voor de plaatsafgeleides van q krijgen we nu:

$$\begin{cases} q_x = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y'} = cq_{x'} - sq_{y'} \\ q_y = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial y} \cdot \frac{\partial q}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y} \cdot \frac{\partial q}{\partial y'} = sq_{x'} + cq_{y'} \end{cases} \quad (\text{A1.5})$$

en dus ziet (A1.1) er dan ten opzichte van (x', y') uit als:

$$q_t + (c \cdot A + s \cdot B)q_{x'} + (-s \cdot A + c \cdot B)q_{y'} = 0, \quad c^2 + s^2 = 1. \quad (\text{A1.6})$$

Ten opzichte van het nieuwe assenstelsel zijn de Jacobianen een lineaire combinatie van de oude Jacobianen A en B . Verderop in deze appendix zullen de eigenwaarden en eigenvectoren van $c \cdot A + s \cdot B$ berekend worden.

OVERGANG VAN q NAAR w

In (A1.4) t/m (A1.6) veranderden we het coördinatenstelsel. Nu gaan we echter het assenstelsel gelijk laten en de toestandsvector q vervangen door een andere toestandsvector w . Van w eisen we dat die één-éénduidig uit q kan worden berekend. In de Euler-vgl. kan men zich bijvoorbeeld q en w voorstellen als:

$$\begin{cases} q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho e)^T \\ w = (\rho, u, v, p)^T. \end{cases} \quad (\text{A1.7})$$

Omdat geldt: $q_t = q_w \cdot w_t$ (en analoog voor q_x en q_y) wordt vgl. (A1.1) nu:

$$M \cdot w_t + A \cdot M \cdot w_x + B \cdot M \cdot w_y = 0, \quad M = \frac{\partial q}{\partial w} \quad (\text{A1.8})$$

wat equivalent is met

$$w_t + \tilde{A} \cdot w_x + \tilde{B} \cdot w_y = 0 \quad (\text{A1.9a})$$

en

$$\begin{cases} \tilde{A} = M^{-1} \cdot A \cdot M \\ \tilde{B} = M^{-1} \cdot B \cdot M \end{cases} \quad (\text{A1.9b})$$

indien M^{-1} bestaat.

EIGENWAARDEN EN EIGENVECTOREN

Beschouw $C = k \cdot A + l \cdot B$, waarin A en B de Jacobianen uit (A1.1) zijn en $k^2 + l^2 = 1$. Als vector q nemen we $q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho e)^T$, dus de vector der conservatieve variabelen. Van A en B weten we de waarde, namelijk ($w^2 = u^2 + v^2$):

$$A^{(q)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{1}{2}(\gamma-1)w^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 \\ -uh + \frac{1}{2}(\gamma-1)uw^2 & h - (\gamma-1)u^2 & -(\gamma-1)uv & \gamma u \end{pmatrix} \quad (\text{A1.10a})$$

en

$$B^{(q)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ -v^2 + \frac{1}{2}(\gamma-1)w^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ -vh + \frac{1}{2}(\gamma-1)vw^2 & -(\gamma-1)uv & h - (\gamma-1)v^2 & \gamma v \end{pmatrix} \quad (\text{A1.10b})$$

waaruit voor C volgt ($\beta = \frac{1}{2}(\gamma - 1)$):

$$C^{(q)} = \begin{pmatrix} 0 & k & l & 0 \\ -luv - ku^2 + \beta kw^2 & (3-\gamma)ku + lv & lu - 2\beta kv & 2\beta k \\ -kuv - lv^2 + \beta lw^2 & kv - 2\beta lu & (3-\gamma)lv + ku & 2\beta l \\ -kuh - lvh + \beta(ku + lv)w^2 & kh - 2k\beta u^2 - 2\beta luv & lh - 2\beta lv^2 - 2\beta kuv & \gamma(ku + lv) \end{pmatrix}. \quad (A1.10c)$$

De matrices $A^{(q)}$, $B^{(q)}$ en $C^{(q)}$ zijn nogal volle matrices. De ijlere matrices $A^{(w)}$, $B^{(w)}$ en $C^{(w)}$ ontstaan indien men die construeert door een symmetrietransformatie met $M = \partial q / \partial w$:

$$\frac{\partial q}{\partial w} = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ \frac{1}{2}w^2 & \rho u & \rho v & \frac{1}{\gamma-1} \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 \\ \beta w^2 & -2\beta u & -2\beta v & 2\beta \end{pmatrix}. \quad (A1.11)$$

Voor $A^{(w)} = M^{-1} \cdot A^{(q)} \cdot M$, $B^{(w)} = M^{-1} \cdot B^{(q)} \cdot M$ en $C^{(w)} = M^{-1} \cdot C^{(q)} \cdot M$ vindt men, met $z := ku + lv$:

$$A^{(w)} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad B^{(w)} = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \rho c^2 & v \end{pmatrix} \text{ en } C^{(w)} = \begin{pmatrix} z & k\rho & l\rho & 0 \\ 0 & z & 0 & k/\rho \\ 0 & 0 & z & l/\rho \\ 0 & k\rho c^2 & l\rho c^2 & z \end{pmatrix}. \quad (A1.12)$$

De eigenwaarden van $C^{(w)}$, die dezelfde zijn als die van $C^{(q)}$, zijn de nulpunten van de determinant $|C^{(w)} - \lambda \cdot I| = (z - \lambda^2) \cdot [(z - \lambda)^2 - c^2]$ en zijn dus: $z - c, z, z$ en $z + c$. De bijbehorende eigenvectoren zijn de kolommen van de matrix

$$R^{(w)} = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & \rho \\ kc & 0 & -l & kc \\ lc & 0 & k & lc \\ -\rho c^2 & 0 & 0 & \rho c^2 \end{pmatrix}. \quad (A1.13)$$

De eigenvectoren van $C^{(q)}$ kunnen berekend worden uit die van $C^{(w)}$ door middel van de relatie: $R^{(q)} = M \cdot R^{(w)}$. Voeren we deze matrix-vermenigvuldiging uit en delen we de 1^e, 3^e en 4^e kolom van dit produkt door resp. $-\rho, \rho$ en ρ (dat mag omdat een eigenvector vermenigvuldigd mag worden met een scalar) en noemen we de aldus ontstane matrix weer $R^{(q)}$, dan geldt:

$$R^{(q)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ u - kc & u & -l & u + kc \\ v - lc & v & k & v + lc \\ h - zc & \frac{1}{2}w^2 & -lu + kv & h + zc \end{pmatrix}, \quad \det R^{(q)} = \frac{c^4}{\gamma - 1}. \quad (A1.14)$$

