

TW

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

College Toegepaste Wiskunde 1962-1963

INLEIDING TOT DE VECTOR- EN TENSORREKENING

door

Prof.dr. H.A. Lauwerier



2e druk

1968

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM



The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

College Toegepaste Wiskunde 1962-1963

Inleiding tot de vector- en tensorrekening

door

Prof.dr. H.A. Lauwerier

Literatuur

- | | |
|-----------------|--|
| D.E. Rutherford | Vector methods,
Univ. Math. Texts, Oliver and Boyd (1946). |
| B. Spain | Tensor calculus. id. (1953). |
| W.H. McCrea | Analytical geometry of three dimensions
id. 2 nd ed. (1947). |
| G.E. Hay | Vector and Tensor Analysis, Dover (1953). |

1. Uit de analytische meetkunde van drie dimensies

Een rechtlijnig assenstelsel wordt bepaald door een punt 0 en drie door 0 gaande niet in een vlak gelegen rechten OX_1 , OX_2 , OX_3 die de coördinaatassen heten. De vlakken X_2OX_3 enz. heten de coördinaatvlakken. De (scheve) projecties van een punt P op de coördinaatassen worden gevormd door de snijpunten van de assen met door P evenwijdig aan de coördinaatvlakken gaande vlakken (zie fig. 1.1)

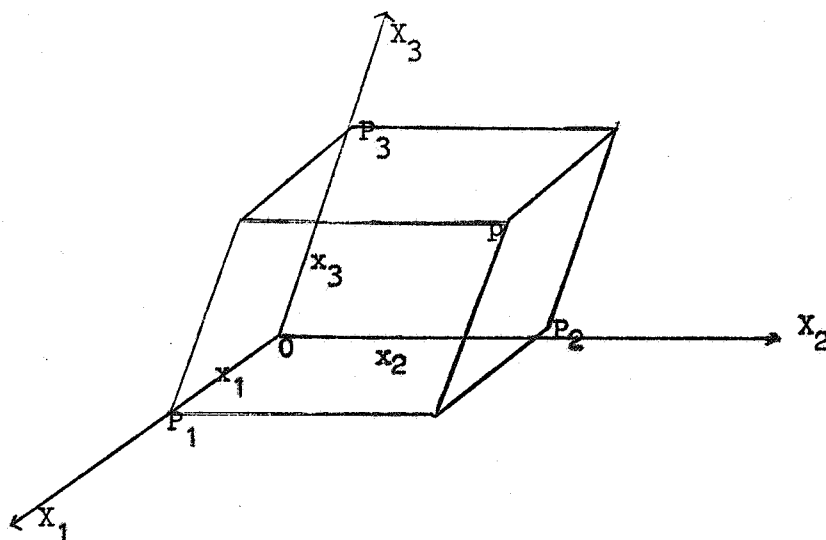


fig. 1.1

De rechtlijnige, ook wel genaamd scheefhoekige, coördinaten van P worden gedefinieerd door de lengten van de gerichte lijnstukken OP_i ($i = 1, 2, 3$). We schrijven $x_i = OP_i$.

Kiezen we door 0 drie andere coördinaatassen OX'_i welke een coördinaten stelsel x'_i vormen dan bestaat er tussen de coördinaten van een willekeurig punt P t.o.v. $OX_1 X_2 X_3$ en $OX'_1 X'_2 X'_3$ het volgende lineaire verband

$$(1.1) \quad \begin{cases} x'_1 = t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 \\ x'_2 = t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + t_{23}x_3 \\ x'_3 = t_{31}x_1 + t_{32}x_2 + t_{33}x_3 \end{cases}$$

waarbij de coëfficiënten t_{ij} niet van de plaats van P afhangen.

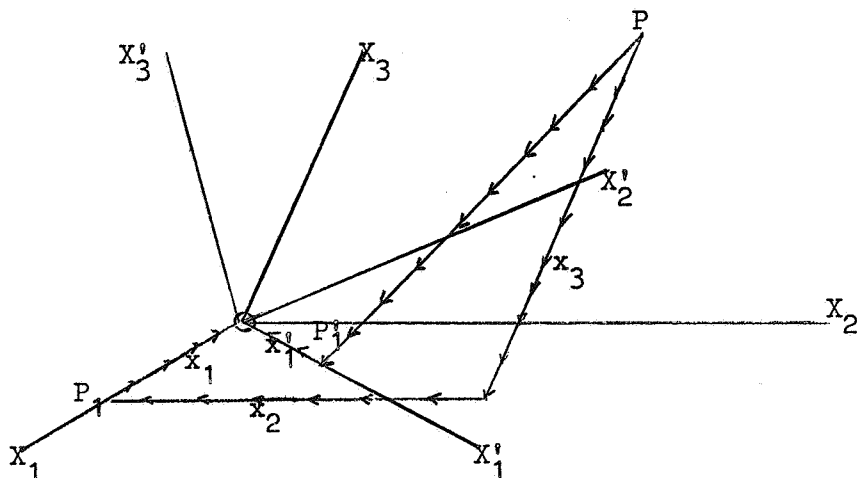


fig. 1.2

Het bewijs van deze formule berust op het feit dat de som van de (scheve) projecties van de elementen van een gebroken lijn welke twee punten 0 en P verbindt gelijk is aan de projectie van OP zelf. Het bewijs van de eerste betrekking van (1.1) ligt in fig. 1.2 opgesloten. De coëfficiënten t_{ij} zijn hierbij slechts door de onderlinge ligging van de coördinaatassen bepaald.

Uit het feit dat de transformatie (1.1) omkeerbaar is volgt dat de

coëfficiënten - determinant niet nul is.

$$(1.2) \quad \det (t_{ij}) \neq 0.$$

Een willekeurig punt $P(x_1, x_2, x_3)$ op de door $A(a_1, a_2, a_3)$ en $B(b_1, b_2, b_3)$ gaande rechte kan worden voorgesteld in parametervorm als

$$(1.3) \quad x_i = \frac{\lambda a_i + \mu b_i}{\lambda + \mu}$$

De meetkundige betekenis van de homogene parameters (λ, μ) is

$$(1.4) \quad AP : PB = \mu : \lambda .$$

Men noemt (1.3) de parameter-vergelijking van de rechte AB.

Een willekeurig punt $P(x_1, x_2, x_3)$ in het door $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ en $C(c_1, c_2, c_3)$ gaande vlak kan worden voorgesteld in parametervorm als

$$(1.5) \quad x_i = \frac{\lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i}{\lambda + \mu + \nu}$$

Uit (1.5) volgt door eliminatie van de parameters als vergelijking van het vlak ABC

$$(1.6) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Toepassing: Het vlak dat van de coördinaatassen OX_i de stukken s_i afsnijdt heeft de vergelijking

$$\frac{x_1}{s_1} + \frac{x_2}{s_2} + \frac{x_3}{s_3} = 1.$$

Algemeen stelt de lineaire vergelijking

$$(1.7) \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = p$$

een plat vlak voor. Door hierbij aan p verschillende waarden te geven wordt een bundel evenwijdige vlakken verkregen. Voor $p = 0$ gaat het vlak door de oorsprong.

Voortaan zullen wij vaak de zogenaamde sommatie-conventie van Einstein bezigen. Hierbij spreken we af dat lopende indices (i, j, k enz.) welke tweemaal voorkomen een sommatie over deze index inhouden.

Als voorbeeld kunnen wij (1.1) symbolisch schrijven als

$$(1.8) \quad x'_i = t_{ij} x_j.$$

De inverse transformatie is uiteraard van dezelfde vorm

$$(1.9) \quad x_i = T_{ij} x'_j$$

waarbij

$$(1.10) \quad t_{ij} T_{jk} = T_{ij} t_{jk} = \delta_{ik}.$$

Het hierin gebruikte delta-symbool van Kronecker is gedefinieerd als

$$(1.11) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{voor } i \neq j, \\ 1 & \text{voor } i = j. \end{cases}$$

Onder een rechthoekig (orthogonaal of Cartesiaans) assenstelsel verstaan we een rechtlijnig assenstelsel $OX_1 X_2 X_3$ waarbij de assen loodrecht op elkaar staan.

Hiervan zijn er twee typen nml. rechtse met een rechtse schroefzin (kurketrekker) en linkse met een linkse schroefzin.

Voorzover niet anders aangeduid gebruiken we voortaan uitsluitend rechtse Cartesiaanse assenstelsels.

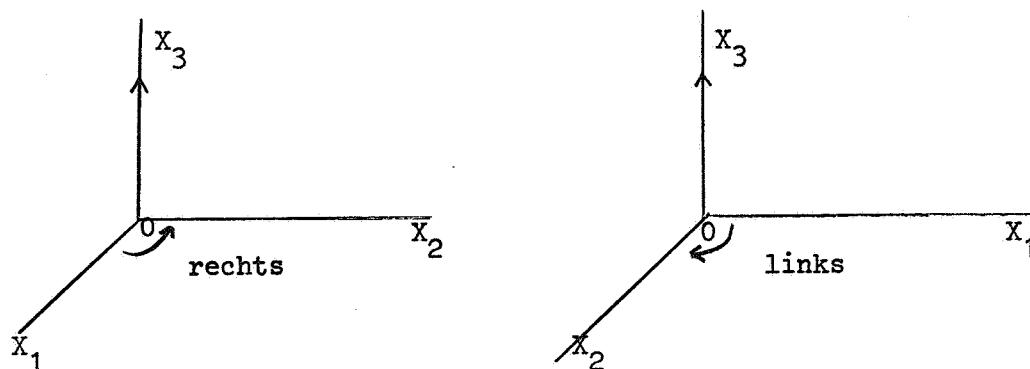


fig. 1.3

Voor een punt $A(a_1, a_2, a_3)$ geldt de afstandformule (uitgebreide stelling van Pythagoras)

$$(1.12) \quad OA^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Hieruit volgt voor de vergelijking van de bol met middelpunt O en straal R

$$(1.13) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

De kwadraatafstand van twee punten $A(a_i)$ en $B(b_i)$ is

$$(1.14) \quad AB^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2.$$

Richtingen corresponderen op (1 - 1)duidige wijze met de punten van de eenheidsbol $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Ligt $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ op de eenheidsbol dan heten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de richtingscosinussen van de richting OA .

Uiteraard geldt $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$.

Voor de hoek $\phi (0 \leq \phi \leq 180^\circ)$ tussen de richtingen $A(\alpha_i)$ en $B(\beta_i)$ geldt

$$(1.15) \quad \cos \phi = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3.$$

Bewijs: Pas op $\triangle AOB$ de cosinusregel toe.

Voor twee loodrechte richtingen geldt in het bijzonder

$$(1.16) \quad \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0.$$

We bewijzen nu de volgende bewering. Als $p > 0$ en $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ stelt (1.7) de vergelijking voor van een plat vlak waarvan de normaal de richtingscosinussen α_i heeft en waarbij de afstand tot de oorsprong gelijk aan p is. Het is namelijk eenvoudig in te zien dat (1.7) in het punt $(p\alpha_1, p\alpha_2, p\alpha_3)$ aan de bol $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2$ raakt. Gemakshalve stellen we $p = 1$. Voor de punten welke zowel op de bol als het vlak liggen geldt

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 1 \quad \text{en} \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

Hieruit volgt $(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + (x_3 - \alpha_3)^2 = 0$ zodat $x_i = \alpha_i$. Er is dus slechts één gemeenschappelijk punt d.w.z. het vlak is een raakvlak. De vergelijking (1.7) (in orthogonale coördinaten) heet de normaalvergelijking van het vlak.

We beschouwen nu de overgang van een (rechts) Cartesiaans assenstelsel $OX_1 X_2 X_3$ naar een soortgelijk assenstelsel $OX_1^i X_2^i X_3^i$. Hiervoor geldt uiteraard het lineaire verband (1.1). Uit de invariantie van de kwadraatlengte volgt dat de coëfficiënten t_{ij} voldoen aan de betrekking $t_{ij} t_{ik} = \delta_{jk}$, dat de inverse transformatie van de vorm $x_i = t_{ji} x_j^i$ is en dat ook $t_{ji} t_{ki} = \delta_{jk}$.

Bewijs: Uitgaande van (1.1) en $x_i^i x_i^i = x_i x_i$ volgt

$t_{ij} x_j t_{ik} x_k = x_i x_i = \delta_{jk} x_j x_k$, zodat $t_{ij} t_{ik} = \delta_{jk}$. De juistheid van $x_i = t_{ji} x_j^i$ volgt uit $x_i = t_{ji} x_j^i = t_{ji} t_{jk} x_k = \delta_{ik} x_k = x_i$.

Dus:

$$(1.17) \quad \begin{cases} x_i^i = t_{ij} x_j & , & x_i = t_{ji} x_j^i \\ t_{ij} t_{ik} = t_{ji} t_{ki} = \delta_{jk} \end{cases}$$

Uit de afleiding van (1.1) volgt dat t_{ij} bepaald is door de projectie van OX_i^i op OX_j of omgekeerd

$$t_{ij} = \cos(X_i^i \text{ o } X_j)$$

We kunnen dus bijv. (t_{11}, t_{12}, t_{13}) interpreteren als de richtingscosinussen van OX_i^i in het coördinatenstelsel $OX_1 X_2 X_3$ en (t_{11}, t_{21}, t_{31}) als die van OX_i in het coördinatenstelsel $OX_1^i X_2^i X_3^i$. De relaties $t_{ij} t_{ik} = t_{ji} t_{ki} = \delta_{jk}$ drukken dus niets anders uit dan dat de coördinaatassen loodrecht op elkaar staan. Uit deze orthogonaliteitsrelaties volgt

$$(1.18) \quad \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = \pm 1 .$$

Bewijs: kwadrateer de determinant.

Hieruit blijkt algebraïsch de splitsing in transformaties tussen gelijksoortige en ongelijksoortige assenstelsels. Bij rechtse coördinatenstelsels behoort altijd de determinantwaarde +1. Bij de overgang van een rechts op een links stelsel behoort de determinantwaarde -1.

Onderwerpen we de eenheidsbol $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ aan een anisotrope deformatie

$$(1.19) \quad x_1 \rightarrow x_1/a_1, \quad x_2 \rightarrow x_2/a_2, \quad x_3 \rightarrow x_3/a_3$$

dan ontstaat een drie-assige ellipsoïde met de vergelijking

$$(1.20) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1.$$

De oorsprong is het middelpunt. De coördinaatassen bepalen de zogenaamde hoofdassen. Deze snijden de ellipsoïde in de toppen. De coördinaatvlakken zijn vlakken van symmetrie. De lengten van de hoofdassen zijn $2a_1, 2a_2, 2a_3$.

In het algemeen stelt de vergelijking

$$(1.21) \quad c(x) \equiv c_{ij} x_i x_j = 1 \quad (c_{ij} = c_{ji})$$

een tweedegraads-oppervlak voor waarvan de oorsprong het middelpunt is. Als de kwadratische vorm $c(x)$ positief definit is, d.w.z. $c(x) \geq 0$ voor alle combinaties x_1, x_2, x_3 waarbij het gelijktteken alleen geldt voor $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, stelt (1.21) een drie-assige ellipsoïde voor. Hierbij doet zich het probleem voor de hoofdassen te bepalen.

We geven hier een van de methoden om dat zgn. hoofdassenprobleem op te lossen.

De hoofdassen zijn bepaald door het maximum-probleem.

$$(1.22) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{is stationair met de nevenvoorwaarde} \\ c(x) = 1.$$

De oplossing vandit probleem volgens de multiplicator-methode van Lagrange ^{*)} is

$$(1.23) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \{x_i x_i - \mu(c_{ij} x_i x_j - 1)\} = 0,$$

*) Zie college dictaat 1961-'62, p. 2-3.

d.w.z.

$$(1.24) \quad x_i = \mu c_{ij} x_j \quad \text{of} \quad (\mu c_{ij} - \delta_{ij}) x_j = 0.$$

Eliminatie van de coördinaten x_j geeft

$$(1.25) \quad \det(\mu c_{ij} - \delta_{ij}) = 0.$$

Dit is een vergelijking van de derde graad in μ . Voor elk van de drie wortels vinden we een hoofdas door (1.24) op te lossen.

2. Meetkundige behandeling van de vectorrekening

Onder een pijl verstaan we een gericht lijnstuk of een geordend puntenpaar. Pijlen welke uit elkaar door translatie ontstaan heten gelijk en gelijkgericht. Een vector is gedefinieerd als een volledig systeem van gelijke en gelijkgerichte pijlen.

Elk van deze pijlen kan dienen als representant van de vector. We kunnen bijvoorbeeld, maar nodig is dit niet, alle vectoren voorstellen door pijlen welke in hetzelfde punt beginnen.

Vectoren duiden we aan met de notatie $\vec{v}$ enz. Scalaire duiden we aan met Griekse letters.

Scalaire vermenigvuldiging van een vector $\vec{v}$ met een scalar α wordt gedefinieerd door een representatieve pijl van $\vec{v}$ vanuit zijn beginpunt met α te vermenigvuldigen (centrale vermenigvuldiging).

Optelling van vectoren geschiedt met de in fig.2.1. gegeven parallelogram-constructie

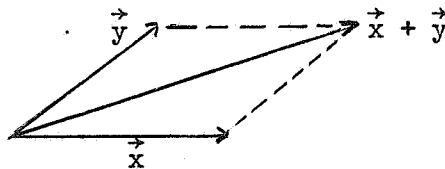


fig. 2.1

Definieert men de nulvector $\vec{0}$ als de verzameling pijlen waarvan begin- en eindpunt samenvallen, dan gelden de volgende grondeigenschappen

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} & (\text{commutativiteit}) \\ \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} & (\text{associativiteit}) \\ \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} \\ \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \end{array} \right.$$

Men kan gemakkelijk inzien dat alle vectoren afgeleid kunnen worden uit een willekeurig onafhankelijk drietal $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Stellen we deze zogenaamde basisvectoren voor door pijlen OE_1, OE_2, OE_3 dan liggen deze pijlen dus niet in één vlak. Voor een willekeurige vector $\vec{x}$ kunnen we blijkens fig. 2.2 steeds schrijven

$$(2.2) \quad \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

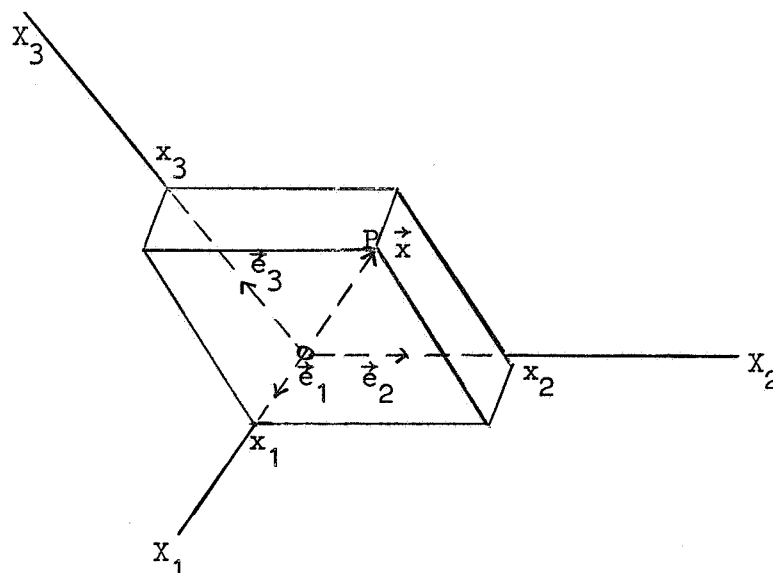


fig. 2.2

We kunnen (x_1, x_2, x_3) interpreteren als de coördinaten van het uiteinde P van de met $\vec{x}$ corresponderende pijl OP t.o.v. het door de basisvectoren gevormde scheefhoekige assenstelsel.