De inversen van $R^{(w)}$ en $R^{(q)}$ zijn nu:

$$R^{(w)^{-1}} = \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}kc & \frac{1}{2}lc & -1/2\rho \\ c^2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -lc^2 & kc^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}kc & \frac{1}{2}lc & 1/2\rho \end{bmatrix} \quad (\text{A1.15})$$

en

$$R^{(q)^{-1}} = \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\beta w^2 + \frac{1}{2}zc & -\beta u - \frac{1}{2}kc & -\beta v - \frac{1}{2}lc & \beta \\ -\beta w^2 + c^2 & 2\beta u & 2\beta v & -2\beta \\ (lu - kv)c^2 & -lc^2 & kc^2 & 0 \\ \frac{1}{2}\beta w^2 - \frac{1}{2}zc & -\beta u + \frac{1}{2}kc & -\beta v + \frac{1}{2}lc & \beta \end{bmatrix}. \quad (\text{A1.16})$$

Appendix II

ROTATIE-INVARIANTIE VAN DE EULER-VERGELIJKINGEN

We beschouwen de 2-dimensionale Eul.vgl'n. ten opzichte van een cartesisch coördinatenstelsel met coördinaten (x, y) , dus:

$$q_t + f_x(q) + g_y(q) = 0. \quad (\text{A2.1})$$

Overgang op een nieuw coördinatenstelsel (x', y') door rotatie om de oorsprong, zodat de x' -as in de richting (n_1, n_2) ligt t.o.v. het ongeaccentueerde stelsel levert dan, met behulp van (A1.4):

$$q_t + \frac{\partial}{\partial x'}(n_1 f + n_2 g) + \frac{\partial}{\partial y'}(-n_2 f + n_1 g) = 0. \quad (\text{A2.2})$$

De snelheidsvector $(u, v)^T$ ten opzichte van (x, y) wordt in het nieuwe stelsel $(\tilde{u}, \tilde{v})^T$, met:

$$\tilde{u} = n_1 u + n_2 v, \quad \tilde{v} = -n_2 u + n_1 v. \quad (\text{A2.3})$$

Uitschrijven van (A2.2) levert:

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_{x'}(n_1 \rho u + n_2 \rho v) + \partial_{y'}(-n_2 \rho u + n_1 \rho v) = 0 & (a) \\ \partial_t(\rho u) + \partial_{x'}(n_1 \rho u^2 + n_2 \rho uv + n_1 p) + \partial_{y'}(-n_2 \rho u^2 + n_1 \rho uv - n_2 p) = 0 & (b) \\ \partial_t(\rho v) + \partial_{x'}(n_1 \rho uv + n_2 \rho v^2 + n_2 p) + \partial_{y'}(-n_2 \rho uv + n_1 \rho v^2 - n_1 p) = 0 & (c) \\ \partial_t(\rho e) + \partial_{x'}(n_1 u + n_2 v)(\rho e + p) + \partial_{y'}((-n_2 u + n_1 v)(\rho e + p)) = 0 & (d). \end{cases} \quad (\text{A2.4})$$

In (A2.4) a. en d. zijn direct $\tilde{u}$ en $\tilde{v}$ te herkennen. Uit (A2.4) b. en c. kunnen 2 nieuwe vergelijkingen worden gedistilleerd door lineaire combinaties van beide te nemen. Men vindt dan namelijk, door (A2.4) b. en c. lineair te combineren met de factoren (n_1, n_2) en $(-n_2, n_1)$, de volgende 2 vergelijkingen:

$$\begin{cases} \partial_t(n_1 \rho u + n_2 \rho v) + \partial_{x'}(n_1^2 \rho u^2 + 2n_1 n_2 \rho uv + n_2^2 \rho v^2 + (n_1^2 + n_2^2)p) \\ \quad + \partial_{y'}(-n_1 n_2 \rho u^2 + n_1^2 \rho uv - n_2^2 \rho uv + n_1 n_2 \rho v^2) = 0 \\ \partial_t(-n_2 \rho u + n_1 \rho v) + \partial_{x'}(-n_1 n_2 \rho u^2 - n_2^2 \rho uv + n_1^2 \rho uv + n_1 n_2 \rho v^2) \\ \quad + \partial_{y'}(n_2^2 \rho u^2 - 2n_1 n_2 \rho uv + n_1^2 \rho v^2 + (n_1^2 + n_2^2)p) = 0. \end{cases} \quad (\text{A2.5})$$

In de laatste twee vgl'n. is nu ook $\tilde{u}$ terug te vinden, evenals $\tilde{v}$. Met behulp van $n_1^2 + n_2^2 = 1$ en (A2.5) is

(A2.2) nu dus te schrijven als:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \tilde{u} \\ \rho \tilde{v} \\ \rho e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x'} \begin{bmatrix} \rho \tilde{u} \\ \rho \tilde{u}^2 + p \\ \rho \tilde{u} \tilde{v} \\ \tilde{u}(\rho e + p) \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y'} \begin{bmatrix} \rho \tilde{v} \\ \rho \tilde{u} \tilde{v} \\ \rho \tilde{v}^2 + p \\ \tilde{v}(\rho e + p) \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{A2.6})$$

We zien dat de Eul.vgln. ten opzichte van het nieuwe coördinatenstelsel (x', y') er precies zo uitzien als de Eul.vgln. ten opzichte van (x, y) , mits $\tilde{u}$ en $\tilde{v}$ worden ingevoerd. (Fysisch behelst dit het feit dat iedere waarnemer een medium moet zien dat aan de behoudswetten voldoet!) Deze eigenschap noemt men de rotatie-invariantie van de Eul.vgln.

De rotatie-invariantie (van de Eul.vgln.) kan ook anders worden geformuleerd (cf. [19]). Zij $\phi \in \mathbb{R}$ zó dat: $n_1 = \cos \phi$ én $n_2 = \sin \phi$; definiëer de rotatie-matrix T_ϕ :

$$T_\phi := (\text{def.}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & -n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{en dus: } T_\phi^{-1} = T_\phi^T) \quad (\text{A2.7})$$

De rotatie-invariantie van de Eul.vgln. kan met behulp van T_ϕ beschreven worden door:

$$n_1 \cdot f(q) + n_2 \cdot g(q) = T_\phi^{-1} \cdot f(T_\phi \cdot q). \quad (\text{A2.8})$$

Uit (A2.8) leiden we af dat alle eigenschappen van $n_1 f(q) + n_2 g(q)$ overeenkomen met de eigenschappen van $f(\cdot)$; allerlei kwalitatieve analyses van $E(q) = n_1 \cdot f(q) + n_2 \cdot g(q)$ (zie § 3) kunnen dus beperkt worden tot $f(q)$.