Heel vaak kiest men voor de $\vec{e}_i$ langs de assen van een Cartesiaans assenstelsel gelegen eenheidsvectoren. In dat geval zijn de x_i de Cartesiaanse coördinaten van P.

De lengte van de vector $\vec{x}$ duiden we aan met $|\vec{x}|$ of soms met x .

Het inwendige product $\vec{x} \cdot \vec{y}$ van twee vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ wordt a.v. gedefinieerd. Als $\vec{x}$ en $\vec{y}$ met de pijlen OP en OQ corresponderen en indien θ de door OP en OQ gevormde hoek is welke tussen 0° en 180° ligt, dan is

$$(2.3) \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = x y \cos \theta .$$

Voor loodrecht op elkaar staande vectoren geldt dus $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

In het bijzonder is $\vec{x} \cdot \vec{x} = x^2$.

T.a.v. het inwendig product gelden de volgende grondeigenschappen

$$(2.4) \quad \begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x} & (\text{commutativiteit}) \\ (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z} & (\text{distributiviteit}) \end{cases}$$

Zijn $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ de bij een Cartesiaans assenstelsel behorende eenheidsvectoren dan volgt uit (2.3)

$$(2.5) \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} .$$

Uit (2.2) en (2.5) volgt voor $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$ en $\vec{y} = y_i \vec{e}_i$ de volgende uitdrukking voor het inwendig product

$$(2.6) \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

of in verkorte notatie

$$(2.7) \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = x_i y_i .$$

Indien $\vec{x}$ en $\vec{y}$ hierbij eenheidsvectoren zijn stemt (2.6) blijkens (2.3) overeen met de formule (1.15).

Anderzijds kan (2.6) dienen ter definitie van het inwendig product. De definitie (2.3) heeft een zekere voorkeur omdat hierbij geen coördinatenstelsel gebruikt is. Bij de keuze van (2.7) als definitie moet aangetoond worden dat het rechterlid van (2.6) niet verandert bij overgang op een ander assenstelsel.

Het uitwendige product $\vec{x} \times \vec{y}$ van twee vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ wordt a.v. gedefinieerd. Hebben OP, OQ en θ dezelfde betekenis als boven dan is $\vec{x} \times \vec{y}$ een vector OR waarvan de lengte $x y \sin \theta$ is en waarvan de richting bepaald is door die eenheidsnormaal $\vec{n}$ van vlak OPQ welke met OP en OQ een rechtse schroef vormt.

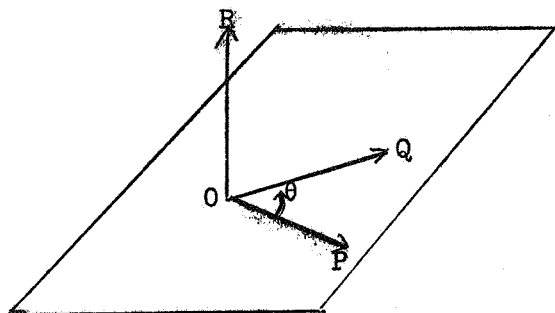


fig. 2.3

We hebben dus

$$(2.8) \quad \vec{x} \times \vec{y} = x y \sin \theta \vec{n}.$$

Als speciaal geval geldt voor Cartesiaanse eenheidsvectoren (rechtssysteem!)

$$(2.9) \quad \begin{cases} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \end{cases}.$$

Uit (2.8) volgt i.h.b.

$$(2.10) \quad \vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x},$$

en

$$(2.11) \quad \vec{x} \times \vec{x} = 0.$$

Evenals voor het inwendig product geldt de distributieve regel

$$(2.12) \quad (\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z},$$

hetgeen meetkundig bewezen kan worden.

Schrijven we met Cartesiaanse eenheidsvectoren $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$ en $\vec{y} = y_i \vec{e}_i$ dan volgt uit bovenstaande regels

$$(2.13) \quad \vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Uit (2.6) en (2.13) volgt voor de drie vectoren $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ met de pijlen OP, OQ en OR

$$(2.14) \quad \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Uit de eigenschappen van de determinant volgt

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) &= \vec{y} \cdot (\vec{z} \times \vec{x}) = \vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = \\ &= -\vec{x} \cdot (\vec{z} \times \vec{y}) = -\vec{y} \cdot (\vec{x} \times \vec{z}) = -\vec{z} \cdot (\vec{y} \times \vec{x}). \end{aligned}$$

Meetkundig heeft $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})$ de betekenis van de gerichte inhoud van het op OP, OQ, OR beschreven parallelipedum. Inderdaad is $|\vec{y} \times \vec{z}|$ het oppervlak van het op OQ en OR beschreven parallelogram. Uit de betekenis van het inwendig product (2.3) volgt dat de overblijvende factor juist de bijbehorende hoogte is (zie fig. 2.4)

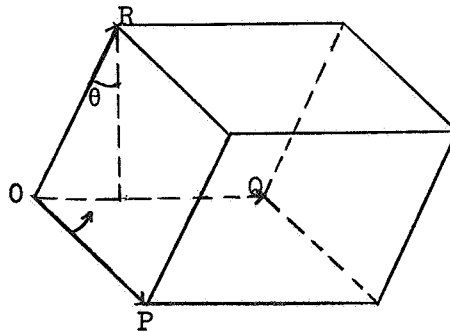


fig. 2.4

Bij toepassingen gebruiken we nogal eens de volgende regel

$$(2.16) \quad \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y}(\vec{z} \cdot \vec{x}) - \vec{z}(\vec{x} \cdot \vec{y}) .$$

3. Axiomatische behandeling van de vectorrekening

We werken met scalars $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ en vectoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$.
Scalars zijn reële getallen. Vectoren worden gedefinieerd door hun rekenregels. De axioma's worden verdeeld in een aantal groepen. De eerste drie groepen definiëren een lineaire vectorruimte. De laatste groep zegt iets over het inwendig product.

Voor vectoren is een optelling gedefinieerd met de volgende eigenschappen (additieve groep)

$$\text{Ia} \quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}, \quad \text{de optelling is commutatief.}$$

$$\text{Ib} \quad \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}, \text{ de optelling is associatief.}$$

$$\text{Ic} \quad \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}, \quad \text{er is een nulvector.}$$

$$\text{Id} \quad \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}, \quad \text{er is een inverse.}$$

Voor vectoren is een vermenigvuldiging met een scalar gedefinieerd met de eigenschappen

$$\text{IIa} \quad \alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x} .$$

$$\text{IIb} \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x} .$$

Voor beide bewerkingen gelden de distributieve regels

$$\text{IIIa} \quad \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} .$$

$$\text{IIIb} \quad (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x} .$$

Uit deze axioma's kunnen verschillende eigenschappen afgeleid worden. We noemen bijv.

$$(3.1) \quad \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}, \quad 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}, \quad (-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x} .$$

Uitgaande van deze axioma's kan men meetkundige begrippen invoeren door de vectoren te identificeren met pijlen OP met vastgekozen beginpunt 0. Aldus vormen de vectoren $\lambda \vec{a}$ voor variabele λ een rechte lijn en

de vectoren $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ analoog een plat vlak.

Vectoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ heten lineair afhankelijk indien tussen hen een lineaire betrekking bestaat van de vorm

$$(3.2) \quad \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n = 0 \text{ (niet alle } \lambda_i \text{ nul).}$$

De dimensie van de vectorruimte (welke in onze beschouwingen drie is) wordt uitgedrukt in het dimensie-axioma:

Er bestaan drie onafhankelijke vectoren. Vier vectoren zijn altijd afhankelijk.

Drie onafhankelijke vectoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vormen een zgn. basis. Een willekeurige vector $\vec{x}$ kan men schrijven als

$$(3.3) \quad \vec{x} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}.$$

De getallen (λ, μ, ν) heten de componenten van $\vec{x}$ t.o.v. de gegeven basis.

Voor vectoren is een inwendig product gedefinieerd met de volgende eigenschappen

$$\text{IVa} \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

$$\text{IVb} \quad \lambda \vec{x} \cdot \vec{y} = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y})$$

$$\text{IVc} \quad (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$$

$$\text{IVd} \quad \vec{x} \cdot \vec{x} > 0 \quad \text{mits } \vec{x} \neq \vec{0}.$$

Vectoren waarvoor geldt $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ noemen we orthogonaal of loodrecht.

De uitdrukking $\vec{x} \cdot \vec{x}$ heet de kwadraatlengte van $\vec{x}$ en $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ de lengte.

Vaak gebruiken we orthogonale eenheidsvectoren, een zgn. orthonorme basis, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ waarvoor geldt

$$(3.4) \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}.$$

Een orthonorme basis bepaalt een Cartesiaans assenstelsel. Uit de axioma's volgt t.o.v. een orthonorme basis

$$(3.5) \quad \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \quad \vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3,$$
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Met de bovenstaande axioma's kan de gehele vector- en tensorrekening opgebouwd worden zonder dat een beroep op meetkundige eigenschappen behoeft te worden gedaan.

4. Algebraïsche behandeling van de vectorrekening

We gaan uit van rechtlijnige coördinatenstelsels $OX_1X_2X_3$ met een vast gekozen oorsprong en willekeurig gekozen coördinaatassen. De coördinaten (x_1, x_2, x_3) van het stelsel X en die (x_1^i, x_2^i, x_3^i) van het getransformeerde stelsel hangen samen volgens de lineaire transformatie (1.1) of

$$(4.1) \quad x_i^i = t_{ij} x_j, \quad \det(t_{ij}) \neq 0.$$

Deze transformaties vormen een groep, de affiene groep.

Een vector v is gedefinieerd door zijn componenten v_i t.o.v. het stelsel X met de volgende transformatieregel

$$(4.2) \quad v_i^i = t_{ij} v_j.$$

Scalaire vermenigvuldiging en optelling van twee vectoren $v(v_i)$ en $w(w_i)$ is gedefinieerd als

$$(4.3) \quad \lambda v + \mu w = (\lambda v_i + \mu w_i)$$

Inderdaad volgen de componenten $(\lambda v_i + \mu w_i)$ dezelfde transformatieregel (4.2).

De metriek in de aldus gevormde vectorruimte wordt ingevoerd door ons te beperken tot de groep van orthogonale transformaties (1.17) nml.

$$(4.4) \quad \begin{cases} x_i^i = t_{ij} x_j, & x_i = t_{ji} x_j^i \\ t_{ij} t_{ik} = t_{ji} t_{ki} = \delta_{jk} \end{cases}$$

Tenslotte wordt de schroefzin ingevoerd door ons te beperken tot de kleinere groep van orthogonale transformaties waarvoor geldt

$$(4.5) \quad \det(t_{ij}) = 1.$$

Voortaan gebruiken we uitsluitend deze laatste transformatiegroep, die van de rechtse Cartesiaanse coördinatenstelsels.

Het inwendig product van twee vectoren v_i en w_i wordt gedefinieerd als

$$(4.6) \quad v_i w_i.$$

Inderdaad is deze uitdrukking een (invariante) scalar welke dus niet van de keuze van het assenstelsel afhangt.

$$\text{Bewijs: } v_i w_i = t_{ij} t_{ik} v_j w_k = \delta_{jk} v_j w_k = v_i w_i.$$

De verificatie van de in de vorige paragrafen besproken axioma's en eigenschappen zijn aan de lezer overgelaten. De bespreking van het uitwendig product zal bij de behandeling van de tensoralgebra worden gegeven.

5. Tensoralgebra

We leggen aan onze beschouwingen de transformatiegroep van rechtse Cartesiaanse assenstelsels ten grondslag. Deze is bepaald door de formules (4.4) en (4.5).

Een tensor T van de orde m is gedefinieerd door zijn componenten $T_{i_1 i_2 \dots i_m}$ t.o.v. het stelsel X met de volgende transformatieregel

$$(5.1) \quad T'_{i_1 i_2 \dots i_m} = t_{i_1 j_1} t_{i_2 j_2} \dots t_{i_m j_m} T_{j_1 j_2 \dots j_m}.$$

Een tensor van de orde m bezit dus 3^m componenten. Een tensor van de orde nul is een (invariante) scalar welke bij transformatie niet verandert.

Een tensor van de orde één is een vector.

Een voorbeeld van een tensor van de orde twee is δ_{ij} . Deze tensor is invariant bij transformatie.

Inderdaad is

$$\delta_{i'j'} = t_{i'i} t_{j'j} \delta_{ij}$$

Een voorbeeld van een (invariante) tensor van de orde drie wordt geleverd door het ϵ -symbool ϵ_{ijk} dat gedefinieerd wordt als

$$(5.2) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} x_i y_j z_k.$$

M.a.w.

$$(5.3) \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{bij twee of drie gelijke indices} \\ 1 & \text{bij even permutatie 1, 2, 3} \\ -1 & \text{bij oneven permutatie van 1, 2, 3} \end{cases}$$

De tensoreigenschap van ϵ_{ijk} volgt uit de identiteit

$$\epsilon_{i'j'k'} = t_{i'i} t_{j'j} t_{k'k} \epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} t_{i'1} & t_{i'2} & t_{i'3} \\ t_{j'1} & t_{j'2} & t_{j'3} \\ t_{k'1} & t_{k'2} & t_{k'3} \end{vmatrix}$$

Een ander voorbeeld van een tensor van de tweede orde wordt verkregen als het zgn. direct product $v_i w_j$ van twee vectoren v en w .

Inderdaad geldt de transformatieregel

$$v_{i'} w_{j'} = t_{i'i} t_{j'j} v_i w_j.$$

Dit is een bijzonder geval van het direct product van twee willekeurige tensoren.

Voorbeeld:

$$S_{ijklm} \stackrel{\text{def}}{=} T_{ij} U_{klm}$$

De transformatieregels van T en U leiden onmiddellijk tot de tensortransformatie van S .

Op voor de hand liggende wijze kunnen we een tensor met een scalar vermenigvuldigen en kunnen we twee tensoren van dezelfde orde optellen. Aldus kunnen we bijv. uit T_{ijk} en U_{ijk} de tensor $\lambda T_{ijk} + \mu U_{ijk}$ afleiden.

Contractie van een tensor betekent dat twee indices gelijkgesteld worden. De sommatieconventie hierop toegepast leidt tot een tensor waarvan de orde met twee verlaagd is.

Voorbeeld: Uit T_{ijkl} leiden we door contractie $k = l$ de volgende tensor af $S_{ij} = T_{ijkk}$.
Dat S_{ij} een tensor is blijkt a.v.

$$\begin{aligned} S'_{ij} &= T'_{ijkk} = t_{ip} t_{jq} t_{kr} t_{ks} T_{pqrs} = \\ &= t_{ip} t_{jq} \delta_{rs} T_{pqrs} = t_{ip} t_{jq} S_{pq}. \end{aligned}$$

We geven de volgende toepassingen.

a. De vectoren v_i en w_i bepalen een tensor $v_i w_j$.

Contractie levert een tensor van de orde nul d.i. een invariante scalar $v_i w_i$, het inwendig product.

b. Uit de tensor ϵ_{ijk} en de vectoren v_i en w_i volgt de tensor $\epsilon_{ijk} v_l w_m$.
Tweemalige contractie geeft de vector $\epsilon_{ijk} v_j w_k$, het uitwendig product (verg. 2.11).

c. Contractie van de tensor $\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn}$ leidt tot de tensor $\epsilon_{ijp} \epsilon_{klp}$.
Zonder moeite blijkt dat

$$(5.4) \quad \epsilon_{ijp} \epsilon_{klp} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}.$$

Uit deze betrekking volgt de regel

$$(5.5) \quad \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y}(\vec{z} \cdot \vec{x}) - \vec{z}(\vec{x} \cdot \vec{y}).$$

We gaan nu nog wat nader in op tensoren van de tweede orde T_{ij} .
Voor deze tensoren kunnen we ook de matrixnotatie bezigen

$$(5.6) \quad (T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

De tensor heet symmetrisch als $T_{ij} = T_{ji}$ en anti-symmetrisch als

$$T_{ij} = -T_{ji}.$$

Aangezien

$$(5.7) \quad T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}),$$

kunnen we elke tensor schrijven als de som van een symmetrische en een anti-symmetrische tensor.

Uit een tensor T_{ij} kunnen we een invariante scalar

$$(5.8) \quad \delta_{ij} T_{ij} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

en een (invariante) vector

$$(5.9) \quad \epsilon_{ijk} T_{jk} = (T_{12} - T_{21}, T_{23} - T_{32}, T_{31} - T_{13})$$

afleiden.

De scalar $\delta_{ij} T_{ij}$ heet het spoor van T_{ij} . Voor een symmetrische tensor is $\epsilon_{ijk} T_{jk} = 0$. De symmetrie is dus een invariante eigenschap.

We beschouwen nu alleen symmetrische tensoren. Aan zo'n tensor kan men de volgende tweedegraadsvorm toevoegen

$$(5.10) \quad T(x) = T_{ij} x_i x_j.$$

Aan een symmetrische tensor in de oorsprong 0 kan men dus het meetkundig beeld verbinden van een tweedegraadsoppervlak, bijv. $T(x) = 1$, waarvan 0 het middelpunt is. Dit kan een drieassige hyperboloïde of een ellipsoïde zijn. Bij de meeste toepassingen geldt het laatste. De hoofdasstransformatie van een dergelijk oppervlak geeft de mogelijkheid een dussdanig assenstelsel te vinden dat de componenten met ongelijke indices verdwijnen. D.w.z. het is mogelijk de tensor a.v. op hoofdasen te transformeren

$$(5.11) \quad (T_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

met als representatieve kwadriek

$$(5.12) \quad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1.$$

Een tensor met $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, meetkundig corresponderend met een bol, heet isotroop. De tensor δ_{ij} is een voorbeeld van een isotrope tensor.

In de fysica wordt de spanningstoestand in een elastisch medium beschreven door een met een drie-assige ellipsoïde corresponderende tensor. De hydrostatische druk in een vloeistof is een isotrope tensor $p \delta_{ij}$.

Opgaven

1. Een systeem T_{ij} dat een willekeurige vector a_i in een andere vector b_i overvoert volgens $T_{ij} a_j = b_i$ is een tensor.
2. Een systeem T_{ijk} dat een willekeurige tensor van de tweede orde A_{ij} in een vector b_i transformeert volgens $T_{ijk} A_{jk} = b_i$ is een tensor.

6. Ruimtekrommen

Hoewel de meeste beschouwingen in deze paragraaf onafhankelijk zijn van het gebruikte coördinatenstelsel is het vaak prettig een vast Cartesiaans coördinatenstelsel $OX_1X_2X_3$ gekozen te denken. Een ruimtekromme is bepaald door een vector welke van een parameter t afhangt.

$$(6.1) \quad \vec{x} = \vec{r}(t)$$

of in componenten $x_i = r_i(t)$. In de meetkundige representatie is $\vec{x}$ de pijl OP waarbij P de ruimtekromme doorloopt.

Het boogelement ds van de ruimtekromme is bepaald door

$$(6.2) \quad ds = |\vec{r}| dt .$$

De booglengte van $P(t_0)$ tot $P(t)$ is dus

$$(6.3) \quad s = \int_{t_0}^t |\vec{r}(\tau)| d\tau$$

Voor theoretische doeleinden kunnen we voor de parameter t de booglengte s , gemeten vanuit een willekeurig begin, gekozen denken. Uit (6.2) volgt $|\vec{r}| = 1$ of

$$(6.4) \quad \vec{r}^2 = 1$$

d.w.z. $\vec{r}$ is een eenheidsvector.

Uit $\vec{r} = \lim(\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s))/\Delta s$ volgt dat $\vec{r}$ de richting van de raaklijn in P heeft.

Volgens Taylor is

$$(6.5) \quad \vec{r}(s + \Delta s) = \vec{r}(s) + \Delta s \vec{r}(s) + \frac{1}{2} \Delta^2 s \vec{r}'(s) + \dots$$

Het vlak door drie naburige punten die in de limiet in P samenvallen bevat de vectoren $\vec{r}$, $\vec{r}'$ en $\vec{r}''$. Aldus is het osculatievlak dat in P een driepuntige aanraking heeft bepaald door

$$(6.6) \quad \vec{x} = \vec{r}(s) + \lambda \vec{r}'(s) + \mu \vec{r}''(s).$$

Uit (6.4) volgt door differentiatie

$$(6.7) \quad \vec{r} \cdot \vec{r}'' = 0.$$

De vector $\vec{r}''$ staat dus loodrecht op de raaklijnenvector $\vec{r}$ en bepaalt in P de hoofdnormaal. We stellen $|\vec{r}''(s)| = \rho^{-1}$ en noemen ρ^{-1} de kromming en ρ de kromtestraal. We beschikken nu in P over de eenheidsvectoren $\vec{r}(s)$, $\rho \vec{r}''(s)$. We definiëren

$$(6.8) \quad \vec{n}_1 = \vec{r}(s), \quad \vec{n}_2 = \rho \vec{r}''(s), \quad \vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

De eenheidsvectoren $\vec{n}_i$ in P vormen een orthogonaal drietal, het zgn. triëder van Serret-Frenet.

Van fundamenteel belang zijn de volgende formules

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \vec{n}_1 &= \frac{1}{\rho} \vec{n}_2 \\ \vec{n}_2 &= -\frac{1}{\rho} \vec{n}_1 + \frac{1}{\tau} \vec{n}_3 \\ \vec{n}_3 &= -\frac{1}{\tau} \vec{n}_2 \end{aligned}$$

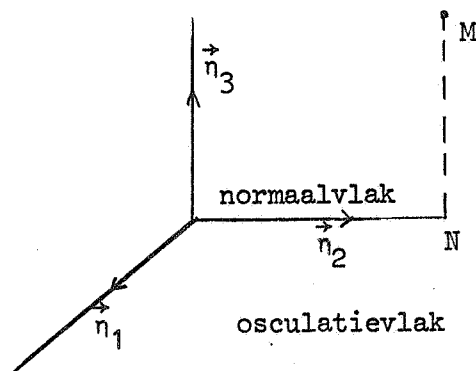
De eerste van dit drietal is niets anders dan de definitie van $\vec{n}_2$.

De derde formule volgt uit het gemakkelijk te bewijzen feit dat

$\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_1 = \vec{n}_3 \cdot \vec{n}_3 = 0$. De evenredigheidscoëfficiënt τ^{-1} heet de torsie

en τ de torsiestraal. De tweede formule volgt uit $\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = 0$ en

$\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = -\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = -\rho^{-1}$ en $\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = -\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = \tau^{-1}$. Het teken van τ is zodanig gekozen dat bij een rechtse schroef een positieve torsie past.



Voorbeeld $x_1 = a \cos \frac{c s}{a}$, $x_2 = a \sin \frac{c s}{a}$, $x_3 = \sqrt{1 - c^2} s$
 is voor $0 < c < 1$ een rechtsdraaiende schroef met de x_3 -as als schroef-
 as. De parameter s is de booglengte.

Er geldt

$$\vec{r} = \left(-c \sin \frac{c s}{a}, c \cos \frac{c s}{a}, \sqrt{1 - c^2} s \right)$$

$$\vec{r}' = \left(-\frac{c^2}{a} \cos \frac{c s}{a}, -\frac{c^2}{a} \sin \frac{c s}{a}, 0 \right).$$

Hieruit volgt $\rho = a/c^2$.

Uit $\vec{n}_1 = \vec{r}'$ en $\vec{n}_2 = \rho \vec{r}'$ volgt

$$\vec{n}_3 = \left(\sqrt{1 - c^2} \sin \frac{c s}{a}, -\sqrt{1 - c^2} \cos \frac{c s}{a}, c \right)$$

Uit de laatste formule van (6.9) volgt voor de torsie

$$\tau^{-1} = a^{-1} c \sqrt{1 - c^2}.$$

Zoals bekend bepalen vier punten een bol en drie punten een bol-
 lenbundel, d.w.z. een verzameling bollen met een gemeenschappelijke
 snijcirkel. In het bijzonder bepalen drie in P samenvallende punten van
 de ruimtekromme een bundel van bollen welke met de ruimtekromme drie in
 P samenvallende punten gemeen hebben, d.w.z. aan de ruimtekromme in P
 osculeren. De snijcirkel van de bundel is de kromtecirkel en ligt in het
 osculatievlak. We zullen bewijzen dat de straal van de kromtecirkel ρ
 is.

Een bol met middelpunt $M(\vec{m})$ en straal R heeft de vergelijking

$$(6.10) \quad (\vec{x} - \vec{m})^2 - R^2 = 0.$$

Osculatie met de ruimtekromme $\vec{x} = \vec{r}(s)$ betekent

$$(6.11) \quad \begin{aligned} (\vec{r} - \vec{m})^2 - R^2 &= 0 \\ (\vec{r} - \vec{m}) \cdot \vec{n}_1 &= 0 \\ (\vec{r} - \vec{m}) \cdot \frac{\vec{n}_2}{\rho} + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat M op de volgende rechte ligt

$$(6.12) \quad \vec{m} = \vec{r} + \rho \vec{n}_2 + \lambda \vec{n}_3.$$

Het middelpunt van de kromtecirkel is dus ($\lambda = 0$)

$$(6.13) \quad \vec{x}_N = \vec{r} + \rho \vec{n}_2$$

Het exemplaar uit de bundel met vierpuntige aanraking wordt bepaald door

$$(6.14) \quad (\vec{r} - \vec{m}) \cdot \frac{\vec{n}_3}{\tau} + \rho = 0$$

Het middelpunt van deze hyperosculerende bol is dus

$$(6.15) \quad \vec{x}_M = \vec{r} + \rho \vec{n}_2 + \tau \rho \vec{n}_3$$

7. Kinematica

We kiezen een vast Cartesisch assenstelsel $OX_1X_2X_3$. De beweging van een willekeurig punt P langs een ruimtekromme is bepaald door (6.1), d.w.z.

$$(7.1) \quad \vec{x} = \vec{r}(t)$$

waarbij t de tijd is. De eenheidsvectoren $\vec{n}_1$ en $\vec{n}_2$ resp. langs raaklijn en hoofdnormaal schrijven we hier als t en n.

Differentiatie van (7.1) geeft voor de snelheidsvector

$$(7.2) \quad \vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{t}.$$

Hierbij is $v = ds/dt$ de snelheid langs de baan. Differentiatie van (7.2) geeft i.v.m. (6.9) voor de versnellingsvector

$$(7.3) \quad \vec{a} = \vec{a}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$$

waarbij $a = d^2s/dt^2$ de versnelling langs de baan is.

Zij $\vec{f}$ een eenheidsvector. De drager van $\vec{f}$ beschouwen we als de rotatie-as l van een draaiing waarbij het punt P een cirkel om l beschrijft. Bij een infinitesimale rotatie om l over een hoek $d\phi$ gaat $P(\vec{r})$ over in $Q(\vec{r} + d\vec{r})$ waarbij de infinitesimale vector $PQ(d\vec{r})$ blijkbaar voldoet aan

$$(7.4) \quad d\vec{r} = \vec{f} d\phi \times \vec{r}.$$

Delen we beide leden door dt en vervangen we $d\phi/dt$ door ω , de hoeksnelheid, en vervolgens $\omega\vec{f}$ door $\vec{\omega}$ dan verkrijgen we

$$(7.5) \quad \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

We beschouwen een tweede coördinatenstelsel $OX'_1X'_2X'_3$ dat t.o.v. $OX_1X_2X_3$ een beweging uitvoert. We zullen eerst laten zien dat deze beweging steeds opgevat kan worden als een continue reeks van infinitesimale rotaties. Daartoe onderzoeken we de beweging van de eenheidsvectoren $\vec{e}'_i$. Een eenvoudige berekening toont aan dat er coëfficiënten α, β, γ bestaan zodanig dat

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \dot{\vec{e}}'_1 &= \gamma \vec{e}'_2 + \beta \vec{e}'_3 \\ \dot{\vec{e}}'_2 &= -\gamma \vec{e}'_1 + \alpha \vec{e}'_3 \\ \dot{\vec{e}}'_3 &= -\beta \vec{e}'_1 - \alpha \vec{e}'_2 \end{aligned}$$

Uit het nul zijn van de coëfficiënten-determinant volgt dat de vectoren $\vec{e}'_i$ in één vlak liggen. Gemakkelijk is in te zien dat er een vector $\vec{\omega}$ bestaat loodrecht op dit vlak zodanig dat

$$(7.7) \quad \dot{\vec{e}}'_i = \vec{\omega} \times \vec{e}'_i.$$

Vergelijking met (7.5) leert dat het systeem op elk tijdstip t een infinitesimale rotatie om de rotatieas $\vec{\omega}$ uitvoert. Deze as hangt zelf van de tijd af en beschrijft in het vaste systeem een kegel K en in het bewegende systeem een kegel K' . De beweging kan nu opgevat worden als een

een rollen van de kegel K^0 over K_0 .

Een bewegend punt P in het bewegende systeem kunnen we beschrijven door

$$(7.8) \quad \vec{r}(t) = x_1^0 \vec{e}_1^0 + x_2^0 \vec{e}_2^0 + x_3^0 \vec{e}_3^0.$$

De componenten x_i^0 bepalen de relatieve beweging van P in $OX_1^0 X_2^0 X_3^0$. De absolute beweging van P in $OX_1 X_2 X_3$ volgt door de eenheidsvectoren $\vec{e}_i^0$ als tijdsafhankelijke vectoren in $OX_1 X_2 X_3$ te beschouwen.

Gebruikmakend van (7.7) volgt uit (7.8) voor de absolute snelheid $\vec{v}_a$ en de relatieve snelheid $\vec{v}_r(\dot{x}_i^0)$

$$(7.9) \quad \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Differentiëren we nogmaals dan volgt voor de absolute versnelling $\vec{a}_a$ en de relatieve versnelling $\vec{a}_r(\ddot{x}_i^0)$

$$(7.10) \quad \vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}.$$

Is P vast verbonden aan het bewegende systeem dan heet de absolute versnelling de sleepversnelling $\vec{a}_s$.

Dus

$$(7.11) \quad \vec{a}_s = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}.$$

We kunnen (7.10) nu schrijven als

$$(7.12) \quad \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_s + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r.$$

De laatste term van het rechterlid heet de versnelling van Coriolis.

8. Gebogen vlakken

In deze paragraaf beschouwen we enkele eigenschappen van oppervlakken.

Deze kunnen in parametervorm voorgesteld worden door $x_i = r_i(u, v)$

of in symbolische schrijfwijze

$$(8.1) \quad \vec{x} = \vec{r}(u, v)$$

Een kromme op het oppervlak kunnen we bepalen door u en v als functies van een parameter t te beschouwen

$$(8.2) \quad u = u(t) \quad v = v(t).$$

De kromme heeft dus als parameter- vergelijking

$$(8.3) \quad \vec{x} = \vec{r} \{u(t), v(t)\}.$$

De raaklijn-vector is

$$(8.4) \quad \vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v}$$

en staat dus loodrecht op de vector $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$. Kiezen we op het oppervlak een punt P en beschouwen we de raaklijnen in P aan door P gaande krommen op het oppervlak dan liggen deze allen in het door r_u en r_v bepaalde vlak, het raakvlak in P:

$$(8.5) \quad \vec{x} = \vec{r} + \lambda \vec{r}_u + \mu \vec{r}_v.$$

Het lijnelement ds gevormd door twee naburige punten $P(\vec{r})$ en $Q(\vec{r} + d\vec{r})$ op het oppervlak is bepaald door

$$(8.6) \quad ds^2 = (d\vec{r})^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2,$$

zodat we kunnen schrijven

$$(8.7) \quad ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2,$$

waarbij E, F en G bepaald zijn door

$$(8.8) \quad E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v.$$

De normaalvector $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ heeft de kwadraatlengte

$$(8.9) \quad (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)^2 = \vec{r}_u^2 \vec{r}_v^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = EG - F^2.$$

We kunnen dus als eenheids-normaalvector invoeren de vector $\vec{e}$ bepaald door

$$(8.10) \quad \vec{e} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

In het zeer speciale geval dat het beschouwde oppervlak juist het x_3 -vlak is kunnen we u en v opvatten als de Cartesiaanse coördinaten x_1 en x_2 . Zijn $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ de eenheidsvectoren van het Cartesiaanse coördinatenstelsel dan reduceert (8.1) zich tot

$$(8.11) \quad \vec{x} = \vec{e}_1 u + \vec{e}_2 v,$$

zodat $\vec{r}_u = \vec{e}_1$ en $\vec{r}_v = \vec{e}_2$. We hebben dus $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$ zodat (8.7) zich vereenvoudigt tot de stelling van Pythagoras.

Keren we weer terug tot het algemene geval dan vormen de krommen $u = \text{constant}$ en $v = \text{constant}$ op het beschouwde oppervlak een generalisatie van de rechten $x_1 = \text{constant}$ en $x_2 = \text{constant}$ op het x_3 -vlak. Het oppervlak-element $d\sigma$ is een infinitesimaal parallellogram gevormd door de parameterkrommen u , $u + du$, v , $v + dv$. De grootte is bepaald door het tripel-product $\vec{e} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$ zodat i.v.m. (8.10)

$$(8.12) \quad d\sigma = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} du dv.$$

Bij beschouwingen over de kromming in P van door P gaande krommen op het oppervlak speelt de verandering van $\vec{e}$ een rol.

Daartoe voeren we nieuwe symbolen L , M , N in welke bepaald zijn door

$$(8.13) \quad L = -\vec{r}_u \cdot \vec{e}_u, \quad 2M = -\vec{r}_u \cdot \vec{e}_v - \vec{r}_v \cdot \vec{e}_u, \quad N = -\vec{r}_v \cdot \vec{e}_v.$$

Met behulp van deze symbolen kunnen we schrijven

$$(8.14) \quad -d\vec{r} \cdot d\vec{e} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2.$$

Doorgaans noemt men het rechterlid van (8.7) de eerste fundamenteelvorm en dat van (8.14) de tweede fundamenteelvorm.

We beschouwen nu een of andere kromme op het oppervlak welke door P gaat. De eenheidsvectoren volgens raaklijn, hoofdnormaal en binormaal in P duiden we aan met resp. $\vec{t}$, $\vec{n}$ en $\vec{b}$.

Voor alle punten van de kromme geldt uiteraard

$$(8.15) \quad \vec{t} \cdot \vec{e} = 0.$$

Differentiatie van deze uitdrukking langs de kromme, d.w.z. naar de booglengte-parameter s geeft

$$(8.16) \quad \frac{\vec{n}}{\rho} \cdot \vec{e} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d\vec{e}}{ds},$$

zodat volgens (8.7) en (8.14)

$$(8.17) \quad \frac{1}{\rho} \vec{n} \cdot \vec{e} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

Het opmerkelijke van deze voor de krommingstheorie uiterst belangrijke formule is dat het rechterlid alleen van de vorm van het oppervlak in P afhangt en niet van de door P gaande kromme.

Als eerste belangrijke conclusie vermelden we:

Alle krommen welke in P hetzelfde osculatievlak bezitten hebben dezelfde kromming in P.

Het is dus in zekere zin voor de krommingstheorie voldoende wanneer we ons beperken tot vlakke doorsneden. Kiezen we de vlakke doorsneden met een gemeenschappelijke tangent $\vec{t}$, d.w.z. een vlakkenwaaier, dan volgt uit (8.17)

$$\frac{\cos \theta}{\rho} = \text{constant}$$

waarbij θ de hoek tussen de oppervlaknormaal $\vec{e}$ en het snijvlak is. Uit deze formule volgt dat hij zogenaamde normaaldoorsneden d.w.z. snijvlakken door de oppervlaknormaal $\vec{e}$ de kromtestraal ρ maximaal is. Noemen we deze kromtestraal R dan is dus

$$(8.18) \quad \rho = R \cos \theta ,$$

hetgeen bekend staat als de stelling van Meusnier.

Uiteindelijk kunnen we ons dus beperken tot normaaldoorsneden waarbij dus de kromtestraal R alleen afhangt van de richting $t = dv/du$ van $\vec{t}$. Uit (8.17) volgt

$$(8.19) \quad R = \frac{E + 2F t + G t^2}{L + 2M t + N t^2} ,$$

of

$$(8.20) \quad (RN - G)t^2 + 2(RM - F)t + (RL - E) = 0.$$

Een maximale of minimale waarde van R treedt op als

$$(8.21) \quad (RM - F)^2 = (RN - G)(RL - E)$$

of

$$(8.22) \quad R^2(LN - M^2) + R(2MF - LG - NE) + (EG - F^2) = 0.$$

De twee hieruit volgende extrema $R_{1,2}$, i.h.a. een maximum en een minimum, heten de hoofdkromtestralen in het beschouwde punt.

Gewoonlijk noemt men $K = 1/R_1 R_2$ de kromming volgens Gauss en $H = R_1^{-1} + R_2^{-1}$ de gemiddelde kromming.

Gemakkelijk volgt uit (8.22) dat o.a.

$$(8.23) \quad 2H = \frac{EN - 2 FM + GL}{EG - F^2}.$$

Opgave

Ga een en ander na voor de torus

$$\begin{cases} x = (a + b \cos v) \cos u \\ y = (a + b \cos v) \sin u \\ z = b \sin v \end{cases} \quad (a > b > 0).$$

9. De nabla-operator

Is in ieder punt van de ruimte, of althans een deel van de ruimte, een tensor $T_{i_1 i_2 \dots i_m}(x_1, x_2, x_3)$ gegeven dan spreken we van een tensorveld. Ter wille van de eenvoud nemen we aan dat de tensorcomponenten voldoende vaak continu differentieerbare functies zijn voor de gehele ruimte, desnoods met uitzondering van enkele punten, lijnen of vlakken.

We voeren nu de nabla-operator $\nabla(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ in en we tonen aan dat deze operator zich als een vector gedraagt.

Inderdaad geldt bij coördinatentransformatie volgens de kettingregel

$$(9.1) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = t_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

zodat $\frac{\partial}{\partial x_i}$ de transformatieregel van een vector volgt. Uit dit feit volgt onmiddellijk

Hoofdregeel

De partiële afgeleiden $\frac{\partial}{\partial x_j}$ van een tensor $T_{i_1 i_2 \dots i_m}$ van de m^e orde bepalen een tensor van de orde $m + 1$.

We passen deze regel meteen toe op een aantal belangrijke eenvoudige gevallen en wel die waarbij T een scalar of een vector is.

1. scalarveld $s(x_1, x_2, x_3)$

Volgens de hoofdregel bepaalt het scalarveld s het vectorveld ∇s of $\frac{\partial s}{\partial x_i}$. De vector ∇s noemt men de gradiënt van de scalar s . Bij sommige beschouwingen spreekt men i.p.v. een scalarveld van een potentiaalveld. Hierbij is het gebruikelijk de uit de potentiaal s afgeleide vector van een min-teken te voorzien.