Een tweede voordeel van (A2.8) kan men terugvinden in de berekening van (2.2) uit § 2. Beschouw Γ_{ij2} uit figuur 6. ($\Gamma_{ijk}, k=1,3,4$ kan men analoog behandelen). Laat de x' -as loodrecht op Γ_{ij2} staan, wijzend naar Ω_{ij2} , en laat de vector $(1,0)^T$ in (x', y') overeenkomen met de vector $(n_1, n_2)^T$ in (x, y) . De flux over Γ_{ij2} berekent men in het continue/analytische geval met behulp van

$$\int_{\Gamma_{ij2}} n_1 f(q) + n_2 g(q) ds. \quad (\text{A2.9})$$

Volgens (A2.8) kan dit geschreven worden als

$$T_\phi^{-1} \cdot \int_{\Gamma_{ij2}} f(T_\phi \cdot q) ds. \quad (\text{A2.10})$$

Omdat Γ_{ij2} (en in het algemeen alle Γ_{ijk}) een rechte wand is, een rechte lijn in $\mathbb{R}^2$, kan men, indien men overgaat op het discrete geval en aanneemt dat q stuksgewijs constant is op alle Ω_{ij} , de vorm (A2.10) omwerken tot

$$T_\phi^{-1} \cdot f_{num}(T_\phi \cdot q_{ij}, T_\phi \cdot q_{ij2}) \cdot \Delta s \quad (\text{A2.11})$$

waarin Δs de lengte is van het wandje Γ_{ij2} , $f_{num}(\cdot, \cdot)$ een bepaalde numerieke flux is die men gebruikt en q_{ij2} de (discrete) toestand is in $\Omega_{ij2} = \Omega_{i,j+1}$.

Appendix III

DE AFGELEIDEN VAN $f_{sw}(q_L, q_R)$ NAAR ZIJN ARGUMENTEN

Bij de hier gebruikte programmatuur die gebruik maakte van f_{sw} werd steeds de toestand uitgedrukt in $(u, v, c, z)^T$ in plaats van in $(\rho, \rho u, \rho v, \rho e)^T$. Daarom wordt nu $\partial f_{sw} / \partial q$ berekend met $q = (u, v, c, z)^T$.

We herhalen $\hat{f}_i^\pm(q)$ nu weer:

$$\begin{aligned}\hat{f}_1^\pm(q) &= \hat{\lambda}_1^\pm \alpha_1 (1, u - c, v, h - uc)^T, \alpha_1 = \rho/2\gamma \\ \hat{f}_2^\pm(q) &= \hat{\lambda}_2^\pm \alpha_2 (1, u, v, \frac{1}{2}(u^2 + v^2))^T, \alpha_2 = \rho(\gamma - 1)/\gamma \\ \hat{f}_3^\pm(q) &= \hat{\lambda}_3^\pm \alpha_3 (1, u + c, v, h + uc)^T, \alpha_3 = \rho/2\gamma.\end{aligned}\quad (A3.1)$$

Blijkbaar kan $\hat{f}_i^\pm(q)$ geschreven worden als $\hat{\lambda}_i^\pm \cdot \alpha_i \cdot t_i$, waarbij t_i gedefinieerd wordt door (A3.1). Definiëer nu de volgende differentiaal-operator:

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial c}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (A3.2)$$

Dan vindt men voor $\nabla \hat{f}_i^\pm(q)$ de volgende uitdrukking:

$$\nabla \hat{f}_i^\pm(q) = \hat{\lambda}_i^\pm \cdot \alpha_i \cdot \nabla t_i + \hat{\lambda}_i^\pm \cdot t_i \cdot \nabla \alpha_i + \alpha_i \cdot t_i \cdot \nabla \hat{\lambda}_i^\pm. \quad (A3.3)$$

Maken we nu gebruik van de relaties $\nabla h = (u, v, \frac{2c}{\gamma-1}, 0)$ en $\nabla \rho = \frac{\rho}{\gamma-1} (0, 0, \frac{2}{c}, -1)$ dan vinden we voor $\nabla t_i, \nabla \alpha_i$ en $\nabla \hat{\lambda}_i^\pm$:

$$\nabla t_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ u-c & v & c/\beta-u & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla t_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ u & v & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla t_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ u+c & v & c/\beta+u & 0 \end{bmatrix}, \quad (A3.4)$$

$$\nabla \alpha_1 = \frac{1}{2\gamma} \cdot \nabla \rho, \quad \nabla \alpha_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \nabla \rho, \quad \nabla \alpha_3 = \frac{1}{2\gamma} \cdot \nabla \rho, \quad (A3.5)$$

$$\nabla \hat{\lambda}_1^\pm = \frac{d\hat{\lambda}_1^\pm}{d\lambda_1} \cdot \nabla \lambda_1, \quad \nabla \hat{\lambda}_2^\pm = \frac{d\hat{\lambda}_2^\pm}{d\lambda_2} \cdot \nabla \lambda_2, \quad \nabla \hat{\lambda}_3^\pm = \frac{d\hat{\lambda}_3^\pm}{d\lambda_3} \cdot \nabla \lambda_3, \quad (A3.6)$$

$$\nabla \lambda_1 = (1, 0, -1, 0), \quad \nabla \lambda_2 = (1, 0, 0, 0), \quad \nabla \lambda_3 = (1, 0, 0, 0) \quad (A3.7)$$

Uitwerken van (A3.4) t/m (A3.7) levert tenslotte op:

$$\nabla \hat{f}_1^\pm = \hat{\lambda}_1^\pm \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ u-c & v & c/\beta-u & 0 \end{pmatrix} + \quad (\text{A3.8a})$$

$$\hat{\lambda}_1^\pm \cdot [o, o, \frac{\partial \alpha_1}{\partial c} \cdot t_1, \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \cdot t_1] + \alpha_1 \cdot [\frac{\partial \hat{\lambda}_1^\pm}{\partial u} \cdot t_1, o, \frac{\partial \hat{\lambda}_1^\pm}{\partial c} \cdot t_1, o],$$

$$\nabla \hat{f}_2^\pm = \hat{\lambda}_2^\pm \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ u & v & 0 & 0 \end{pmatrix} + \quad (\text{A3.8b})$$

$$\hat{\lambda}_2^\pm \cdot [o, o, \frac{\partial \alpha_2}{\partial c} \cdot t_2, \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \cdot t_2] + \alpha_2 \cdot [\frac{\partial \hat{\lambda}_2^\pm}{\partial u} \cdot t_2, o, o, o],$$

$$\nabla \hat{f}_3^\pm = \hat{\lambda}_3^\pm \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ u+c & v & c/\beta+u & 0 \end{pmatrix} + \quad (\text{A3.8c})$$

$$\hat{\lambda}_3^\pm \cdot [o, o, \frac{\partial \alpha_3}{\partial c} \cdot t_3, \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} \cdot t_3] + \alpha_3 \cdot [\frac{\partial \hat{\lambda}_3^\pm}{\partial u} \cdot t_3, o, \frac{\partial \hat{\lambda}_3^\pm}{\partial c} \cdot t_3, o].$$

Hierbij moet men nog de volgende relaties gebruiken:

$$\frac{\partial \hat{\lambda}_i^\pm}{\partial u} = \frac{d \hat{\lambda}_i^\pm}{d \lambda_i} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} ; \quad \frac{\partial \hat{\lambda}_i^\pm}{\partial c} = \frac{d \hat{\lambda}_i^\pm}{d \lambda_i} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial c}.$$

Appendix IV

DE AFGELEIDEN VAN $f_{roe}(q_L, q_R)$ NAAR ZIJN ARGUMENTEN

Evenals in appendix A3 zal hier gedifferentieerd worden naar $(u, v, c, z)_L^T$ en $(u, v, c, z)_R^T$. Uit vgl.(4.6) zien we dat we alleen nog maar $\partial(|\tilde{A}| \cdot (q_L - q_R))/\partial q_L$ en $\partial(|\tilde{A}| \cdot (q_L - q_R))/\partial q_R$ dienen te bepalen daar $\partial f(q_L)/\partial q_L$ en $\partial f(q_R)/\partial q_R$ reeds bekend zijn. (cf. A1.10.a) (Merk op dat voor $F(u_L)$ en $F(u_R)$ in het geval van de Eulervergelijkingen $f(q_L)$ respectievelijk $f(q_R)$ moet worden gesubstitueerd in (4.6)).