Men zegt dan dat het vectorveld $\vec{v}$ afgeleid is van een potentiaal s indien $\vec{v} = -\nabla s$.

Aan de gradiënt van een scalarveld kan men een meetkundige betekenis hechten. De vlakken $s(x_1, x_2, x_3) = \text{constant}$ vormen de zogenaamde niveauvlakken (aequipotentiaalvlakken). Door een punt $P(x_1, x_2, x_3)$ gaat juist één equipotentiaalvlak. Is $Q(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3)$ een naburig punt dan geldt de ontwikkeling van Taylor

$$(9.2) \quad s(Q) = s(P) + \frac{\partial s(P)}{\partial x_i} \xi_i + \dots$$

Ligt Q dicht bij P op het door P gaande equipotentiaalvlak dan is

$$s(Q) = s(P) \text{ en dus is } \frac{\partial s}{\partial x_i} \xi_i = 0.$$

Vatten we (ξ_1, ξ_2, ξ_3) op als locale Cartesiaanse coördinaten in P dan is dus

$$(9.3) \quad \frac{\partial s}{\partial x_i} \xi_i = 0$$

de vergelijking van het raakvlak in P aan het door P gaande equipotentiaalvlak. Uit (9.3) volgt dat de gradiënt $\frac{\partial s}{\partial x_i}$ hierop loodrecht staat, d.w.z. de gradiënt $\frac{\partial s}{\partial x_i}$ is gericht volgens de i normaal aan het door P gaande equipotentiaalvlak. Kiezen we in (9.2) Q op deze normaal zodat de ξ_i -vector dezelfde richting heeft als de gradiëntvector dan blijkt dat

$$(9.4) \quad \left| \frac{\partial s}{\partial x_i} \right| = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{s_Q - s_P}{Q P}.$$

We bespreken in dit verband nog in het kort het begrip richtingsafgeleide. We nemen aan dat $\vec{f}(f_1, f_2, f_3)$ een eenheidsvector is.

De richtingsafgeleide in de richting $\vec{f}$ van de potentiaalfunctie $s(x_1, x_2, x_3)$ in het punt $P(x_1, x_2, x_3)$ is gedefinieerd als

$$(9.5) \quad \frac{\partial s}{\partial f} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{s(x_1 + \epsilon f_1, x_2 + \epsilon f_2, x_3 + \epsilon f_3) - s(x_1, x_2, x_3)}{\epsilon}$$

Uit (9.2) volgt onmiddellijk dat we deze richtingsafgeleide kunnen schrijven als

$$(9.6) \quad \frac{\partial s}{\partial f} = \frac{\partial s}{\partial x_i} f_i = \vec{f} \cdot \nabla s$$

Tenslotte merken we op dat naast de twee notaties $\frac{\partial s}{\partial x_i}$ en ∇s voor de gradiënt van s ook de symbolische notatie $\text{grad } s$ veelⁱ gebruikt wordt.

2. vectorveld $\vec{v}(x_1, x_2, x_3)$

Passen we volgens de hoofdregel de ∇ -operator toe op een vectorveld $\vec{v}$ dan kunnen we een scalarveld $\nabla \cdot \vec{v}$ en een nieuw vectorveld $\nabla \times \vec{v}$ afleiden. De scalar $\nabla \cdot \vec{v}$ heet de divergentie van $\vec{v}$ ook wel geschreven als $\text{div } \vec{v}$.

De vector $\nabla \times \vec{v}$ heet de rotatie van $\vec{v}$ ook wel geschreven als $\text{rot } \vec{v}$ of $\text{curl } \vec{v}$.

Gebruikmakend van de index-methode vormen we uit de vector v_i de tensor $\frac{\partial}{\partial x_i} v_j$. Door contractie vormen we hieruit de divergentie welke nu geschreven wordt als $\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$.

De rotatie wordt hieruit afgeleid als $\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k$.

De meetkundige betekenis van divergentie en rotatie zullen we later behandelen.

We vatten de verschillende notaties hieronder nog even samen.

$$(9.7) \quad \nabla s = \text{grad } s \quad \frac{\partial s}{\partial x_i}$$

$$(9.8) \quad \nabla \cdot \vec{v} = \text{div } \vec{v} \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$(9.9) \quad \nabla \times \vec{v} = \text{rot } \vec{v} = \text{curl } \vec{v} \quad \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

Uiteraard kunnen we de ∇ -operator meer dan één keer toepassen. In het bijzonder kunnen we uit een gradiëntveld weer de divergentie en de rotatie vormen. Hierbij maken we gebruik van de operator van Laplace Δ welke gedefinieerd is als

$$(9.10) \quad \Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Aldus heeft men

$$(9.11) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} s = \Delta s, \operatorname{rot} \operatorname{grad} s = 0.$$

Tenslotte vermelden we nog de gemakkelijk te verifiëren formules

$$(9.12) \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0, \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \Delta \vec{v}.$$

10. Integratie

Een scalarfunctie $\phi(x_1, x_2, x_3)$ kunnen we integreren over een ruimtekromme, een gebogen oppervlak en een deel van de ruimte.

Bij integratie over een ruimtekromme $x_i = x_i(s)$ integreren we doorgaans naar de booglengte s en schrijven we

$$(10.1) \quad \int_A^B \phi ds = \int_{s_A}^{s_B} \phi\{x_1(s), x_2(s), x_3(s)\} ds.$$

Bij sommige beschouwingen is het nodig een vectoriële lijnintegraal te gebruiken waarbij het boogelement een infinitesimale vector $d\vec{s}$ is.

Is $\vec{t}$ de eenheidsvector langs de raaklijn dan is dus

$$d\vec{s} = \vec{t} ds$$

en schrijven we

$$(10.2) \quad \int_A^B \phi d\vec{s} = \int_A^B \phi \vec{t} ds.$$

Feitelijk stelt dit een lijnintegraal van een vectorfunctie voor, maar het is duidelijk wat hieronder verstaan moet worden. Algemeen is de lijnintegraal van een tensorfunctie over een ruimtekromme de lijnintegraal van elk van zijn componenten.

Uiteraard kunnen we (10.2) ook opvatten als de limiet van een eindige vectoriële som. Is de ruimtekromme bepaald door de parametervergelijking $\vec{r}(t)$ waarbij t niet noodzakelijk de booglengte is dan is

$$(10.3) \quad d\vec{s} = \vec{r}' dt$$

en kunnen we (10.2) vervangen door

$$(10.4) \quad \int_{t_A}^{t_B} \phi\{x_i(t)\} \vec{r}' dt.$$

Bij integratie over een gesloten ruimtekromme bezigen we de notatie van de kringintegraal $\oint$.

Bij integratie van een vectorveld $\vec{v}$ over een ruimtekromme $\vec{r}(s)$ ontmoeten we vaak het volgende type

$$(10.5) \quad \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Is bijv. $\vec{v}$ een krachtveld dan stelt (10.5) de verrichte arbeid voor bij beweging van een eenheid van massa van A naar B langs de ruimtekromme.

Bij integratie van een scalarfunctie ϕ over een deel van een gebogen oppervlak maken we gebruik van de parameter voorstelling (8.3). Volgens (8.12) kunnen we schrijven

$$(10.6) \quad \iint \phi d\sigma = \iint \phi \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

waarbij E , F en G door (8.8) gegeven zijn.

Door (10.6) is integratie over het gebogen oppervlak $\vec{x} = \vec{r}(u, v)$ teruggebracht tot integratie in het beeldvlak (u, v) waarbij u en v als rechthoekige coördinaten kunnen worden beschouwd.

Bij sommige beschouwingen is het nuttig een vectoriële oppervlakte-integraal toe te passen waarbij het vlakelement een vectoriële betekenis $d\vec{\sigma}$ heeft. Is namelijk $\vec{n}$ de eenheidsnormaal in een punt van het oppervlak (zie (8.10)) dan is

$$(10.7) \quad d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma.$$

We schrijven analoog aan (10.2)

$$(10.8) \quad \iint \phi d\vec{\sigma} = \iint \phi \vec{n} d\sigma.$$

We kunnen hierbij weer dezelfde opmerking maken als boven dat integratie van een tensorveld de integratie van alle componenten betekent. Bij integratie van een vectorveld $\vec{v}$ over een gebogen oppervlak $\vec{r}(u, v)$ ontmoeten we vaak het volgende type

$$(10.9) \quad \iint \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \iint \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Uit (8.10) volgt dat we hiervoor kunnen schrijven

$$(10.10) \quad \iint \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \iint \vec{v} \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v du dv.$$

De volume-integraal

$$(10.11) \quad \iiint \phi d\tau, \quad d\tau = dx_1 dx_2 dx_3,$$

waarbij geïntegreerd wordt over een deel van de ruimte geeft geen aanleiding tot bijzondere opmerkingen.

11. Green, Gauss, Stokes

De stellingen van Green en Gauss welke we eerst zullen behandelen berusten op een eenvoudig lemma dat betrekking heeft op de omzetting van een volume-integraal in een oppervlakte-integraal.

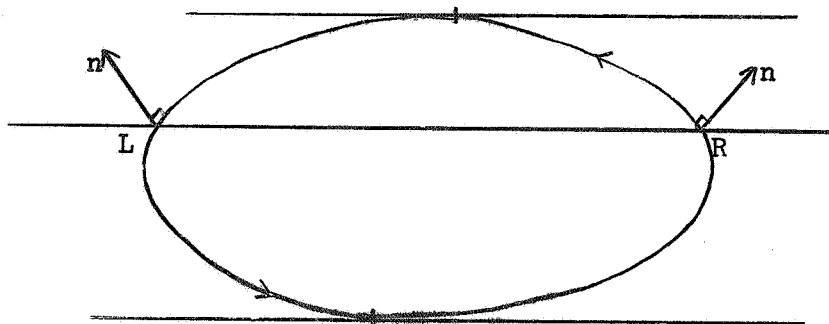
Bij het analogon in R_2 is dit de transformatie van een gebiedintegraal in een lijnintegraal. We beschouwen eerst het R_2 -geval. Het is hierbij nodig zogenaamde normaalgebieden te beschouwen. Een normaalgebied is een enkelvoudig samenhangend gebied omsloten door een eivormige randkromme welke door een willekeurige snijlijn in precies twee punten gesneden wordt.

Voor een normaalgebied G met randkromme C geldt bij integratie van een scalarveld $a(x_1, x_2)$ het lemma

$$(11.1) \quad \iint_G \nabla a d\sigma = \oint_C \vec{n} a ds,$$

waarbij $\vec{n}$ de eenheidsnormaal in een punt van C is.

Wordt C in positieve zin doorlopen, dan wijst $\vec{n}$ naar buiten.



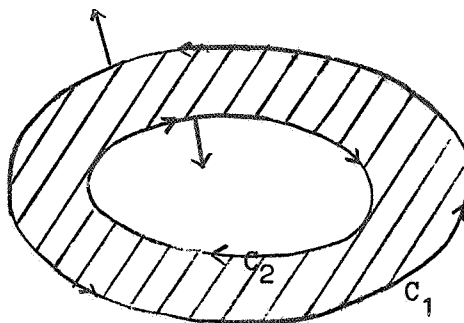
Voor het bewijs van (11.1) is het voldoende de x_1 -component te beschouwen. Snijdt een horizontaal $x_2 = \text{constant } C$ in L (links) en R (rechts) dan is

$$\iint_G \frac{\partial}{\partial x_1} a \, dx_1 \, dx_2 = \int dx_2 \int_L^R \frac{\partial a}{\partial x_1} \, dx_1 = \int (a_R - a_L) dx_2.$$

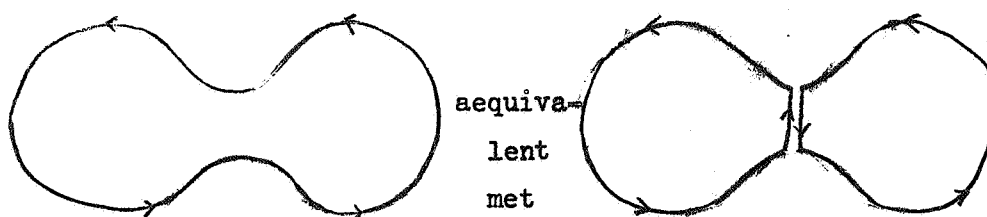
Aangezien voor het rechterdeel van C geldt $dx_2 = n_1 ds$, voor het linkerdeel $dx_2 = -n_1 ds$ kan de laatst verkregen term in bovenstaande herleiding geschreven worden als

$$\int_R a n_1 ds + \int_L a n_1 ds = \oint_C a n_1 ds.$$

Men ziet gemakkelijk in dat het bovenstaande lemma eveneens geldt voor gebieden welke uit een eindig aantal normaalgebieden samengesteld zijn. Als voorbeeld beschouwen we een ringvormig gebied begrensd door twee krommen C_1 en C_2



We kunnen dit gebied beschouwen als het verschil van twee normaalgebieden. Bij toepassing van (11.1) moeten we C opvatten als de som van C_1 doorlopen in positieve zin en C_2 doorlopen in negatieve zin. Bij de vereniging van twee normaalgebieden moet men bedenken dat in het tweede lid van (11.1) de bijdragen over de gemeenschappelijke grens tegen elkaar wegvallen zoals onderstaande figuur laat zien.



In drie dimensies gelden soortgelijke overwegingen. Hierbij beschouwen we normaalgebieden in de vorm van ovoïden. Het analogon van (11.1) is

$$(11.2) \quad \iiint_V \nabla a \, d\tau = \iint_S \vec{n} a \, d\sigma.$$

Bij het bewijs kunnen we ons tot dat van één component beperken. Analooch aan dat van het tweedimensionale geval maken we hier gebruik van $dx_2 \, dx_3 = \pm n_1 \, d\sigma$ met $+$ voor rechts en $-$ voor links.

Op min of meer mechanische wijze volgen uit (11.1) en (11.2) een aantal belangrijke stellingen welke gewoonlijk naar Gauss (soms Ostrogradsky) en Green genoemd worden. We beperken ons tot het driedimensionale geval. Vervangen we a door een vectorveld a_i dan volgt uit (11.2) natuurlijk

$$(11.3) \quad \iiint \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \, d\tau = \iint n_i a_j \, d\sigma.$$

Contractie $i = j$ geeft de stelling van Gauss

$$(11.4) \quad \iiint \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \, d\tau = \iint n_i a_i \, d\sigma.$$

of in symbolische notatie

$$(11.4a) \quad \iiint \operatorname{div} \vec{a} \, d\tau = \iint \vec{a} \cdot \vec{d}\sigma,$$

of ook wel

$$(11.4b) \quad \iiint \nabla \cdot \vec{a} \, d\tau = \iint \vec{n} \cdot \vec{a} \, d\sigma.$$

Zijn a en b gegeven scalarvelden dan kunnen we voor a_j in (11.3) het vectorveld $a \frac{\partial b}{\partial x_j}$ substitueren. Hieruit volgt

$$(11.5) \quad \iiint a \frac{\partial^2 b}{\partial x_i \partial x_j} \, d\tau + \iiint \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial b}{\partial x_j} \, d\tau = \iint a n_i \frac{\partial b}{\partial x_j} \, d\sigma.$$

Contractie $i = j$ geeft de (eerste) stelling van Green (verg. (9.6))

$$(11.6) \quad \iiint a \Delta b \, d\tau + \iiint \nabla a \cdot \nabla b \, d\tau = \iint a \frac{\partial b}{\partial n} \, d\sigma,$$

waarbij dus $\partial/\partial n$ differentiatie langs de naar buiten gerichte normaal aanduidt.

Verwisselen we a en b dan leidt aftrekking tot de (tweede) stelling van Green

$$(11.7) \quad \iiint a \Delta b - b \Delta a \, d\tau = \iint (a \frac{\partial b}{\partial n} - b \frac{\partial a}{\partial n}) \, d\sigma.$$

Bij toepassing van de genoemde stellingen dient men te bedenken dat deze alleen gelden voor velden welke in de beschouwde gebieden vrij van singulariteiten zijn, d.w.z. velden welke door i.h.a. twee maal continue differentieerbare functies bepaald zijn.

Volgens de stelling van Stokes, welke alleen in R_3 van interesse is, geldt onder ruime voorwaarden voor een vectorveld $\vec{a}$

$$(11.8) \quad \iint_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{d}\sigma = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{s},$$

waarbij S een gebogen oppervlak is dat begrensd wordt door de randkromme C . Hierbij dient de omloopszin van C aangepast te worden aan de oriëntatie van S volgens de rechtse schroef.

De voorwaarden van de geldigheid van (11.8) blijken vanzelf uit die van het navolgende bewijs.

Volgens (10.10) kan het linkerlid van (11.8) geschreven worden als

$$\iint (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot (\nabla \times \vec{a}) du dv = \iint \epsilon_{ijk} \epsilon_{ipq} r_{uj} r_{vk} \partial_p a_q du dv.$$

Met toepassing van (5.4) kunnen we hiervoor schrijven

$$\begin{aligned} & \iint \{ r_{vk} (r_{uj} \partial_j) a_k - r_{uj} (r_{vk} \partial_k) a_j \} du dv = \\ & = \iint (\vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial u} - \vec{r}_u \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial v}) du dv = \\ & = \iint \{ \frac{\partial}{\partial u} (\vec{a} \cdot \vec{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v} (\vec{a} \cdot \vec{r}_u) \} du dv. \end{aligned}$$

Op de laatste uitdrukking passen we de twee-dimensionale stelling van Gauss toe. Is (n_1, n_2) de eenheidsnormaal van de randkromme in het (u, v) -vlak en (t_1, t_2) de eenheidsvector langs de raaklijn, dan is de laatste verkregen uitdrukking gelijk aan

$$\begin{aligned} & \int \{ (\vec{a} \cdot \vec{r}_v) n_1 - (\vec{a} \cdot \vec{r}_u) n_2 \} ds(u, v) = \\ & = \int \{ (\vec{a} \cdot \vec{r}_u) t_1 + (\vec{a} \cdot \vec{r}_v) t_2 \} ds(u, v) = \\ & = \int \vec{a} \cdot (\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}) ds = \int \vec{a} \cdot \vec{t} ds, \end{aligned}$$

waarbij $\vec{t}$ de eenheidstangent aan de ruimtekromme is.

De stelling van Stokes welke hiermee bewezen is kunnen we ook schrijven als

$$(11.9) \quad \int_S \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{a} d\sigma = \oint_C \vec{t} \cdot \vec{a} ds.$$

of

$$(11.10) \quad \int_S \epsilon_{ijk} n_i \frac{\partial a_k}{\partial x_j} d\sigma = \oint_C a_i dx_i.$$

Met behulp van de stellingen van Gauss en Stokes kunnen we nu ook een andere iets meer meetkundige interpretatie geven van de begrippen divergentie en rotatie in een punt P van een vectorveld $\vec{v}$. Kiezen we om P een klein volume-elementje, bijv. een bolletje V_ϵ met straal ϵ , dan volgt uit de stelling van Gauss (11.2) dat

$$(11.11) \quad \text{div } \vec{v} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_S \vec{n} \cdot \vec{v} d\sigma}{V_\epsilon}.$$

Kiezen we analoog door P een georiënteerd klein vlakelementje bijv. een cirkel S_ϵ met straal ϵ , dan geldt volgens de stelling van Stokes (11.9)

$$(11.12) \quad \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{v} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_\epsilon} \vec{t} \cdot \vec{v} \, ds}{S_\epsilon}$$

Aldus vinden we de projectie van $\text{rot } \vec{v}$ langs de eenheidsnormaal $\vec{n}$ van S_ϵ . Voor de volledige bepaling van de rotatie moeten we dus drie vlak-elementjes gebruiken.

12. Scalarpotentiaal en vectorpotentiaal

Voor een vectorveld $\vec{v}$ dat van een potentiaal $\phi(x_1, x_2, x_3)$ afgeleid is volgens $\vec{v} = \text{grad } \phi$ geldt blijkens (9.11)

$$(12.1) \quad \text{rot } \vec{v} = 0.$$

We zullen nu aantonen dat omgekeerd een vectorveld $\vec{v}$ waarvoor (12.1) geldt van een potentiaal afgeleid kan worden.

De voorwaarde (12.1) is dus nodig en voldoende opdat $\vec{v}$ een gradiëntveld is. In de onderstelling dat $\vec{v}$ aan de voorwaarden van de stelling van Stokes voldoet hebben we voor elke gesloten kromme

$$(12.2) \quad \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$$

We kiezen een willekeurig vast punt P_0 en vormen de lijnintegraal

$$(12.3) \quad \phi = \int_{P_0}^P \vec{v} \cdot d\vec{s},$$

waarbij $P(x_1, x_2, x_3)$ een willekeurig variabel punt is. Uit (12.2) volgt dat het rechterlid van (12.3) niet van de van P_0 tot P gekozen weg afhangt. Aldus definieert het rechterlid van (12.3) een scalarfunctie $\phi(P)$. Is $Q(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, x_3 + \delta x_3)$ een dicht bij $P(x_1, x_2, x_3)$ gelegen punt en ondergaat ϕ bij overgang van P naar Q de verandering $\delta\phi$ dan is met verwaarlozing van kwadratische en hogere termen

$$\delta\phi = \int_P^Q \vec{v} \cdot d\vec{s} = v_1 \delta x_1 + v_2 \delta x_2 + v_3 \delta x_3,$$

zodat inderdaad

$$\text{grad } \phi = (v_1, v_2, v_3).$$

Aan gezien P_0 willekeurig gekozen kan worden is de scalaire potentiaal ϕ op een additieve constante na bepaald.

Bij vele fysische problemen komen potentiaalvelden voor welke door lineaire superpositie opgebouwd kunnen worden uit het volgende potentiaalveld waarbij het punt P_0 een singulier punt is, d.w.z. waar $\phi = \infty$. Bij de wiskundige beschouwing van deze velden kan men met veel voordeel gebruik maken van het fysische beeld van elkaar aantrekkende puntmassa's. Aldus is de gravitatiepotentiaal van een zich in P_0 bevindend massapunt met de massa m gelijk aan

$$(12.4) \quad \phi = \frac{m}{PP_0}$$

Kiezen we ter wille van de eenvoud P_0 in de oorsprong dan hebben we dus het potentiaalveld

$$(12.5) \quad \phi = \frac{m}{r} = \frac{m}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

Aan $\nabla\phi$ kunnen we het beeld verbinden van de naar 0 gerichte aantrekkingskracht

$$(12.6) \quad \vec{v} = \text{grad } \phi = \left(-\frac{mx_1}{r^3}, -\frac{mx_2}{r^3}, -\frac{mx_3}{r^3} \right).$$

We weten reeds dat $\text{rot } \vec{v} = 0$. Een eenvoudige berekening leert het in zekere zin verrassende resultaat dat ook $\text{div } \vec{v} = 0$ is.

We vinden dus

$$(12.7) \quad \Delta \frac{1}{r} = 0,$$

hetgeen uiteraard in de oorsprong geen betekenis heeft. Op de volgende wijze kunnen we echter toch de oorsprong in de beschouwingen betrekken. Zij P een willekeurig punt en V een om P geslagen klein bolletje met middelpunt P en straal ε dan geldt volgens de stelling van Gauss

$$(12.8) \quad \int_V \Delta\phi d\tau = \int_S \vec{n} \cdot \text{grad } \phi d\sigma.$$

Verschilt P van o en is ϵ zo klein dat het bolletje de oorsprong niet bevat dan zijn beide leden van (12.8) voor de potentiaal (12.5) wegens (12.7) gelijk aan nul. Valt daarentegen P met O samen dan kunnen we aan het linkerlid van (12.8) niet meer de waarde nul geven omdat (12.7) in O niet geldt. Het rechterlid van (12.8) kunnen we gemakkelijk berekenen nml.

$$\int_S \vec{n} \cdot \text{grad } \phi \, d\sigma = \int_S \frac{\partial \phi}{\partial r} \, d\sigma = 4\pi\epsilon^2 \frac{-m}{\epsilon} = -4\pi m.$$

Derhalve geldt voor elke om O geslagen bol, hoe klein ook

$$(12.9) \quad \int \Delta \phi \, d\tau = -4\pi m.$$

We drukken dit feit uit door (12.7) vollediger te schrijven als

$$(12.10) \quad \Delta \phi = -4\pi m \, \delta(x_1, x_2, x_3),$$

waarbij $\delta(x_1, x_2, x_3)$ de delta-functie van Dirac is.

Uit de potentiaal (12.4) kunnen we gemakkelijk algemenere typen potentiaalvelden afleiden. We kunnen bijvoorbeeld een verzameling van punten P_o vormen die een lijn C_o vormen met massadichtheid $\mu(s_o)$. Dit betekent dat het lijnelement ds_o de massa $\mu(s_o)ds_o$ bezit. De gravitatie-potentiaal wordt nu

$$(12.11) \quad \phi(P) = \int_{C_o} \frac{\mu(s_o)ds_o}{PP_o}$$

Hiervoor geldt natuurlijk weer $\Delta \phi = 0$ behalve voor punten op de lijn C .

Nog algemener kunnen we de punten P_o een materieel lichaam met de massadichtheid $\mu(P_o)d\tau_o$ laten vormen.

De gravitatiepotentiaal wordt

$$(12.12) \quad \phi(P) = \int_{V_o} \frac{\mu(P_o)d\tau_o}{PP_o}.$$

Bij deze uitdrukking kunnen we integratie zonder meer tot de gehele ruimte uitstrekken door $\mu = 0$ te nemen waar geen massa is. De vergelijking (12.10) gaat nu over in de zogenaamde vergelijking van Poisson

$$(12.13) \quad \Delta \phi = -4\pi\mu.$$

Voor een vectorveld $\vec{v}$ dat afgeleid is van een zogenaamde vectorpotential $\vec{f}$, d.w.z.

$$(12.14) \quad \vec{v} = \text{rot } \vec{f},$$

geldt blijkens (9.12)

$$(12.15) \quad \text{div } \vec{v} = 0.$$

Het zal weer blijken dat een vectorveld waarvoor (12.15) geldt afgeleid kan worden van een vectorpotential $\vec{f}$.

We stellen voorop dat deze vectorpotential $\vec{f}$ door (12.14) zeker niet ondubbelzinnig bepaald is. Aan $\vec{f}$ kunnen we zonder bezwaar de gradiënt van een of andere scalar $\vec{g} = \text{grad } \phi$ toevoegen aangezien immers $\text{rot } \vec{g} = \text{rot grad } \phi = 0$. We kunnen deze vrijheid van keuze benutten om een vectorpotential af te leiden waarvan de divergentie nul is. Is namelijk $\vec{f}$ een of andere vectorpotential welke aan (12.14) voldoet dan kunnen we $\vec{f}$ vervangen door $\vec{f} + \vec{g}$, $\vec{g} = \text{grad } \phi$ waarbij $\vec{g}$ moet voldoen aan $\text{div } \vec{g} = -\text{div } \vec{f}$, d.w.z.

$$(12.16) \quad \Delta \phi = -\text{div } \vec{f}.$$

We kunnen deze vergelijking interpreteren als de vergelijking van Poisson (12.12) voor de gravitatiepotential van een massaverdeling met massadichtheid $\frac{1}{4\pi} \text{div } \vec{f}$. Volgens (12.12) is dus

$$(12.17) \quad \phi = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{\text{div } \vec{f}_0 d\tau_0}{PP_0}.$$

Er blijft tenslotte nog het probleem een aan (12.14) voldoende vectorpotential $\vec{f}(f_1, f_2, f_3)$ te construeren. We proberen daartoe een oplossing met $f_3 = 0$. Uit (12.14) volgt dan

$$(12.18) \quad v_1 = -\frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \quad v_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x_3}, \quad v_3 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

We kunnen dus stellen

$$(12.19) \quad f_1 = \int_0^{x_3} v_2 dx_3 - \gamma(x_1, x_2), \quad f_2 = -\int_0^{x_3} v_1 dx_3, \quad f_3 = 0,$$

waarbij γ een nog nader te bepalen functie van x_1 en x_2 is.

De derde betrekking (12.18) levert daartoe

$$v_3 = - \int_0^{x_3} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) dx_3 + \frac{\partial \gamma}{\partial x_2}.$$

In aanmerking genomen dat volgens (12.15) $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ is kunnen we dit herleiden tot

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_2} = v_3 - \int_0^{x_3} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_3 = v_3(x_1, x_2, 0),$$

waaruit gemakkelijk een oplossing voor γ volgt. Inderdaad lukt het dus met de keuze (12.19) aan (12.14) te voldoen.

13. Orthogonale kromlijnige coördinaten

Bij sommige beschouwingen is het gewenst van andere dan Cartesiaanse coördinaten gebruik te maken. Daartoe denken we de ruimte verdeeld in drie stelsels aequipotentiaalvlakken.

(13.1) $q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3)$, $q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3)$, $q_3 = q_3(x_1, x_2, x_3)$,
zodanig dat, afgezien van eventuele singulariteiten, door elk punt $P(x_1, x_2, x_3)$ drie elkaar onderling loodrecht snijdende vlakken gaan. Gewoonlijk gaat men in de praktijk uit van de inverse transformatie

(13.2) $x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3)$, $x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3)$, $x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3)$.

We beschouwen nu de infinitesimale omgeving van een niet singulier punt P dat we dus hetzij door de coördinaten (x_1, x_2, x_3) of de coördinaten (q_1, q_2, q_3) bepaald kunnen denken. Er zijn dan in P twee locale orthogonale rechtlijnige coördinatenstelsels aanwezig. Het eerste wordt gevormd door de originele Cartesiaanse coördinaten waarin de infinitesimale vector $d\vec{s}$ de componenten (dx_1, dx_2, dx_3) heeft. Het tweede wordt gevormd door de drie raaklijnen aan de door de q -vlakken gevormde snijlijnen. De infinitesimale vector $d\vec{s}$ heeft hierin de componenten (dq_1, dq_2, dq_3) .

Het verband tussen beide wordt gelegd door de betrekkingen

$$(13.3) \quad dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j$$

en invers

$$(13.4) \quad dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial x_j} dx_j$$

welke uit (13.1) en (13.2) door differentiatie volgen.

De veronderstelde orthogonaliteit van de q-vlakken betekent dat

$$(13.5) \quad \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = 0 \quad \text{voor } j \neq k.$$

Het boogelement ds^2 kunnen we in de q-coördinaten dan schrijven als

$$(13.6) \quad ds^2 = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_j dq_k = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2,$$

waarbij dus

$$(13.7) \quad h_i^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2.$$

De overgang van het locale x-coördinatenstelsel tot het locale q-coördinatenstelsel kunnen we dus opvatten als een draaiing gevolgd door een verandering van de eenheidsvectoren met de factoren h_1, h_2, h_3 . Het volume-element $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3$ kunnen we in de q-coördinaten dus schrijven als

$$(13.8) \quad d\tau = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Is ϕ een scalarveld dan zijn de componenten van $\nabla\phi$ in het locale q-coördinatenstelsel in het punt P blijkbaar

$$(13.9) \quad \nabla\phi = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial q_3}\right).$$

We beschouwen nu een vectorveld $\vec{v}$ en we vragen naar uitdrukkingen voor de divergentie en de rotatie in een punt P.

De componenten van $\vec{v}$ in de q-richtingen noemen we hierbij v_1, v_2, v_3 . Ter bepaling van de divergentie maken we gebruik van (11.11). Voor het volume-element kiezen we het infinitesimale blokje dat begrensd wordt door de vlakken $q_1, q_1 + \delta q_1, q_2, q_2 + \delta q_2, q_3, q_3 + \delta q_3$. Bij de berekening van $\int \vec{n} \cdot \vec{v} d\sigma$ moeten we de bijdragen nemen van elk van de zes zijvlakken. Die in de q_1 -richting leveren tezamen $\frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 h_2 h_3) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3$. Een eenvoudige berekening geeft tenslotte

$$(13.10) \quad \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (v_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (v_3 h_1 h_2) \right\}.$$

In het bijzondere geval dat $\vec{v}$ de gradiënt van de scalarpotentiaal ϕ is levert combinatie van (13.9) en (13.10)

$$(13.11) \quad \Delta \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \right) \right\}$$

Op analoge wijze kunnen we de componenten van rot $\vec{v}$ in de richtingen van dq_1 , dq_2 en dq_3 met behulp van (11.12) afleiden. We vermelden slechts het resultaat

$$(13.12) \quad \nabla \times \vec{v} = \left\{ \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} (v_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (v_2 h_2) \right), \frac{1}{h_3 h_1} \left(\frac{\partial}{\partial q_3} (v_1 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_1} (v_3 h_3) \right), \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (v_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (v_1 h_1) \right) \right\}.$$

De verkregen resultaten passen we toe op de bij toepassingen veelvuldig voorkomende cylindercoördinaten en bolcoördinaten.

1. Cylindercoördinaten

Uitgaande van de Cartesiaanse coördinaten x , y , z worden de cylindercoördinaten r , θ , z gedefinieerd door

$$(13.13) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

Bij deze transformatie zijn alle punten van de z -as singulier.

De coördinaatvlakken zijn bollen $r = \text{constant}$, vlakken door de z -as $\theta = \text{constant}$ en vlakken $z = \text{constant}$.

Het lijnelement is

$$(13.14) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2.$$

Het volume element is

$$(13.15) \quad d\tau = r dr d\theta dz.$$

De gradiënt van een scalar ϕ is volgens (13.9)

$$(13.16) \quad \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right).$$

Volgens (13.11) is

$$(13.17) \quad \Delta\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

Voor de divergentie en de rotatie van een vector $\vec{v}$ geldt volgens (13.10) en (13.12)

$$(13.18) \quad \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial\theta} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

$$(13.19) \quad \nabla \times \vec{v} = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial v_3}{\partial\theta} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_2) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial\theta} \right\}.$$

2. Bolcoördinaten

Uitgaande van de Cartesiaanse coördinaten x, y, z worden de bolcoördinaten r, θ, ψ gedefinieerd door

$$(13.20) \quad x = r \sin \theta \cos \psi, \quad y = r \sin \theta \sin \psi, \quad z = r \cos \theta.$$

Bij deze transformatie is alleen de oorsprong singulier. De coördinaatvlakken zijn bollen $r = \text{constant}$, omwentelingskegels $\theta = \text{constant}$ met de z -as als omwentelingsas en meridiaanvlakken $\psi = \text{constant}$ d.w.z. platte vlakken door de z -as.

Het lijnelement is

$$(13.21) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2.$$

Het volume-element is

$$(13.22) \quad d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\psi.$$

De gradiënt van een scalar ϕ is volgens (13.5)

$$(13.23) \quad \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\phi}{\partial\psi} \right).$$

De laplace operator van een scalar ϕ is volgens (13.11)

$$(13.24) \quad \Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2\phi}{\partial\psi^2}$$

Voor een vectorveld $\vec{v}$ met volgens bolcoördinaten bepaalde componenten (v_1, v_2, v_3) geldt als speciaal geval van (13.10) en (13.12)

$$(13.25) \quad \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_1) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \psi}.$$

$$\nabla \times \vec{v} = \left\{ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta v_3) - \frac{\partial}{\partial \psi} (r v_2) \right), \right.$$

$$\left. \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \psi} (v_1) - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta v_3) \right), \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v_2) - \frac{\partial}{\partial \theta} (v_1) \right) \right\}.$$

14. Elasticiteit

Volgens Helmholtz (1858) kan de deformatie van een elastisch lichaam lokaal beschreven worden als de som van een translatie, rotatie en een vervorming (uitrekking of samendrukking) langs drie onderling loodrechte assen.

Als bij een kleine deformatie het punt $P(x_1, x_2, x_3)$ overgaat in $Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$(14.1) \quad \xi_i = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3),$$

dan geldt volgens de ontwikkeling van Taylor

$$(14.2) \quad d\xi_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j + \dots$$

Bij onze beschouwingen nemen we aan dat de uitwijkingen u_i dermate klein zijn dat kwadratische en hogere termen in u_i verwaarloosd kunnen worden.

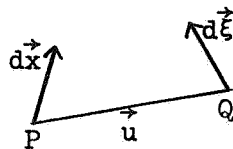


fig. 14.1

De transformatie (14.2) schrijven we als

$$(14.3) \quad d\xi_i = (\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) dx_j,$$

en voorts symbolisch als

$$(14.4) \quad d\vec{\xi} = (I + R + D)d\vec{x},$$

waarbij I de identiteit, R het antisymmetrische deel van $\partial_j u_i$ en D het symmetrische deel van $\partial_j u_i$ is. We herinneren ons uit de beschouwingen van §7 dat een rotatie van een vast lichaam om $\vec{\omega}(\omega_i)$ bepaald is door de transformatie

$$u_i = \epsilon_{ijk} \omega_j x_k,$$

of uitgeschreven

$$(14.5) \quad \begin{cases} u_1 = -\omega_3 x_2 + \omega_2 x_3 \\ u_2 = \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ u_3 = -\omega_2 x_1 + \omega_1 x_2 \end{cases}$$

Aldus stelt in (14.4) R een zuivere rotatie voor.

De translatie van P naar Q is reeds impliciet in aanmerking genomen.

Er rest nog de discussie van de symmetrische tensor

$$(14.6) \quad D \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}.$$

Volgens de hoofdassentransformatie van een symmetrische tensor is er een Cartesiaans coördinatenstelsel waarin de door D bepaalde transformatie van de volgende vorm wordt

$$(14.7) \quad \begin{cases} d\xi_1 = (1 + \alpha_1) dx_1, \\ d\xi_2 = (1 + \alpha_2) dx_2, \\ d\xi_3 = (1 + \alpha_3) dx_3. \end{cases}$$

Inderdaad is dit een vervorming langs drie onderling loodrechte assen.

We kunnen dus D een zuivere deformatie noemen.

De meetkundige betekenis van de symmetrische tensor D blijkt ook uit de verandering van het lijnelement.

Uit (14.2) volgt

$$(14.8) \quad d\xi_i d\xi_i = \left\{ \delta_{ij} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} dx_i dx_j.$$

Hieruit kunnen we o.a. afleiden dat een klein bolletje in P gedefor-
meerd wordt tot een ellipsoïde in Q waarvan de hoofdassen met die van
D overeenstemmen.