Van de matrix $\tilde{A}(q_L, q_R) = (\tilde{a}_{ij})$ zijn de eigenwaarden $\lambda_1 = u_m - c_m$, $\lambda_2 = \lambda_3 = u_m$ en $\lambda_m = u_m + c_m$. (cf. vgl. (4.15) en verder.) Zij $R_m = (r_{ij})$ de matrix der eigenvectoren van $\tilde{A}$ (zie (4.16)) en zij $S_m = (s_{ij})$ de inverse van R_m . Omdat $\tilde{A}$ ook te schrijven is als $R_m \Lambda_m S_m$ geldt:

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^4 r_{ik} \lambda_k s_{kj}. \quad (\text{A4.1})$$

De vector $x = |\tilde{A}| \cdot (q_L - q_R) = (x_i)$ kan nu worden geschreven als $(q_L = (q_L^{(j)}))$ en $(q_R = (q_R^{(j)}))$

$$x_i = \sum_{j=1}^4 \left[\sum_{k=1}^4 r_{ik} |\lambda_k| s_{kj} \right] \left[q_L^{(j)} - q_R^{(j)} \right] = \sum_{k=1}^4 |\lambda_k| \left[\sum_{j=1}^4 s_{kj} \cdot \left[q_L^{(j)} - q_R^{(j)} \right] \right] \cdot r_{ik} \quad (\text{A4.2a})$$

ofwel

$$x_i = \sum_{k=1}^4 |\lambda_k| \sigma_k r_{ik} \quad , \quad \sigma_k = \sum_{j=1}^4 s_{kj} (q_L^{(j)} - q_R^{(j)}). \quad (\text{A4.2b})$$

Analoog aan (A3.2) en (A3.3) kan ∇x nu worden geschreven als

$$\nabla x = \sum_{k=1}^4 (|\lambda_k| \sigma_k \nabla r_{\cdot k} + |\lambda_k| r_{\cdot k} \nabla \sigma_k + \sigma_k r_{\cdot k} \nabla |\lambda_k|) \quad (\text{A4.3a})$$

ofwel

$$\nabla x_i = \sum_{k=1}^4 \left\{ |\lambda_k| \sigma_k \nabla r_{ik} + |\lambda_k| r_{ik} \nabla \sigma_k + \sigma_k r_{ik} \nabla |\lambda_k| \right\}. \quad (\text{A4.3b})$$

Hierin is $\nabla |\lambda_k|$ te beschrijven als $(d|\lambda_k|/d\lambda_k) \cdot \nabla \lambda_k$ en voor $\nabla \sigma_k$ geldt:

$$\nabla \sigma_k = \sum_{j=1}^4 \left\{ (q_L^{(j)} - q_R^{(j)}) \cdot \nabla s_{kj} + s_{kj} \nabla (q_L^{(j)} - q_R^{(j)}) \right\}. \quad (\text{A4.3c})$$

Voor ∇ kan men in (A4.3) twee dingen invullen, te weten $(\partial/\partial u_L, \partial/\partial v_L, \partial/\partial c_L, \partial/\partial z_L)$ of $(\partial/\partial u_R, \partial/\partial v_R, \partial/\partial c_R, \partial/\partial z_R)$, die we ∇_L respectievelijk ∇_R zullen noemen. De vormen (A4.3b) en (A4.3c) zullen niet in hun geheel worden uitgewerkt. Maar omdat (A4.3b) en (A4.3c) moeten worden berekend uit $\nabla u_m, \nabla v_m, \nabla h_m$ en ∇c_m (zie (4.13) en verder voor u_m, v_m en h_m) geven we die nog wél hier; eerst voeren we nog wat grootheden in:

$$\begin{cases} \xi := \sqrt{\rho_R/\rho_L} \\ \zeta := 1/(1+\xi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_m = \zeta \cdot (u_L + \xi \cdot u_R) \\ v_m = \zeta \cdot (v_L + \xi \cdot v_R) \\ h_m = \zeta \cdot (h_L + \xi \cdot h_R) \end{cases} \quad (\text{A4.4})$$

en

$$c_m = \left\{ (\gamma - 1) \left(h_m - \frac{1}{2} (u_m^2 + v_m^2) \right) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Voor ∇_L en ∇_R bij u_m, v_m, c_m en h_m krijgen we aldus:

$$\left[(\nabla_L u_m)^T, (\nabla_L v_m)^T, (\nabla_L c_m)^T, (\nabla_L h_m)^T \right] = \quad (\text{A4.5a})$$

$$\begin{bmatrix} \zeta & 0 & \zeta^{(l)}(u_L - u_m) & \zeta u_L \\ 0 & \zeta & \zeta^{(l)}(v_L - v_m) & \zeta v_L \\ \mu^{(u)}/c_L & \mu^{(v)}/c_L & \zeta c_L/c_m + w^{(l)}/c_L & \zeta c_L/\beta + \mu^{(h)}/c_L \\ -\mu^{(u)}/2 & -\mu^{(v)}/2 & -\omega^{(l)}/2 & -\mu^{(h)}/2 \end{bmatrix}$$

en

$$\left[(\nabla_R u_m)^T, (\nabla_R v_m)^T, (\nabla_R c_m)^T, (\nabla_R h_m)^T \right] = \quad (\text{A4.5b})$$

$$\begin{bmatrix} \xi^{(l)} & 0 & \xi \cdot \zeta^{(l)}(u_R - u_m) & \xi^{(l)} \cdot u_R \\ 0 & \xi^{(l)} & \xi \cdot \zeta^{(l)}(v_R - v_m) & \xi^{(l)} \cdot v_R \\ -\mu^{(u)}/c_R & -\mu^{(v)}/c_R & \xi^{(l)} c_R/c_m - w^{(l)}/c_R & \xi^{(l)} c_R/\beta - \mu^{(h)}/c_R \\ \mu^{(u)}/2 & \mu^{(v)}/2 & -\omega^{(l)}/2 & \mu^{(h)}/2 \end{bmatrix},$$

waarin:

$$\begin{aligned} \eta &= 1/(2 + \xi + \xi^{-1}), \\ \omega &= (h_L - h_R) - u_m(u_L - u_R) - v_m(v_L - v_R), \\ \mu^{(u)} &= \mu(u_L - u_R), \\ \mu^{(v)} &= \mu(v_L - v_R), \\ \mu^{(h)} &= \mu(h_L - h_R), \\ \zeta^{(l)} &= \xi \beta / c_m, \\ \xi^{(l)} &= \xi \cdot \xi, \\ \omega^{(l)} &= \omega \eta / 2 c_m. \end{aligned} \quad (\text{A4.6})$$

In principe zijn (A4.3b) en (A4.3c) nu te bepalen.