Bij sommige beschouwingen ontmoeten we de zogenaamde kubische dila-
tatie welke gedefinieerd is als de relatieve volumeverandering bij de
deformatie. Uit (14.7) volgt voor het daar geldende speciale coördina-
tenstelsel

$$\alpha = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_3) - 1.$$

In de lineaire benadering dus

$$(14.9) \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

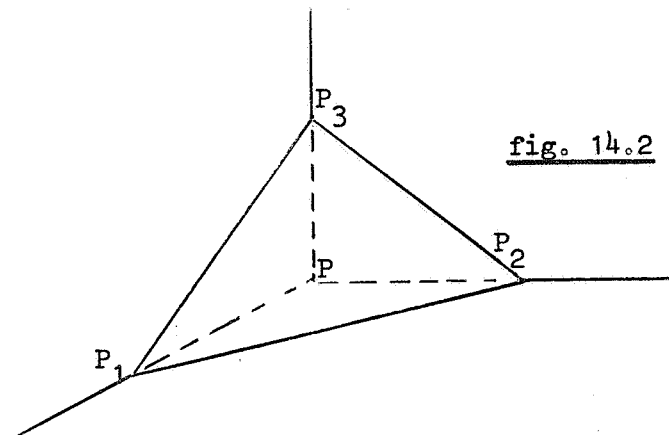
Het rechterlid is juist het spoor van D. De algemene uitdrukking is der-
halve

$$(14.10) \quad \alpha = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = D_{pp}.$$

De spanning in een punt P van een medium is impliciet gedefinieerd
door de kracht $\vec{K}$ die op een gericht oppervlakte element $d\vec{\sigma}$ werkt.
In het algemeen wijkt de richting van $\vec{K}$ af van die van de normaal $\vec{n}$
van het oppervlakte element. De component van $\vec{K}$ langs $\vec{n}$ heet de normaal-
spanning en het overblijvende deel de tangentialspanning. De eenvou-
digste afhankelijkheid van $\vec{K}$ als functie van $\vec{n}$ (of $d\vec{\sigma}$) is die van een
lineaire vectorfunctie

$$(14.11) \quad K_i = p_{ij} n_j.$$

Inderdaad blijkt dat deze betrekking het evenwicht tussen de op een
elementair volumen werkende krachten beschrijft. Beschouw namelijk een
elementair viervlak $PP_1P_2P_3$ waarvan de drie ribben PP_i evenwijdig aan de
coördinaatassen lopen (zie fig. 14.2)



Is $d\sigma_i$ de grootte van het tegenover P_i gelegen zijvlak en $d\sigma$ de grootte van het zijvlak $P_1P_2P_3$ en zijn $\vec{K}_i d\sigma_i$ en $\vec{K} d\sigma$ de erop werkende krachten dan vereist evenwicht dat

$$(14.12) \quad \vec{K} d\sigma = \vec{K}_1 d\sigma_1 + \vec{K}_2 d\sigma_2 + \vec{K}_3 d\sigma_3,$$

of uitgedrukt in de componenten van de eenheidsnormaal $\vec{n}$ van $P_1P_2P_3$

$$(14.13) \quad \vec{K} = \vec{K}_1 n_1 + \vec{K}_2 n_2 + \vec{K}_3 n_3.$$

Stellen we

$$(14.14) \quad \begin{cases} \vec{K}_1 = p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2 + p_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{K}_2 = p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2 + p_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{K}_3 = p_{13}\vec{e}_1 + p_{23}\vec{e}_2 + p_{33}\vec{e}_3 \end{cases}$$

dan stemt (14.13) precies met (14.11) overeen.

Door (14.11) is de spanningstoestand bepaald door een tensor p_{ij} , de spanningstensor.

Op de volumeelementen van een elastisch medium werken i.h.a. zowel oppervlakte-krachten als volume-krachten. De oppervlakte-krachten ontstaan door de spanningstoestand.

De volume-krachten kunnen o.a. het gevolg zijn van gravitatie. Voor een volumeelement kunnen de volume-krachten verwaarloosd worden t.o.v. de oppervlakte-krachten. Voor een willkeurig groot brok uit het medium is dit niet meer zo.

De oppervlakte-krachten $\vec{K}d\sigma$ werken hierbij alleen aan de begrenzing.
De volume-krachten $\vec{F}d\tau$ werken op alle volume-elementen. Evenwicht vereist nu dat

$$(14.15) \quad \iint \vec{K}d\sigma + \iiint \vec{F}d\tau = 0,$$

of in de indexnotatie na substitutie van (14.11)

$$(14.16) \quad \iint p_{ij}n_j d\sigma + \iiint F_i d\tau = 0$$

Volgens de stelling van Gauss kunnen we dit vervangen door

$$(14.17) \quad \iiint \left(\frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij} + F_i \right) d\tau = 0.$$

Aangezien dit moet gelden voor elk willekeurig deel van het medium is dus

$$(14.18) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij} + F_i = 0.$$

Bij evenwicht is niet alleen de resultante van alle krachten nul maar ook die van alle momenten t.o.v. een willekeurig punt. Naast (14.15) geldt dus ook

$$(14.19) \quad \iint \vec{r} \times \vec{K}d\sigma + \iiint \vec{r} \times \vec{F} d\tau = 0,$$

of analoog aan (14.16) en (14.17)

$$(14.20) \quad \iint \epsilon_{ijk} x_j p_{kl} n_l d\sigma + \iiint \epsilon_{ijk} x_j F_k d\tau = 0,$$

resp.

$$(14.21) \quad \iint \epsilon_{ijk} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j p_{kl}) + x_j F_k \right\} d\tau = 0,$$

zodat

$$(14.22) \quad \epsilon_{ijk} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j p_{kl}) + x_j F_k \right\} = 0.$$

Aangezien uit (14.18) volgt

$$(14.23) \quad \epsilon_{ijk} x_j \left(\frac{\partial}{\partial x_l} p_{kl} + F_k \right) = 0,$$

kunnen we door vergelijking van (14.22) en (14.23) besluiten tot

$$(14.24) \quad \varepsilon_{ijk} p_{kj} = 0,$$

d.w.z. de spanningstensor is symmetrisch

Er is dus een speciaal coördinatenstelsel, bepaald door de hoofdassen van p_{ij} , waarbij de spanningstensor de speciale vorm

$$(14.25) \quad \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix}$$

heeft. De elementen h_i , invarianten van p_{ij} , heten de hoofdspansingen.

Bij een elastisch medium zijn deformatie en spanning gekoppeld door de zogenaamde wet van Hooke (door Hooke op primitieve wijze geformuleerd). In het algemeen kunnen de deformatietensor (14.6) met componenten D_{ij} en de spanningstensor p_{ij} door een lineaire transformatie gekoppeld zijn volgens een tensor van de vierde orde

$$(14.26) \quad p_{ij} = \lambda_{ijkl} D_{kl}.$$

Inderdaad geldt (14.26) als de gegeneraliseerde wet van Hooke voor een anisotroop medium (bijv. bij kristallen). Voor een isotroop medium moet de tensor λ_{ijkl} onafhankelijk zijn van het gebruikte coördinatenstelsel. Daartoe stellen we (zie de appendix van deze paragraaf)

$$(14.27) \quad \lambda_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \nu \delta_{il} \delta_{jk}.$$

Aangezien echter p_{ij} en D_{kl} symmetrisch zijn blijken μ en ν gelijk te zijn.

Aldus kunnen we (14.26) vervangen door (verg. 14.10)

$$(14.28) \quad p_{ij} = \lambda \delta_{ij} D_{pp} + 2 \mu D_{ij}.$$

Deze belangrijke betrekking (Eng. stress-strain relation) vormt de basis van de elasticiteitstheorie. De constanten λ en μ worden gewoonlijk naar Lamé genoemd.

Uit (14.28) volgt onmiddellijk dat de hoofdspansingsrichtingen overeenstemmen met de hoofdrichtingen van de deformatie.

Contractie toegepast op (14.28) geeft

$$(14.29) \quad p_{ii} = (3\lambda + 2\mu) D_{ii}.$$

Het is nu niet moeilijk om (14.28) te inverteren. We vinden dan

$$(14.30) \quad D_{ij} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} p_{pp} + \frac{1}{2\mu} p_{ij}.$$

De bewegingsvergelijking van een elastisch medium volgt uit het dynamische krachtenevenwicht op een elementair blokje. Toevoeging van de traagheidskracht aan de statische evenwichts-betrekking (14.18) geeft aldus

$$(14.31) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

waarbij u_i (zie 14.1) de locale verplaatsing (uitwijking) is. We geven van deze vergelijking nog een toepassing welke o.a. van belang is voor het onderzoek van seismische trillingen (aardbevingen en ondergrondse explosies). Hierbij is $F_i \equiv 0$. Substitutie van de rek-trek relatie (14.28) in (14.31) leidt dan tot

$$(14.32) \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

waarbij θ de kubische dilatie is

$$(14.33) \quad \theta = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \vec{u}.$$

De bewegingsvergelijking (14.32) schrijven we in de symbolische notatie als

$$(14.34) \quad \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad } \theta = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}.$$

Nemen we van beide leden de divergentie dan volgt

$$(14.35) \quad \Delta \theta = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

We herkennen deze vergelijking als de golfvergelijking welke de voortplanting van golven met de snelheid c_1 beschrijft. Aldus beschrijft (14.35) bij een aardbeving bijv. de voortplanting van longitudinale trillingen.

Nemen we van beide leden van (14.34) de rotatie dan volgt

$$(14.36) \quad \Delta \text{rot } \vec{u} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \text{rot } \vec{u}}{\partial t^2}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Deze golfvergelijking beschrijft de voortplanting van transversale trillingen met de snelheid c_2 . Het blijkt dat de transversale trillingen zich langzamer voortplanten dan de longitudinale.

Appendix.

We bewijzen dat een willekeurige invariante tensor van de 4^e orde λ_{ijkl} , waarvan dus de componenten invariant zijn bij coördinatentransformatie, noodzakelijk van het type (14.27) is. Vier willekeurige vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ bepalen een aantal scalaire invarianten welke samengesteld kunnen worden uit de vier lengten a , b , c , d en de zes scalaire producten $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, enz. (Overigens zijn deze tien invarianten niet onderling onafhankelijk maar bestaat er tussen hen een zekere betrekking).

Nu is $\lambda_{ijkl} a_i b_j c_k d_l$ een scalaire invariant van deze vier vectoren welke homogeen en lineair in de componenten van elke vector is. Volgens het bovenstaande kan deze invariant samengesteld worden uit de zes scalaire producten en is er als enige mogelijkheid

$$\lambda_{ijkl} a_i b_j c_k d_l = \lambda a_i b_i c_j d_j + \mu a_i c_i b_j d_j + \nu a_i d_i b_j c_j,$$

waarbij λ , μ , ν zekere constanten zijn.

Deze betrekking nu impliceert de voorstelling (14.27).

15. Hydrodynamica

Een stromende vloeistof (of gas) kunnen we mathematisch beschrijven door een van de tijd t afhangend vectorveld $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$, waarbij v_i de snelheid is van het deeltje dat zich op de tijd t op de plaats (x_1, x_2, x_3) bevindt. Bij deze door Euler gegeven beschrijving interesseren we ons niet zozeer voor de door de individuele deeltjes gevormde banen maar eerder voor de stroomlijnen. De stroomlijnen zijn lijnen welke op een zeker tijdstip overal aan de snelheidsvectoren raken. Zij zijn dus bepaald door de gewone differentiaalvergelijkingen

$$(15.1) \quad \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}.$$

Op elk tijdstip t bestaat het systeem dus uit een stelsel van ∞^2 stroomlijnen. De baankrommen van de individuele deeltjes zijn daarentegen bepaald door de vergelijkingen

$$(15.2) \quad \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t),$$

waarbij de tijd nu de onafhankelijk variabele is.

In het bijzondere geval van een stationaire stroming, d.i. een stroming waarbij het vectorveld v_i niet van de tijd afhangt, vallen stroomlijnen en baankrommen samen.

Bij een vloeistof (of gas) zijn voor een passende mathematische beschrijving behalve de snelheid ook de dichtheid en de druk van belang. De dichtheid $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ is in het algemeen zowel een functie van plaats als van tijd. De vloeistof is in het algemeen dan ook samendrukbaar of compressibel. Echter kan men bij vele beschouwingen ρ als een constante beschouwen. In dat geval spreekt men van een onsamendrukbare vloeistof of van een incompressibele stroming.

Het principe van behoud van massa leidt bij stromende vloeistoffen tot de zogenaamde continuïteitsvergelijking.

Beschouw daartoe een willekeurig ruimtedeel V dat begrensd wordt door het gesloten oppervlak S . De verandering in de totale massa binnen V per tijdseenheid is gelijk aan de hoeveelheid welke per tijdseenheid door de begrenzing S heen gestroomd is. D.w.z.

$$- \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Toepassing van de stelling van Gauss op het rechterlid geeft

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right\} d\tau = 0.$$

Aangezien dit geldt voor een willekeurig ruimtedeel geldt

$$(15.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0,$$

hetgeen de continuïteitsvergelijking genoemd wordt.

In het bijzondere geval van een incompressibele stroming vereenvoudigt deze vergelijking zich tot

$$(15.4) \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Een ideale vloeistof wordt gekenmerkt door de volgende eigenschap. Op een willekeurig vlakelementje $d\sigma$ met eenheidsnormaal $\vec{n}$ werkt een kracht $\vec{K}d\sigma$ volgens

$$(15.5) \quad \vec{K} = -p \vec{n}.$$

Vergelijken we deze betrekking met (14.11) dan blijkt een ideale vloeistof gekarakteriseerd te worden door een isotrope spanningstensor $-p\delta_{ij}$. We noemen p de hydrostatische druk. (Druk en spanning hebben tegengesteld teken).

Een visceuse vloeistof of een vloeistof met inwendige wrijving wordt gekenmerkt door het optreden van schuifkrachten wanneer vloeistoflaagjes zich met een verschillende snelheid over elkaar heen bewegen. Hierbij bestaat de spanningstensor uit de hydrostatische druk en uit een symmetrische tensor welke opgebouwd is uit termen $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ welke de lokale snelheidsverandering beschrijven (zie (14.6)). Voorlopig zullen we ons met ideale vloeistoffen bezighouden.

Is $\vec{F}$ een uitwendige kracht per massa-eenheid dan geldt voor een niet stromende vloeistof de evenwichtsrelatie (14.18) die zich hier vereenvoudigt tot

$$(15.6) \quad \rho \vec{F} = \operatorname{grad} p.$$

Toevoeging van de traagheidskracht leidt dan tot de bewegingsvergelijking. De versnellingsvector a_i wordt uit de snelheidsvector $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ afgeleid door langs een baankromme te differentiëren. We schrijven met toepassing van (15.2)

$$(15.7) \quad a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3}.$$

De operator

$$(15.8) \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

noemen we de substantiële afgeleide (populair: meebeweegafgeleide).

De bewegingsvergelijking (soms naar Euler genoemd) kunnen we nu schrijven als

$$(15.9) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

We beschikken voor de vijf variabelen v_1, v_2, v_3, p, ρ nu over de continuïteitsvergelijking (15.3) en het drietal (15.9). Een vijfde vergelijking is de toestandsvergelijking waarbij de druk een gegeven functie van de dichtheid is en welke dus van zuiver fysische aard is

$$(15.10) \quad p = f(\rho).$$

In een aantal belangrijke gevallen is het snelheidsveld afgeleid van een potentiaal

$$(15.11) \quad \vec{v} = - \text{grad } \phi.$$

Men spreekt dan van een potentiaalstroming of van een rotatievrije stroming, aangezien nu $\text{rot } \vec{v} = 0$.

Is de stroming bovendien incompressibel dan voldoet de stromingspotentiaal blijkens (15.4) aan de potentiaalvergelijking

$$(15.12) \quad \Delta \phi = 0.$$

Voorbeeld

Als $\phi = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$, zodat dus $\Delta \phi = 0$, is

$$\vec{v} = (x_1, -x_2, 0).$$

De stroomlijnen zijn hyperbolen

$$x_1 x_2 = \text{constant}, \quad x_3 = \text{constant}.$$

In het bijzondere geval dat ϕ slechts van x_1 en x_2 afhangt reduceert (15.12) tot

$$(15.13) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0.$$

We kunnen ϕ dan opvatten als het reële deel van een analytische functie van de complexe variabele $x_1 + ix_2$. In het bovenstaande voorbeeld is $\phi = \text{re} \left\{ \frac{1}{2}(x_1 + ix_2)^2 \right\}$. Bij de studie van een vlakke stroming van een incompressibele ideale vloeistof, waarvoor dus (15.13) geldt, kunnen we met veel voordeel gebruik maken van de theorie van de analytische functies.

Indien de uitwendige kracht $\vec{F}$ in (15.9) afgeleid is van een potentiaal, $\vec{F} = - \text{grad } \phi$, kunnen we met gebruikmaking van de gemakkelijk te verifiëren relatie

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}),$$

en met behulp van

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \nabla \rho = \nabla \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} d\rho$$

(15.9) schrijven als

$$(15.14) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left\{ \frac{1}{2} v^2 + \phi + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\rho} \right\} = \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}.$$

Is de stroming rotatievrij, zodat $\vec{v} = - \text{grad } \phi$ dan is

$$\nabla \left\{ - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \phi + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\rho} \right\} = 0$$

en dus

$$(15.15) \quad \frac{1}{2} v^2 + \phi + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\rho} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = C(t),$$

waarbij het rechterlid alleen van de tijd afhangt. De laatste betrekking heet de vergelijking van Bernoulli voor een compressibele rotatievrije stroming.

Een andere versie van de vergelijking van Bernoulli heeft betrekking op een stationaire stroming van een incompressibele vloeistof onderworpen aan een conservatieve uitwendige kracht $- \text{grad } \phi$. Hierbij is de uitdrukking

$$(15.16) \quad \frac{1}{2} v^2 + \phi + \frac{p}{\rho}$$

constant langs een stroomlijn. Het bewijs hiervan berust op de constatering dat

$$(15.17) \quad \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + \phi + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

hetgeen aan de lezer overgelaten wordt. *)

*) Verg. Rutherford Ch. VI.

Het gedrag van een visceuse vloeistof kunnen we vergelijken met dat van een elastisch lichaam. In het infinitesimale tijdsinterval dt ondergaan de vloeistofdeeltjes de verplaatsingen $u_i = v_i dt$. De deformatietensor (14.6) is dus van de vorm

$$(15.18) \quad U_{ij} = v_{ij} dt \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dt.$$

Het uitgangspunt van de theorie van een visceuse vloeistof is de "stress-strain" betrekking, het analogon van (14.26)

$$(15.19) \quad p_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda_{ijkl} v_{kl},$$

Hierbij hebben we de isotrope tensor van de hydrostatische druk afgesplitst en is λ_{ijkl} wederom een isotrope tensor van het type (14.27). Uitwerking geeft

$$(15.20) \quad p_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

met twee parameters λ en μ .

Contractie geeft

$$(15.21) \quad p_{ii} = -3p + (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Gewoonlijk kiest men, overigens vrij willekeurig,

$$(15.22) \quad \lambda = -\frac{2}{3} \mu$$

zodat p inderdaad de gemiddelde druk is.

Voor incompressibele visceuse vloeistoffen, waarvoor dus (15.4) geldt, is slechts één parameter μ nodig. De constante μ heet de viscositeitsconstante.

We leiden nu nog eens de volledige bewegingsvergelijking af. Voor een willekeurig ruimtedeel geldt dan het evenwicht

$$\iiint \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\tau = \iiint \rho F_i d\tau + \iint p_{ij} d\sigma_j$$

en dus met toepassing van de stelling van Gauss

$$(18.23) \quad \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij}.$$

Substitutie van (15.20) geeft

$$(15.24) \quad \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_j,$$

of symbolisch

$$(15.25) \quad \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \mu \text{grad div } \vec{v}.$$

Deze vergelijking wordt de vergelijking van Navier-Stokes genoemd.