Appendix V

BESCHRIJVING VAN HET KANAAL

Het gebruikte kanaal is afkomstig uit [17]. Er volgt nu een korte beschrijving van.
 Zij $(xx, yy) \in [-2, 3] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$ een gegeven getallenpaar; er zal nu een afbeelding M worden geconstrueerd die $(xx, yy) \in \mathbb{R}^2$ afbeeldt op $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; deze constructie wordt in een Algol-stijl gegeven.

```

{ $\hat{y}$  is een tijdelijke hulpvariable}
if  $xx \in (-\infty, -1.37]$ 
  then  $x \leftarrow -0.57 - 0.15(e^{-1.65(2.27xx + 3.11)} - 1)$ 
  else if  $xx \in [2.15, \infty)$ 
    then  $x \leftarrow 0.55 + 0.11(e^{1.286(2.88xx - 6.19)} - 1)$ 
    else  $x \leftarrow 0.32xx - 0.14$ 
  fi
fi;
if  $yy \in [2.0, \infty)$ 
  then  $\hat{y} := 2.0$ 
  else if  $yy \in (-\infty, 0.01]$ 
    then  $\hat{y} := 0.0$ 
    else  $\hat{y} := 0.19(e^{1.222yy} - 1)$ 
  fi
fi;
if  $|x| \leq \frac{1}{2}$ 
  then  $y \leftarrow \hat{y} + 0.084(\frac{1}{2} - x)(\frac{1}{2} + x)(2 - y)$ 
  else  $y \leftarrow \hat{y}$ 
fi
{nu geldt:  $(x, y) = M(xx, yy)$ }

```

(A5.1)

Definiëren we nu nog de lijnstukken

$$\begin{aligned}
 l_N &= \{(xx, yy) \mid xx = -2, yy \in [0, 2]\}, \\
 l_0 &= \{(xx, yy) \mid yy = 2, xx \in [-2, 3]\}, \\
 l_z &= \{(xx, yy) \mid xx = 3, yy \in [0, 2]\}, \\
 l_w &= \{(xx, yy) \mid yy = 0, xx \in [-2, 3]\}
 \end{aligned}$$

(A5.2)

en $l_B = \{(xx, yy) | xx \in [-1\frac{1}{8}, 2], yy = 0\}$ en het vlakdeel $\mathbb{D} = [-2, 3] \times [0, 2]$ dan kan men $M(\mathbb{D})$ in figuur 7 vinden en zijn $M(l_O)$ en $M(l_W)$ vaste wanden. Verder geldt dan dat:

$$M(l_B) = \{(x, y) | x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], y = 0.042 \cdot (1 - 4x^2)\}. \quad (\text{A5.3})$$

TABELLEN

Tabel 1

Benodigde rekentijden voor het uitvoeren van FMG en 6 maal FAS		
numerieke flux	rekentijd in CP-seconden	rekentijd t.o.v. Osher
Osher	25.880	100 %
Roe	76.087	294 %
Steger	28.152	109 %
Steger met ϵ_{sw}	27.425	106 %

Tabel 2

De norm van het residu na FMG en i maal FAS uitvoeren				
Osher	Roe	Steger	Steger, ϵ_{sw}	i
4.37 E-2	4.25 E-2	1.42 E-2	1.46 E-2	1
6.53 E-3	3.10 E-3	1.96 E-2	2.01 E-2	2
2.02 E-3	8.18 E-4	1.17 E-2	1.22 E-2	3
8.45 E-4	3.52 E-4	3.44 E-3	3.76 E-3	4
1.43 E-4	7.10 E-5	3.15 E-3	3.18 E-3	5
3.73 E-5	1.21 E-5	2.93 E-3	3.08 E-3	6
0.256	0.220	0.659	0.661	Gemiddelde conv. factor

```

'PROC' STEGER = ('STATE' Q0, Q1, 'REF' 'FLUXAC' FAC0, FAC1) 'FLUX':
'BEGIN'
'PROC' WARMING = ('STATE' Q, 'REF' 'FLUXAC' QAC, 'BOOL' PLUS) 'FLUX':
'BEGIN'
'BOOL' AW = QAC 'ISNT' 'NIL'
'REAL' U = Q[1], V = Q[2], C = Q[3], Z = Q[4]
'REAL' C2 = C * C, S2 = U * U + V * V
'REAL' H = S2 / 2 + C2 * OGAMM1, RHO = (C2 * OGAM * EXP(-Z)) ** OGAMM1

'IF' AW 'THEN' QAC := NULFLUXAC 'FI'

'IF' (U > C 'AND' PLUS) 'OR' (U < C 'AND' 'NOT' PLUS)
'THEN'
'IF' AW
'THEN'
'REAL' ALFA = RHO * OTGAM, UMC = U - C,
DALFADC = RHO * OGAMGAMM1 / C,
DALFADZ = -RHO * OGAMGAMM1 / 2
'REAL' LAM = UMC, BETA = ALFA * UMC
'FLUX' EV = (1, UMC, V, H - U * C)
QAC += 'FLUXAC'
(NUL, (BETA, 0, -BETA, 0), (0, BETA, 0, 0),
(BETA * UMC, BETA * V, BETA * (C / HGAMM1 - U), 0))
QAC[1] += ALFA * EV
QAC[3] += (LAM * DALFADC - ALFA) * EV
QAC[4] += (LAM * DALFADZ) * EV
BETA * EV
'ELSE'
((U - C) * RHO * OTGAM) * 'FLUX' (1, U - C, V, H - U * C)
'FI'
'ELSE' NUL
'FI' +
'IF' (U > 0 'AND' PLUS) 'OR' (U < 0 'AND' 'NOT' PLUS)
'THEN'
'IF' AW
'THEN'
'REAL' ALFA = RHO * GAMM1 * OGAM,
DALFADC = 2 * RHO * OGAM / C,
DALFADZ = -RHO * OGAM
'REAL' LAM = U, BETA = ALFA * U
'FLUX' EV = (1, U, V, S2 / 2)
QAC += 'FLUXAC'
(NUL, (BETA, 0, 0, 0), (0, BETA, 0, 0), (BETA * U, BETA * V, 0, 0))
QAC[1] += ALFA * EV
QAC[3] += (LAM * DALFADC) * EV
QAC[4] += (LAM * DALFADZ) * EV
BETA * EV
'ELSE'
(U * RHO * GAMM1 * OGAM) * 'FLUX' (1, U, V, S2 / 2)
'FI'
'ELSE' NUL
'FI' +
'IF' (U > -C 'AND' PLUS) 'OR' (U < -C 'AND' 'NOT' PLUS)
'THEN'
'IF' AW
'THEN'
'REAL' ALFA = RHO * OTGAM, UPC = U + C,
DALFADC = RHO * OGAMGAMM1 / C,
DALFADZ = -RHO * OGAMGAMM1 / 2
'REAL' LAM = UPC, BETA = ALFA * UPC
'FLUX' EV = (1, UPC, V, H + U * C)
QAC += 'FLUXAC'
(NUL, (BETA, 0, BETA, 0), (0, BETA, 0, 0),
(BETA * UPC, BETA * V, BETA * (C / HGAMM1 + U), 0))
QAC[1] += ALFA * EV
QAC[3] += (LAM * DALFADC + ALFA) * EV
QAC[4] += (LAM * DALFADZ) * EV
BETA * EV
'ELSE'
((U + C) * RHO * OTGAM) * 'FLUX' (1, U + C, V, H + U * C)
'FI'
'ELSE' NUL
'FI'
'END'
WARMING (Q0, FAC0, 'TRUE') + WARMING (Q1, FAC1, 'FALSE')
'END'