16. Affiene tensoranalyse

In de affiene meetkunde van drie dimensies, waarbij we dus werken met punten, (rechte) lijnen en (platte) vlakken, hebben we alleen te maken met de fundamentele begrippen evenwijdigheid en deelverhouding. Het meten van afstanden en de daaruit afgeleide hoekmeting worden niet gedefinieerd of niet gebruikt.

In het bijzonder bestaat er dus geen begrip loodrecht. Wel kunnen we aan twee punten A en B van een rechte lijn l een afstand toekennen wanneer op l een lengte-eenheid is gekozen. Is C een derde punt van l dan is de deelverhouding AB/AC onafhankelijk van de eventueel op l gekozen lengte-eenheid. De eenvoudigste beweging of transformatie in de affiene meetkunde is de parallel-verschuiving of translatie waarbij een willekeurige rechte lijn overgaat in een daaraan evenwijdige lijn. Gaat tengevolge van een translatie het puntenpaar AB over in A'B' dan is de vierhoek ABB'A' dus een parallellogram. Door translatie kunnen we een op l gekozen eenheid overdragen op een aan l evenwijdige lijn.

We definiëren een contravariante vector als een geordend puntenpaar AB. Twee contravariante vectoren welke door een translatie uit elkaar afgeleid kunnen worden noemen we equivalent. Alle onderling equivalente vectoren kunnen we verenigen tot een klasse welke we aanduiden met de naam vrije contravariante vector. Elk element van de klasse kan dienst doen als representant. Meestal laten we in het spraakgebruik de toevoeging "vrij" achterwege.

We definiëren een covariante vector als een geordend paar evenwijdige vlakken $\alpha\beta$. Op analoge wijze leiden we hieruit het begrip vrije covariante vector af, waarbij wederom de toevoeging "vrij" doorgaans weg-

gelaten wordt.

Een contravariante vector AB en een covariante vector $\alpha\beta$ bepalen een inwendig product of scalair product dat op de volgende wijze afgeleid wordt. We gaan uit van willekeurige representanten AB en $\alpha\beta$. Indien nu de lijn AB , de drager l van de vector, de vlakken α en β snijdt in S_α en S_β dan is per definitie de verhouding

$$(16.1) \quad \frac{AB}{S_\alpha S_\beta}$$

het inwendig product van de genoemde vectoren. Het is duidelijk dat deze definitie niet afhangt van de representant en van de keuze van de eenheid op l . In het bijzonder kunnen we de representanten zo kiezen dat bijvoorbeeld A en S_α samenvallen. In dat geval is (16.1) de gewone deelverhouding.

Contravariante en covariante vectoren kunnen we ontbinden in componenten t.o.v. een zogenaamd eenheidsblok bestaande uit eenheidsvectoren. Daartoe kunnen we een blok (parallelepipedum) dat gevormd wordt door een drietal eenheidsvectoren EE_1, EE_2, EE_3 van het contravariante type. De eenheidsvectoren van het covariante type worden gevormd door de paren overstaande zijvlakken waarbij het door E gaande zijvlak telkens het eerste is. (zie fig. 16.1).

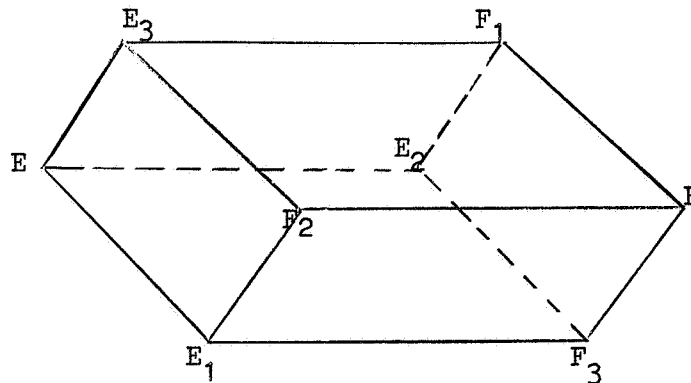


fig. 16.1

De door $\overrightarrow{EE}_i$ bepaalde richting zullen we de i^e basisrichting noemen. Alle rechten met deze richting bezitten dus een gemeenschappelijke meet-eenheid. De zijvlakken bepalen analoog drie vlakstanden of basishellingen.

De componenten van een willekeurige contravariante vector $\overrightarrow{AB}$ t.o.v. het gekozen eenheidsblok worden nu a.v. bepaald. Brengt men door A en B vlakken met de i^e basishelling en snijdt men ze met een willekeurige rechte met de i^e basisrichting, bijv. de rechte $\overrightarrow{EE}_i$, in de punten A_i en B_i dan is de lengte van $A_i B_i$ gemeten met de bijbehorende lengte-eenheid $\overrightarrow{EE}_i$ perdefinitie de i^e component v^i van de vector (zie fig. 16.2).

$$(16.2) \quad v^i = \frac{A_i B_i}{\overrightarrow{EE}_i}$$

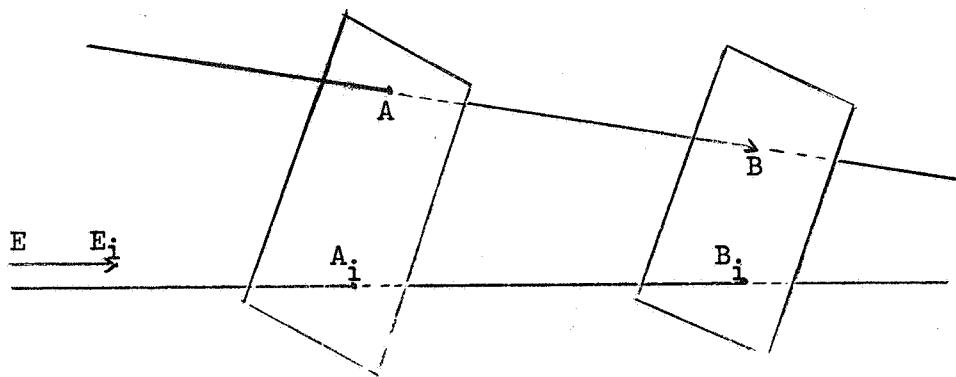


fig. 16.2

Passen we dit procédé toe op de vectoren $\overrightarrow{EE}_1$, $\overrightarrow{EE}_2$, $\overrightarrow{EE}_3$ dan vinden we de volgende componenten

$$\overrightarrow{EE}_1(1, 0, 0), \overrightarrow{EE}_2(0, 1, 0), \overrightarrow{EE}_3(0, 0, 1)$$

De componenten van een willekeurige covariante vector $\alpha\beta$ t.o.v. het gekozen eenheidsblok worden nu a.v. bepaald.

Snijdt men α en β in A_i en B_i met een willekeurige rechte met de i^e basisrichting dan is de i^e covariante component w_i bepaald door

$$(16.3) \quad w_i = \frac{\overrightarrow{EE}_i}{A_i B_i}$$

Toepassing op de covariante vectoren gevormd door de paren overstaande zijvlakken van het eenheidsblok, geeft wederom de componenten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

T.a.v. de gevolgde notatie merken we op dat we de componenten van een contravariante vector met bovenindices, contravariante indices, aangeven en die van een covariante vector van benedenindices, covariante indices, voorzien.

Voor de nu volgende beschouwingen is het beter vaste vectoren te beschouwen waartoe we alle contravariante vectoren laten beginnen in hetzelfde punt 0, de oorsprong.

Van alle covariante vectoren kiezen we analoog het beginvlak door de oorsprong. De eenheden leggen we vast met een eenheidsblok waarbij 0 en E overstaande hoekpunten zijn. (zie fig 16.3)

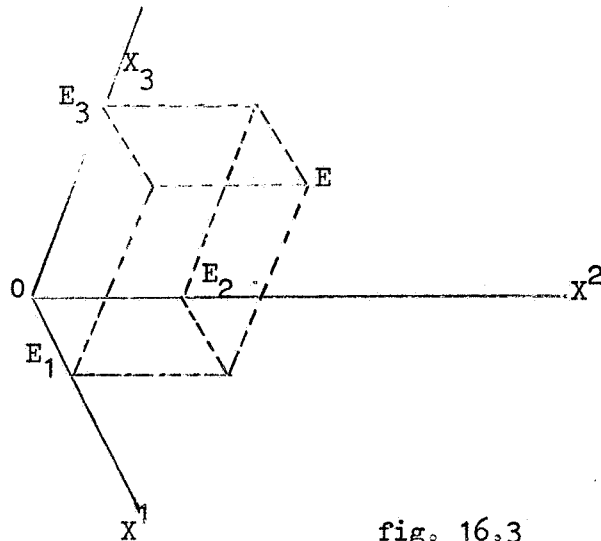


fig. 16.3

De basisvectoren $\vec{OE}_i$ bepalen aldus de assen van een rechtlijnig coördinatenstelsel. De door $\vec{OE}_i$ bepaalde as noemen we de x^i -as. Onder de coördinaten van een punt P t.o.v. dit coördinatenstelsel verstaan we de contravariante componenten van de vector $\vec{OP}$. Brengt men dus door P een vlak evenwijdig aan het i^e coördinaatvlak, te weten dat tegenover OE_i , en snijdt men dit in P_i met de i^e coördinaatas OX_i , dan is dus de i^e coördinaat x^i van P gelijk aan

$$(16.4) \quad x^i = \frac{OP_i}{OE_i}.$$

Op volkomen analoge wijze zijn de coördinaten α_i van een niet door de oorsprong gaand vlak α bepaald door de componenten van de covariante vector gevormd door het aan α evenwijdige vlak door 0 en α zelf. Snijdt dus α OX^i in het snijpunt A_i dan is volgens het boven gegeven voorschrift

$$(16.5) \quad \alpha_i = \frac{OE_i}{OA_i}$$

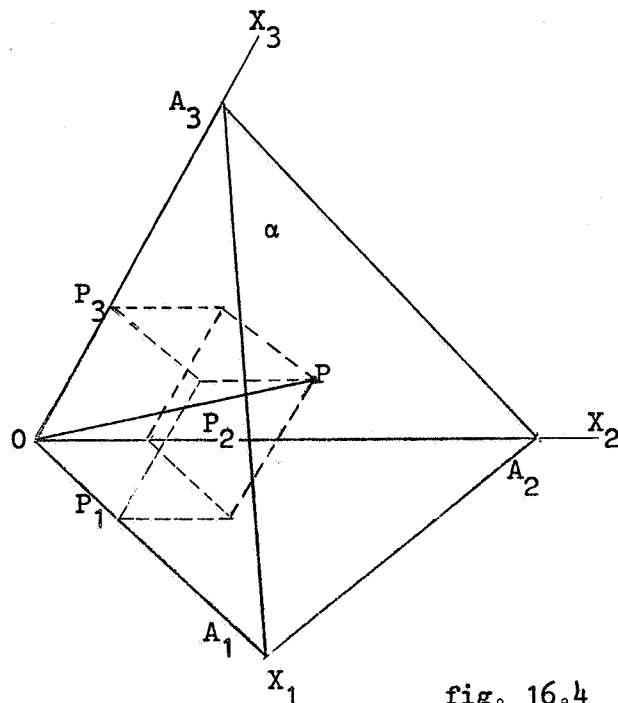


fig. 16.4

Men kan meetkundig bewijzen dat het inwendig product van de door punt P en vlak α bepaalde contravariante resp. covariante vector gelijk is aan

$$(16.6) \quad \frac{OP_1}{OA_1} + \frac{OP_2}{OA_2} + \frac{OP_3}{OA_3} = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3.$$

In het bijzondere geval dat P in α ligt is dus

$$(16.7) \quad \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = 1.$$

We kunnen dit dus opvatten als de vergelijking van vlak α in de contravariante punt-coördinaten (x^1, x^2, x^3) of als de vergelijking van punt

P in de covariante vlakcoördinaten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Het is niet onze bedoeling deze beschouwingen gedetailleerd voort te zetten en we beperken ons tot enige algemene opmerkingen. De contravariante vectoren kunnen opgeteld en met een scalar vermenigvuldigd worden volgens de methode van §2. Deze lineaire bewerkingen weerspiegelen zich in de componenten. Zijn $\vec{x}$ en $\vec{y}$ contravariante vectoren met de componenten x^i en y^i dan heeft deze som $\vec{x} + \vec{y}$ de componenten $x^i + y^i$. Het product van de vector $\vec{x}$ met de scalar λ is de vector $\lambda\vec{x}$ met de componenten λx^i . Aldus vormen de contravariante vectoren een lineaire vectorruimte.

De covariante vectoren vormen de duale vectorruimte d.w.z. de vectorruimte gevormd door de lineaire functionalen t.o.v. de eerste vectorruimte.

Kiest men in de lineaire vectorruimte van de contravariante vectoren een andere basis van eenheidsvectoren dan transformeren de componenten x^i van een contravariante vector zich a.v., waarbij het accent op de nieuwe basis duidt,

$$(16.8) \quad x^{i'} = A_{i'}^i x^i \quad \det A_{i'}^i \neq 0.$$

Zoals we zien wordt de sommatieconventie toegepast op een zelfde index die zowel bovenindex als benedenindex is.

In de algemene tensorrekening is dit regel. De bij (16.8) behorende inverse transformatie is

$$(16.9) \quad x^i = A_i^{i'} x^{i'},$$

waarbij tussen de coëfficiënten $A_{i'}^i$ en $A_i^{i'}$, het volgende verband bestaat

$$(16.10) \quad A_{i'}^i A_j^{i'} = \delta_j^i, \quad A_i^{i'} A_{j'}^{i'} = \delta_{j'}^{i'}.$$

Hierbij is δ_j^i het symbool van Kronecker in aangepaste notatie. De coëfficiënten $A_{i'}^i$ en $A_i^{i'}$ behoren bij reciproke matrices. We kunnen bijv. $A_i^{i'}$ opvatten als de minor van $A_{i'}^i$ in de matrix $(A_{i'}^i)$ gedeeld door de determinantwaarde.

De transformatie van de covariante vectoren is bepaald door de invariantie van het inwendig product van een covariante vector u_i met een willekeurige contravariante vector x^i . We eisen dus

$$(16.11) \quad u_{i'} x^{i'} = u_i x^i.$$

Substitutie van (16.9) geeft

$$(u_{i'} - A_{i'}^i u_i) x^{i'} = 0.$$

Aangezien dit moet gelden voor willekeurige $x^{i'}$ is

$$(16.12) \quad u_{i'} = A_{i'}^i u_i.$$

De componenten van een covariante vector transformeren zich dus tegengesteld, of beter invers, aan die van een contravariante vector. De transformatie (16.12) heet zelf covariant. De inverse van (16.12) is uiteraard

$$(16.13) \quad u_i = A_i^{i'} u_{i'}.$$

Algemeen definiëren we een affiene tensor (affinor) als een systeem getallen $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ met p contravariante en q covariante indices welke zich transformeren als

$$(16.14) \quad T^{i_1' \dots i_p'}_{j_1' \dots j_q'} = A_{i_1' \dots i_p'}^{i_1 \dots i_p} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1' \dots j_q'} \cdot T^{i_1' \dots i_p'}_{j_1' \dots j_q'}.$$

waarbij

$$(16.15) \quad A_{i_1' \dots i_p'}^{i_1 \dots i_p} \stackrel{\text{def}}{=} A_{i_1'}^{i_1} \dots A_{i_p'}^{i_p} \quad A_{j_1'}^{j_1} \dots A_{j_q'}^{j_q}.$$

Deze definitie is het uitgangspunt van de affiene tensoranalyse, een uitbreiding van de "gewone" tensorrekening in de Euclidische ruimte t.o.v. Cartesische coördinatenstelsels. De affiene tensoranalyse kan nu opgebouwd worden als in §5. We zullen dit niet expliciet uitvoeren omdat we in de volgende paragraaf een nog algemenere tensoranalyse zullen beschouwen.

We besluiten deze paragraaf met de volgende twee opmerkingen. We hebben tot dusver de affiene vector- en tensorrekening alleen in een ruimte van drie dimensies beschouwd. Het is een kleine moeite deze beschouwingen uit te breiden tot een ruimte van een willekeurig aantal dimensies.

De tweede opmerking is dat het boven gedefinieerde tensorbegrip betrekking heeft op een vrije tensor die dus aan een willekeurig punt toegevoegd kan worden.

Anders gezegd, affine tensoren zijn gedefinieerd behoudens translatie zoals we dit ook bij contravariante en covariante vectoren gezien hebben.

17. Algemene tensoranalyse

We beschouwen nu een willekeurige ruimte X_N van N dimensies bestaande uit punten. De punten kunnen gekarakteriseerd worden door N kentallen $(x^1, x^2, \dots, x^N)$. De kentallen x^i noemen we de coördinaten van het beschouwde punt P . Een eendimensionale meetkundige plaats van punten

$$(17.1) \quad x^i = x^i(t)$$

waarbij t een parameter is, heet een lijn. Een nadere aanduiding van krom of recht is zinloos. X_N kan bijvoorbeeld zowel een "gewone" driedimensionale ruimte als een tweedimensionaal oppervlak van een bol zijn. In de laatste ruimte bestaan er geen lijnen die in de gewone zin recht zijn.

Een functionele betrekking

$$(17.2) \quad f(x^1, x^2, \dots, x^N) = 0$$

stelt per definitie een hypervlak (of kortweg vlak) voor.

In een ruimte van drie dimensies is dit dus een oppervlak.

In het bijzonder zijn de coördinaatvlakken gedefinieerd als

$$(17.3) \quad x^i = \text{constant}.$$

Voor elke index is er dus een stelsel coördinaatvlakken. Door een punt P gaat van elk stelsel precies één exemplaar. In de omgeving van P kunnen we de coördinaten van een willekeurig punt Q op de volgende wijze uitdrukken in die van P

$$(17.4) \quad x^i(Q) = x^i(P) + dx^i(P).$$

De componenten dx^i vormen een infinitesimale contravariante vector $\vec{PQ}$. We kunnen de omgeving van P opvatten als affiene ruimte van N dimensies met een vaste oorsprong P . In deze microscopische affiene ruimte kunnen we de punten Q identificeren met de vaste contravariante vectoren PQ met de componenten dx^i . Aldus bezit elk punt van X^N zijn eigen locale affiene ruimte met de bijbehorende (infinitesimale) contravariante vectoren. Vooralsnog beschikken we nog niet over de middelen om de vector-systemen in twee verschillende punten P_1 en P_2 met elkaar te vergelijken. Dit wordt pas mogelijk als we in X^N een metriek hebben ingevoerd, d.w.z. een methode om afstanden (booglengten) en hoeken te maken. Zoals we verderop zullen zien wordt deze metriek geïntroduceerd door een formule te geven voor de kwadraatlengte van een willekeurige infinitesimale contravariante vector dx^i in een willekeurig punt P .

We kunnen in X^N andere coördinaten $(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{N'})$ invoeren door middel van de transformatieformules

$$(17.5) \quad x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^N).$$

Hierbij nemen we aan dat de rechterleden minstens twee maal continu differentieerbaar zijn. Opdat deze transformatie inverteerbaar is moet de transformatiedeterminant Δ nergens nul zijn, d.w.z.

$$(17.6) \quad \Delta = \frac{\partial(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{N'})}{\partial(x^1, x^2, \dots, x^N)} = \det \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \neq 0.$$

Het effect van de transformatie (17.5) op de omgeving van een punt P is de overgang van basisvectoren $(dx^1, 0, \dots, 0)$, $(0, dx^2, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, \dots, dx^N)$ op nieuwe basisvectoren $(dx^{1'}, 0, \dots, 0)$, $(0, dx^{2'}, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, \dots, dx^{N'})$, d.w.z. een affiene transformatie in de locale aan P toegevoegde affiene ruimte. Uit (17.5) volgt door differentiatie

$$(17.7) \quad dx^{i'} = A_i^{i'} dx^i,$$

waarbij

$$(17.8) \quad A_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(P).$$

Inderdaad stemt (17.7) overeen met de transformatie (16.8) van een contravariante affiene vector. De transformatie (17.7) levert een affiene transformatie simultaan in alle punten P van X^N . Inderdaad hangen de transformatiecoëfficiënten $A_i^{i'}$ af van de coördinaten van het beschouwde punt P. Aldus kunnen we (17.7) opvatten als de transformatie van een contravariant vectorveld dx^i .