```

GAM $\equiv \gamma$
 GAMM1 $\equiv \gamma - 1$
 HGAMM1 $\equiv (\gamma - 1) / 2$
 OGAM $\equiv 1 / \gamma$
 OTGAM $\equiv 1 / 2 \gamma$
 OGAMM1 $\equiv 1 / (\gamma - 1)$
 OGAMGAMM1 $\equiv 1 / \gamma (\gamma - 1)$

Listing van de procedure Steger.

Het eerste resp. tweede argument is de toestand van het gas in de linker resp. rechter cel. Als resultaat geeft deze procedure een flux af berekend volgens het SW-schema, de numerieke flux van de linker naar de rechter cel. Als FAC0 resp. FAC1 niet nil is dan staat daar, bij het verlaten van de procedure, de afgeleide van de numerieke flux naar de linker resp. rechter toestand in.

```

1 'PROC' ROE      = ('STATE' Q0,Q1,'REF' 'FLUXAC' FAC0,FAC1)'FLUX':
2 'BEGIN'
3 'BOOL' DERIV0=FAC0'ISNT' 'NIL',DERIV1=FAC1'ISNT' 'NIL' ;
4 []'STATE' ST = ('EZ'Q0,'EZ'Q1) ;
5 'FLUX' SD := ST[1]-ST[2] ;
6 NF := ZFLUX (Q0,FAC0) + ZFLUX (Q1,FAC1) ;
7 []'REAL' HH = ( TOTENTHALPY(ST[1]), TOTENTHALPY(ST[2]) ) ;
8
9 'REAL' KSI = SQRT( ST[2][1]/ST[1][1] ) , HF=0.5 , B=HGAMM1 ;
10 'REAL' ZETA=1/(1+KSI),OTB=HF/B ;
11 'REAL' UM=ZETA*(Q0[1]+KSI*Q1[1]),VM=ZETA*(Q0[2]+KSI*Q1[2]),
12 HM=ZETA*(HH[1]+KSI*HH[2]) ;
13 'REAL' S2M = HF * (UM*UM+VM*VM) ;
14 'REAL' C2M = GAMM1*(HM-S2M) ;
15 'REAL' CM = SQRT(C2M) , OC2M = 1/C2M ;
16 'REAL' OTCM = HF/CM,OCM=1/CM,BE1=B/C2M,UCM =UM*CM ;
17 'REAL' BE2=BE1*UM , BE3=BE1*VM , BE4=BE1*2*S2M ;
18
19 []'REAL' LAM = (UM-CM,UM,UM,UM+CM) ;
20 []'FLUX'
21 R = ( ( 1 , UM-CM , VM , HM-UCM ) ,
22       ( 0 , 0 , 1 , VM ) ,
23       ( 1 , UM , VM , S2M ) ,
24       ( 1 , UM+CM , VM , HM+UCM ) ) ,
25 S = ( ( HF*BE4 + UM*OTCM , -BE2-OTCM , -BE3 , BE1 ) ,
26       ( -VM , 0 , 1 , 0 ) ,
27       ( 1-BE4 , 2*BE2 , 2*BE3 , -2*BE1 ) ,
28       ( HF*BE4 - UM*OTCM , OTCM-BE2 , -BE3 , BE1 ) ) ;
29 'FLUX' SIG := NUL ;
30 'FOR' I 'TO' 4 'DO' 'REAL' SDI=SD[I] ;
31 'FOR' J 'TO' 4 'DO' SIG[J] += S[J][I]*SDI 'OD'
32 'OD' ;
33 'FOR' I 'TO' 4 'DO' NF+= ( ('ABS'LAM[I])*SIG[I])*R[I] 'OD' ;
34
35 'IF' DERIV0 'OR' DERIV1 'THEN' # DE JACOBIANEN #
36 'REAL' DELU=Q0[1]-Q1[1],DELV=Q0[2]-Q1[2],DELH=HH[1]-HH[2],
37 ETA=1/(2+KSI+1/KSI);
38 'REAL' OME = DELH-UM*DELU-VM*DELV , MU = ETA*OGAMM1 ;
39 'REAL' MUIU= MU*DELU , MUIV=MU*DELV , ZETIL=ZETA*B*OCM ,
40 MUIH=MU*DELH , OMIL=OME*ETA*OTCM,KSIL=ZETA*KSI ,
41 SD1=SD[1],SD2=SD[2],SD3=SD[3],SD4=SD[4] ;
42
43 'FLUX' DU,DV,DC,DH,DUC,DBE1,DBE2,DBE3,DBE4,DVA2,DOTC,DUOTC ;
44 'FLUXAC' DSD ;
45
46 'FOR' I 'TO' 2
47 'DO'
48 'IF' ( I=1 'AND' DERIV0 ) 'OR' ( I=2 'AND' DERIV1 ) 'THEN'
49 'REF' 'FLUXAC' FAC =
50 'IF' I=1
51 'THEN'
52 'REAL' UU=Q0[1],VV=Q0[2],CC=Q0[3],RH=ST[1][1];
53 DU:=(ZETA,0,MUIU/CC,-HF*MUIU) ; 'REAL' OBC=1/(B*CC) ;
54 DV:=(0,ZETA,MUIV/CC,-HF*MUIV) ; 'REAL' RH1=RH*OBC ;
55 DC:=(ZETIL*(UU-UM),ZETIL*(VV-VM),
56 ZETA*CC/CM+OMIL/CC,-HF*OMIL) ; 'REAL' RH2=-RH*OTB ;
57 DH:=(ZETA*UU,ZETA*VV,ZETA*CC/B+MUIH/CC,-HF*MUIH) ;
58 DSD:='FLUXAC'((0 , RH , 0 , RH *UU ) ,
59 (0 , 0 , RH , RH *VV ) ,
60 (RH1 , RH1*UU , RH1*VV , RH1*HH[1] ) ,
61 (RH2 , RH2*UU , RH2*VV , -OTB*ST[1][4])) ; FAC0
62 'ELSE'
63 'REAL' UU=Q1[1],VV=Q1[2],CC=Q1[3],RH=ST[2][1];
64 DU:=(KSIL,0,-MUIU/CC,HF*MUIU) ; 'REAL' OBC=1/(B*CC) ;
65 DV:=(0,KSIL,-MUIV/CC,HF*MUIV) ; 'REAL' RH1=-RH*OBC ;
66 DC:=(KSI*ZETIL*(UU-UM),KSI*ZETIL*(VV-VM),
67 KSIL*CC/CM-OMIL/CC,HF*OMIL) ; 'REAL' RH2=RH*OTB ;
68 DH:=(KSIL*UU,KSIL*VV,KSIL*CC/B-MUIH/CC,HF*MUIH) ;
69 DSD:='FLUXAC'((0 , -RH , 0 , -RH *UU ) ,
70 (0 , 0 , -RH , -RH *VV ) ,
71 (RH1 , RH1*UU , RH1*VV , RH1*HH[2] ) ,
72 (RH2 , RH2*UU , RH2*VV , OTB*ST[2][4])) ; FAC1
73 'FI' ;
74
75 DUC := (UM *DC)+(CM *DU) ; DBE1:=(-2*OCM*BE1)*DC ;
76 DVA2 := ((2*UM)*DU)+((2*VM)*DV) ; DOTC:=(-HF*OC2M) *DC ;
77 DUOTC:= (UM*DOTC) +(OTCM *DU) ; DBE2:=(BE1*DU)+(UM*DBE1) ;
78 DBE3 := (BE1*DV)+(VM*DBE1) ; DBE4:=(BE1*DVA2)+((2*S2M)*DBE1) ;
79
80 'FOR' J 'TO' 4 'DO'
81 'REAL' ALAM := LAM[J] , SIGJ := SIG[J] ;
82 'FLUX' DLAM := ( J ! DU-DC,DU,DU,DU+DC ) ;
83 'IF' ALAM<0 'THEN' DLAM:=-DLAM ; ALAM:=-ALAM 'FI' ;
84 'FLUX' DSIG ; 'REAL' PROD=ALAM*SIGJ ;
85 'FLUXAC'
86 DR := ( J !
87 ( NUL , DU-DC , DV , DH-DUC ) ,
88 ( NUL , NUL , NUL , DV ) ,
89 ( NUL , DU , DV , HF*DVA2 ) ,
90 ( NUL , DU+DC , DV , DH+DUC ) ) ,
91 DS := ( J !
92 ( HF*DBE4+DUOTC , -DBE2-DOTC , -DBE3 , DBE1 ) ,
93 ( -DV , NUL , NUL , NUL ) ,
94 ( -DBE4 , 2.0*DBE2 , 2.0*DBE3 , -2.0*DBE1 ) ,
95 ( HF*DBE4-DUOTC , DOTC-DBE2 , -DBE3 , DBE1 ) ) ;
96 'REAL' S1=S[J][1],S2=S[J][2],S3=S[J][3],S4=S[J][4] ;
97 'FOR' C 'TO' 4
98 'DO' 'REF'[]'REAL' DSC=DS[C],DSDC=DSD[C] ;
99 DSIG[C]:= DSC[1]*SD1+ DSC[2]*SD2+ DSC[3]*SD3+ DSC[4]*SD4
100 +DSDC[1]* S1+DSDC[2]* S2+DSDC[3]* S3+DSDC[4]* S4
101 'OD' ;
102 'FOR' C 'TO' 4
103 'DO' DLAM[C] := SIGJ*DLAM[C] + ALAM*DSIG[C]
104 'OD' ;
105 'FLUX' RJ = R[J] ;
106 'FOR' C1 'TO' 4 'DO' 'FOR' C2 'TO' 4 'DO'
107 FAC[C1,C2] += PROD * DR[C1,C2] + RJ[C1]*DLAM[C2]
108 'OD' 'OD'
109 'OD' ;
110 FAC *:= HF
111 'FI'
112 'OD'
113 'FI' ;
114 NF *:= HF
115 'END' ;

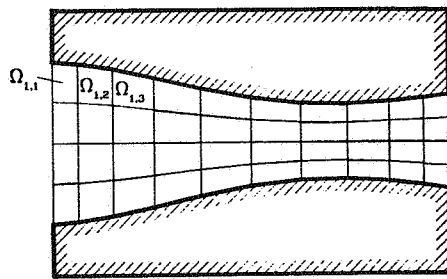
```

GAM	= γ
GAMM1	= $\gamma-1$
HGAMM1	= $(\gamma-1)/2$
OGAM	= $1/\gamma$
OTGAM	= $1/2\gamma$
OGAMM1	= $1/(\gamma-1)$
OGAMGAMM1	= $1/\gamma(\gamma-1)$

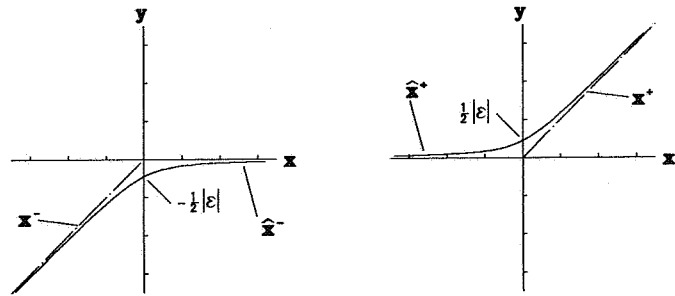
Listing van de procedure Roe.

Voor de argumenten geldt hetzelfde als bij Steger.

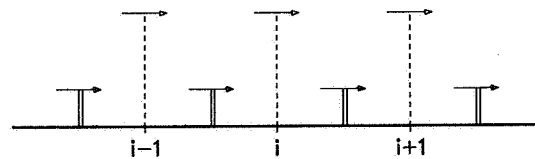
De afgeleverde numerieke flux wordt hier berekend volgens het schema van Roe.



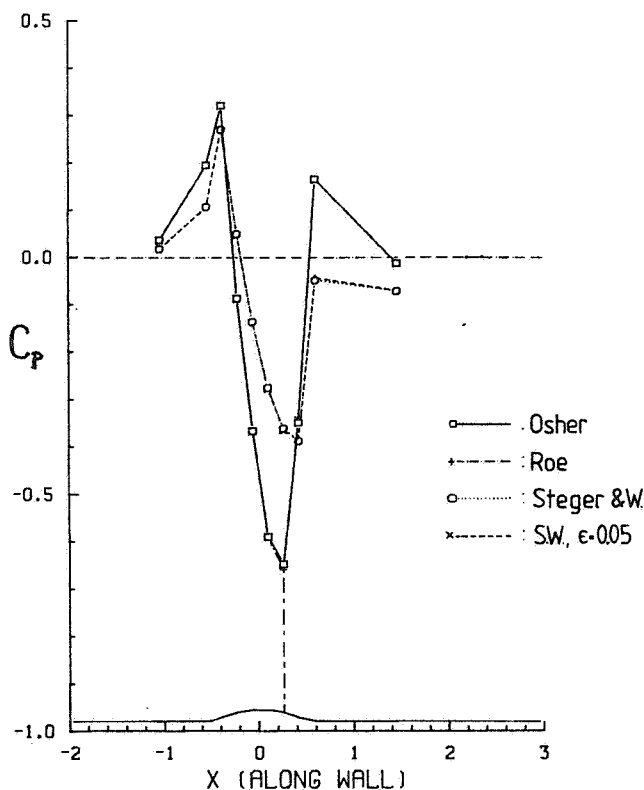
Figuur 1 Voorbeeld van een grid.



Figuur 2 De functies $\hat{x}^-$, $\hat{x}$, $\hat{x}^+$, $\hat{x}^*$

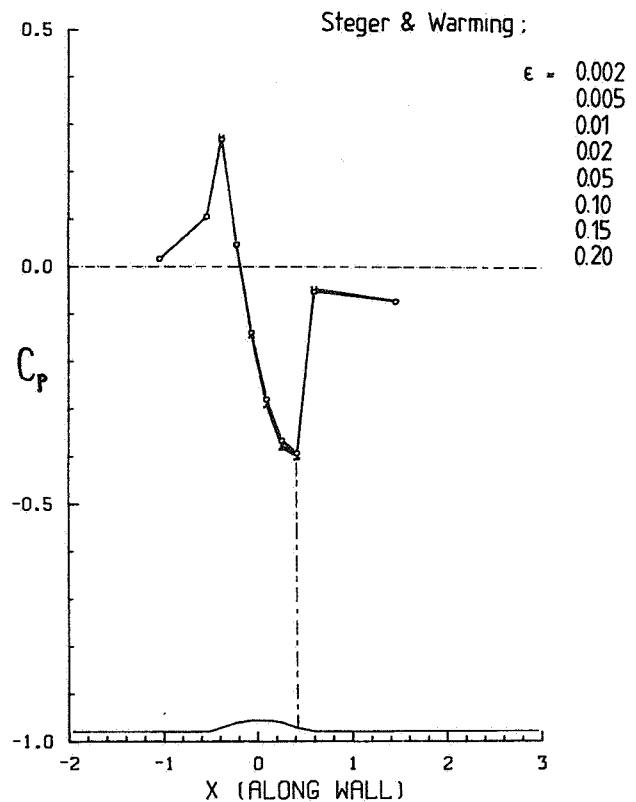


Figuur 3 De fluxes $f_{Roe}(u_i, u_{i+1})$ en $F(u_i)$



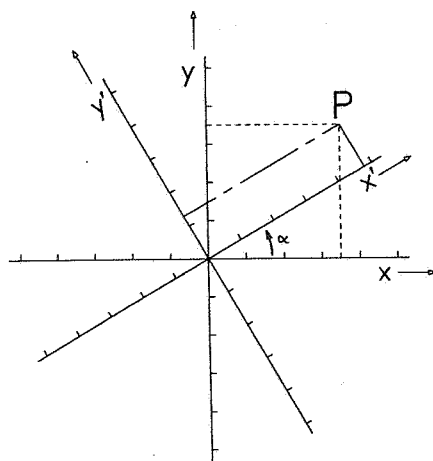
In dit figuur zijn de c_p -waarden weergegeven zoals die met Osher, Roe en Steger & Warming werden gevonden. Steger en Warming werd ook met epsilon waarde 0.05 gedraaid. De grafieken van Osher en Roe vallen samen en ook alle grafieken verkregen met het SW-schema overlappen elkaar volledig; daarom zijn geen lijnen met een plus of maal teken in dit figuur te zien hoewel ze wel in de legende staan.

Figuur 4a

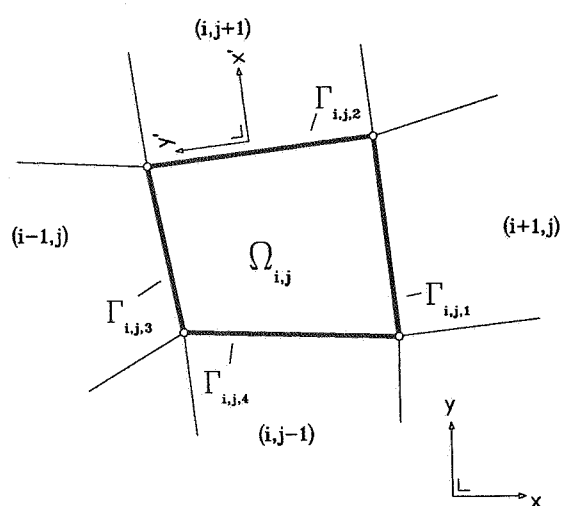


In dit figuur zijn de c_p -waarden weergegeven zoals die met de verschillende epsilon-waarden werden gevonden die in het lijstje vermeld staan. Men ziet dat de grafieken niet of nauwelijks verschillen van elkaar: ze overlappen elkaar bijna geheel.

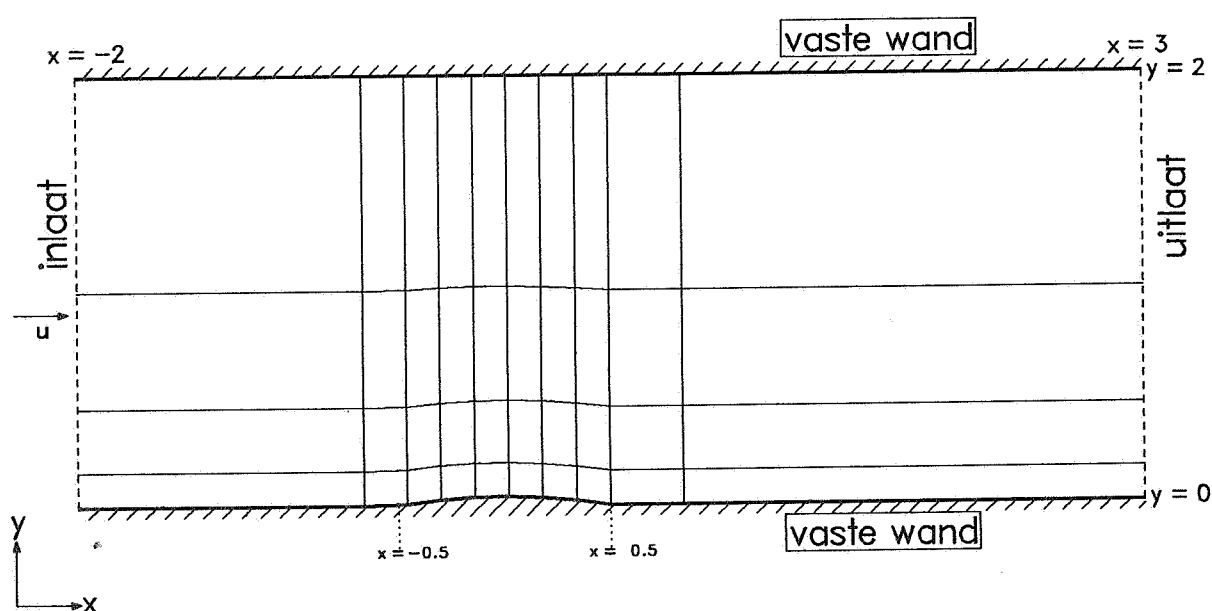
Figuur 4b



Figuur 5 Rotatie van een assenstelsel



Figuur 6 Assenstelsel loodrecht op $\Gamma_{i,j,2}$



Figuur 7 Een 10 x 4 grid in het kanaal met de bump