De inverse transformatie is

$$(17.9) \quad dx^i = A_i^{i'} dx^{i'},$$

waarbij

$$(17.10) \quad A_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} (P).$$

Uit de kettingregel van de partiële differentiatie volgt dat in alle punten voldaan is aan de betrekkingen (16.10) welke we nog even herhalen.

$$(17.11) \quad A_i^{i'} A_{j'}^j = \delta_j^{i'}, \quad A_i^{i'} A_j^{j'} = \delta_j^{i'}$$

Een contravariante vector v^i , of een contravariant vectorveld $v^i(x^1, x^2, \dots, x^N)$, wordt gedefinieerd als een groep getallen $(v^1, v^2, \dots, v^N)$ welke zich transformeren als

$$(17.12) \quad v^{i'} = A_i^{i'} v^i.$$

Analoog wordt een covariante vector w_i gedefinieerd m.b.v. de transformatie

$$(17.13) \quad w_{j'} = A_{j'}^j w_j.$$

Voor een vast punt P stemmen deze definities dus overeen met de in de vorige paragraaf besproken transformatie van een contravariante en een covariante vector in een affiene ruimte. Het essentiële verschil is dat met de verandering van P de transformatiecoëfficiënten $A_i^{i'}$, en $A_{i'}^i$ mede veranderen.

In dezelfde geest wordt een tensor gedefinieerd als een groep getallen $T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ welke zich transformeren als

$$(17.14) \quad T_{j_1' j_2' \dots j_q'}^{i_1' i_2' \dots i_p'} = A_{i_1}^{i_1'} \dots A_{i_p}^{i_p'} T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} A_{j_1'}^{j_1} \dots A_{j_q'}^{j_q}$$

waarbij per definitie

$$(17.15) \quad A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = A_{i_1}^{j_1} \dots A_{i_p}^{j_p} A_{j_1}^{i_1} \dots A_{j_q}^{i_q}.$$

Het getallenpaar (p, q) heet de orde van de tensor. We noemen p de contravariante orde en q de covariante orde. Voor $p = 0$ heet de tensor covariant, voor $q = 0$ contravariant en in alle andere gevallen gemengd. Het getal $p + q$ heet wel de totale orde.

Uit de betrekkingen (17.11) blijkt dat δ_j^i een gemengde tensor van de orde $(1, 1)$ is. De bewerkingen met tensoren zijn als in §5. Tensoren van dezelfde orde kunnen bij elkaar opgeteld worden. Een tensor kan met een scalar vermenigvuldigd worden en van twee willekeurige tensoren kan het direct product gevormd worden. Men heeft bijv.

$$(17.16) \quad P_{\dots k}^{ij} Q_m^l = T_{\dots km}^{ijl}.$$

De mogelijkheid van contractie van een gegeven tensor bouwt op de eigenschap (17.11). Bijv.

$$(17.17) \quad S_{\dots jl}^{ij} = T_{\dots l}^i.$$

Inderdaad geldt

$$(17.18) \quad T_{\dots l}^{i'} = A_i^{i'} A_j^{j'} A_k^k A_l^l, \quad S_{\dots kl}^{ij} = A_i^{i'} A_l^l \delta_j^k S_{\dots kl}^{ij} = A_i^{i'} A_l^l T_{\dots l}^{i'}$$

Vormen we van twee tensoren het direct product en laten we dit volgen door contractie waarbij telkens een index van de andere tensor genomen wordt dan spreken we soms van overschuiving (transvectie). Het eenvoudigste voorbeeld hiervan is het uit een contravariante vector v^i en een covariante vector w_j gevormde scalaire product $v^i w_i$.

Verwisseling van gelijksoortige indices van een tensor leidt tot een nieuwe tensor welke een isomeer genoemd wordt. Bijv.

$$(17.19) \quad T_{\dots k}^{ij} = S_{\dots k}^{ji}.$$

Een tensor waarvan alle componenten invariant zijn t.o.v. verwisseling van gelijksoortige indices heet symmetrisch.

Gaan de componenten in hun tegengestelden over bij verwisseling van een willekeurig paar gelijksoortige indices dan heet de tensor antisymmetrisch of alternerend.

Uit een gegeven tensor kan men een symmetrische tensor afleiden door het gemiddelde van alle isomeren te nemen. Bijv.

$$(17.20) \quad S_{ijk} = \frac{1}{6}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} + T_{ikj} + T_{jik} + T_{kji}).$$

Soms duidt men dit aan met de schrijfwijze

$$(17.21) \quad S_{ijk} = T_{(ijk)}.$$

Analoog kan men een antisymmetrische tensor afleiden door tevens het teken van de permutatie in acht te nemen. Bijv.

$$(17.22) \quad A_{ijk} = \frac{1}{6}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{ikj} - T_{jik} - T_{kji}).$$

Soms schrijft men

$$(17.23) \quad A_{ijk} = T_{[ijk]}.$$

Een contravariante of covariante tensor van de tweede orde kan men aldus splitsen in een symmetrisch en een antisymmetrisch deel. Bijv.

$$(17.24) \quad T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

Dat ook de in §5 beschouwde quotientregel geldt illustreren we aan de hand van het volgende voorbeeld.

De bewering is dat de getallen $T_{\dots k}^{ij}$ een tensor vormen indien bijv. voor een tensor V_{lm} met willekeurige componenten het inwendig product

$$(17.25) \quad T_{\dots k}^{ij} V_{ij} = W_k$$

een tensor, en hier dus een covariante vector, oplevert.

Overgang op geaccentueerde coördinaten geeft

$$T_{\dots k}^{i'j'} V_{i'j'} = W_{k'} = A_{k'}^k W_k = A_{k'}^k T_{\dots k}^{ij} V_{ij} = A_{k'}^k T_{\dots k}^{ij} A_i^{i'} A_j^{j'} V_{i'j'},$$

$$(T_{\dots k}^{i'j'} - A_i^{i'} A_j^{j'} A_k^k T_{\dots k}^{ij}) V_{ij} = 0.$$

Aangezien de componenten van de hulptensor V_{ij} volkomen willekeurig zijn geldt dus

$$T_{\dots k}^{i'j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} A_k^k T_{\dots k}^{ij},$$

hetgeen uitdrukt dat de getallen $T_{\dots k}^{ij}$ een tensor vormen.

18. Metriek

Ten einde het meten van afstanden en hoeken mogelijk te maken kennen we aan de infinitesimale contravariante vectoren dx^i van een willekeurig punt P de kwadraatlengte ds^2 toe volgens de formule

$$(18.1) \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j,$$

waarbij de van de coördinaten van P afhankende coëfficiënten minstens twee maal continu differentieerbare functies zijn.

Zonder bezwaar kunnen we $g_{ij} = g_{ji}$ kiezen. Uit de gepostuleerde invariantie van ds^2 t.o.v. transformatie van coördinaten volgt dat de coëfficiënten g_{ij} een covariante tensor vormen, de zogenaamde fundamentealtensor. Aangezien $g_{ij} = g_{ji}$ is deze tensor symmetrisch.

Twee infinitesimale vectoren dx^i en $d\xi^j$ in P leveren de invariante scalar $g_{ij} dx^i d\xi^j$. Noemen we de lengten resp. ds en $d\sigma$ dan wordt de hoek ϕ tussen de vectoren gedefinieerd als

$$(18.2) \quad ds d\sigma \cos \phi = g_{ij} dx^i d\xi^j.$$

In het bijzonder wordt de loodrechte stand uitgedrukt door

$$(18.3) \quad g_{ij} dx^i d\xi^j = 0.$$

Zonder moeite kunnen we deze begrippen ook toepassen op willekeurige aan P toegevoegde contravariante vectoren v^i en w_i . In het bijzonder definiëren we

$$(18.4) \quad g_{ij} v^i v^j$$

als de kwadraatlengte van v^i , en zeggen we dat de vectoren v^i en w^i orthogonaal zijn indien

$$(18.5) \quad g_{ij} v^i w^j = 0.$$

Aan de covariante fundamentealtensor g_{ij} kunnen we een contravariante tensor g^{ij} , welke eveneens symmetrisch is, toevoegen met behulp van de betrekkingen

$$(18.6) \quad g^{ij} g_{ik} = \delta_k^j.$$

Hieruit volgt dat de door de componenten g_{ij} en g^{ij} gevormde matrices elkaars inverse zijn. De determinantwaarde van de matrix (g_{ij}) noemen

we g . We nemen aan dat $g \neq 0$. Daarmee sluiten we de zogenaamde ontaarde metriek, welke voor de toepassingen niet belangrijk is, uit.

Het ligt voor de hand te eisen dat (18.4) een positief definitie kwadratische vorm is. In dat geval heeft elke (contravariante) vector een positieve van nul verschillende lengte tenzij de vector de nulvector is. Toch beschouwt men in de relativiteitstheorie een kwadratische vorm (18.4) welke zowel positieve als negatieve waarden kan aannemen. In de speciale relativiteitstheorie heeft men voor de kwadraatlengte van de infinitesimale "wereldvector" (dx, dy, dz, dt) de uitdrukking

$$(18.7) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2.$$

Vectoren met een positieve kwadraatlengte hebben hierbij een "ruimtelijk", die met een negatieve kwadraatlengte een "tijdelijk" karakter.

Wij zullen hier echter uitsluitend een X^N met een positief definitie metriek beschouwen. In dat geval is ook de determinantwaarde g positief.

De fundamenteaaltensor g_{ij} en de toegevoegde g^{ij} stellen ons in staat op (1-1)-duidelijke wijze contravariante en covariante vectoren aan elkaar toe te voegen. Aldus is aan de contravariante vector v^i de covariante vector w_i toegevoegd volgens

$$(18.8) \quad w_i = g_{ij} v^j.$$

Omgekeerd is

$$(18.9) \quad v^i = g^{ij} w_j.$$

Een analoge toevoeging geldt voor tensoren. In het jargon van de tensoranalyse duiden we dit aan als omlaaghalen en omhoogbrengen van indices. Bijv.

$$(18.10) \quad g_{ip} g^{kq} T^{ij}_{\dots k} = T^{jq}_{\dots p}.$$

Aan een covariante vector w_i kunnen we nu ook een kwadraatlengte toekennen, namelijk die van de toegevoegde contravariante vector, d.w.z.

$$(18.11) \quad g^{ij} w_i w_j.$$

Door (18.1) is in de omgeving van elk punt P meting mogelijk.

De coördinaatvlakken $x^1 = \text{constant}$ enz. bepalen een lokaal rechtlijnig

coördinatenstelsel $PX^1X^2 \dots X^N$ waarbij de eenheidsvectoren langs PX^1 , PX^2 , PX^3 , ..., PX^N resp. de lengten $\sqrt{g_{11}}$, $\sqrt{g_{22}}$, ..., $\sqrt{g_{NN}}$ bezitten. We zullen aanstonds bewijzen dat het op de eenheidsvectoren beschreven eenheidsblok de inhoud $\sqrt{g}$ heeft. Aangezien de componenten g_{ij} zich op covariante wijze als

$$(18.12) \quad g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}$$

transformeren geldt voor de determinant g de transformatieregel (verg. 17.6)

$$(18.13) \quad g' = \Delta^{-2} g.$$

In het bijzonder kunnen we een coördinatenstelsel $(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{N'})$ kiezen dat in het punt P een Euclidische metriek bepaalt waarbij de componenten g_{ij} in P de waarden δ_j^i aannemen. In dit speciale coördinatenstelsel is de inhoud van het volume-element gevormd door de vectoren $(dx^{1'}, 0, \dots, 0)$, $(0, dx^{2'}, \dots, 0)$, ..., $(0, 0, \dots, dx^{N'})$ gelijk aan $dx^{1'} dx^{2'} \dots dx^{N'}$. Door de transformatie van dit speciale naar het oorspronkelijke coördinatenstelsel gaat het volume-element over in

$$(18.14) \quad dx^{1'} dx^{2'} \dots dx^{N'} = \frac{\partial(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{N'})}{\partial(x^1, x^2, \dots, x^N)} dx^1 dx^2 \dots dx^N.$$

De inhoud van het elementaire blokje in het $PX^1X^2 \dots X^N$ coördinatenstelsel is dus $|A| dx^1 dx^2 \dots dx^N$. Volgens (18.13) waarbij $g' = 1$ is dus

$$(18.15) \quad d\tau = \sqrt{g} dx^1 dx^2 \dots dx^N.$$

Voorbeeld. De Euclidische ruimte E_3 is een X^3 waarbij het mogelijk is Cartesiaanse coördinaten (x^1, x^2, x^3) te gebruiken met de metriek

$$(18.16) \quad ds^2 = dx^1 dx^1.$$

De fundamentaaltensor is dus in alle punten identiek met de eenheidstensor. Uit (18.8) en (18.9) volgt dat in dit coördinatenstelsel het verschil tussen contravariant en covariant vervalst. Gebruiken we bolcoördinaten (zie 13.20) dan heeft men de metriek

$$(18.17) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2.$$

Hierbij is het wel weer nodig onderscheid te maken tussen contravariante

en covariante componenten. In een punt $P(r_0, \theta_0, \psi_0)$ vormen de coördinaatvlakken $r = r_0$ (bol), $\theta = \theta_0$ (kegel), $\psi = \psi_0$ (vlak) lokaal een orthogonaal rechtlijnig coördinatenstelsel waarbij de meeteenheden resp. 1, r en $r \sin \theta$ zijn. Het volume-element is in overeenstemming met

$$\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{33}} = r^2 \sin \theta$$

$$(18.18) \quad dr = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

19. Covariante differentiatie

Wij hebben in §9 gezien hoe uit een gegeven tensorveld door toepassing van de nabla-operator een nieuw tensorveld kon worden afgeleid. Voor een scalarveld s leidde dit tot de gradiënt ∇s , voor een vectorveld $\vec{v}$ tot de begrippen divergentie $\nabla \cdot \vec{v}$ en rotatie $\nabla \times \vec{v}$. We stellen ons nu de vraag hoe deze begrippen met algemene kromlijnige coördinaten te behandelen.

Uitgaande van een scalarveld $s(x^1, x^2, \dots, x^N)$ kunnen we door partiële differentiatie de getallen $\partial_i s$ afleiden. We bewijzen dat deze de componenten zijn van een covariante tensor, de gradiënt. Inderdaad geldt de transformatieregel

$$(19.1) \quad \frac{\partial s}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial s}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = A_{i'}^i \frac{\partial s}{\partial x^i}.$$

Uitgaande van een covariant vectorveld $w_i(x^1, x^2, \dots, x^N)$ vormen we het systeem $\partial_j w_i$. Blijkbaar transformeert dit systeem zich als

$$\frac{\partial w_{i'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial}{\partial x^{j'}} (A_{i'}^i w_i) = A_{i'j}^{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x^j} + w_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}.$$

Het systeem is dus geen tensor. Wel geldt dit, zoals men eenvoudig inziet, voor de antisymmetrische combinatie

$$(19.2) \quad r_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} - \frac{\partial w_j}{\partial x^i} \right).$$

Deze antisymmetrische covariante tensor heet de rotatie van het covariante vectorveld w_i . Deze tensor stemt overeen met de rotatie van een

vector in een Euclidische ruimte van drie dimensies.

Het lukt niet op deze wijze verder te gaan. In het bijzonder wordt uit een contravariant vectorveld v^i door partiële differentiatie geen tensor gevormd. We zullen evenwel laten zien dat dit wel lukt indien aan de partiële afgeleiden $\partial_j v^i$ zekere lineaire combinaties $\Gamma_{jk}^i v^k$ van de componenten v^k worden toegevoegd. We beweren dus:

Er bestaan getallen $\Gamma_{jk}^i(x^1, x^2, \dots, x^N)$, de z.g.n. symbolen van Christoffel, zodanig dat

$$(19.3) \quad \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i v^k$$

een tensor is. Deze tensor heet de covariante afgeleide van de vector v^i . De structuur van de hierbij benodigde Christoffel symbolen berust op het fundamentele begrip van pseudo-parallele verplaatsing dat we nu zullen bespreken.

In een X_N met kromlijnige coördinaten x^i en voorzien van een metriek g_{ij} bestaat i.h.a. geen begrip van evenwijdigheid. Dit wordt o.a. gedemonstreerd door het speciale geval van een boloppervlak. Het is daarvoor niet mogelijk vectoren en tensoren welke in twee verschillende punten P en Q gedefinieerd zijn met elkaar te vergelijken zoals dit wel het geval was bij een Euclidische ruimte E_N waar alle vectoren en tensoren evenwijdig verplaatsbaar zijn. We hebben dit feit trouwens uitgebuit door bij vele beschouwingen de vectoren en tensoren naar de oorsprong verplaatst te denken.

Men kan echter, met zekere restricties, in een algemene X_N een zekere pseudo-parallele verplaatsing definiëren waarbij het mogelijk is een vector of tensor langs een bepaalde kromme pseudo-parallel te verplaatsen. Het eindsresultaat kan van de gebruikte kromme afhangen zodat bijv. na een rondgang over een gesloten kromme niet noodzakelijk de vector of tensor tot de uitgangswaarde is teruggekeerd.

We beschouwen daartoe een zogenaamde infinitesimale verplaatsing van een contravariante vector v^i in $P(x^i)$ naar het naburige punt $Q(x^i + dx^i)$. Voor de verplaatste vector schrijven we $v^{*i} = d^* v^i$. We kunnen stellen

$$(19.4) \quad d^* v^i = \Gamma_{jk}^i v^j dx^k, \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i,$$

waarbij de coëfficiënten Γ_{jk}^i uiteraard functies van de coördinaten van P zijn. We zullen straks aantonen dat d^*v^i geen vector en Γ_{jk}^i geen tensor is. Desondanks handhaven we de notatie met boven- en benedenindices en gebruiken we voorzover niet het tegendeel gezegd is de sommatie-conventie van Einstein. Aan onze pseudo-parallele verplaatsing stellen we als eis dat hoeken en afstanden invariant blijven. We eisen dus m.a.w. dat

$$(19.5) \quad g_{ij}(Q) (v^i - d^*v^i)(w^j - d^*w^j) = g_{ij}(P) v^i w^j.$$

Uitwerking geeft

$$g_{ij} (v^i d^*w^j + w^j d^*v^i) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^i w^j dx^k.$$

Substitutie van (19.4) geeft

$$g_{ij} \Gamma_{lk}^j v^i w^l + g_{ij} \Gamma_{lk}^i v^l w^j = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^i w^j,$$

zodat

$$(19.6) \quad g_{im} \Gamma_{jk}^m + g_{mj} \Gamma_{ik}^m = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k},$$

voor alle combinaties van i, j en k .

Uit (19.6) volgen door verwisseling van de vrije indices i, j, k de aequivalente betrekkingen

$$g_{km} \Gamma_{ji}^m + g_{mj} \Gamma_{ki}^m = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i},$$

en

$$g_{im} \Gamma_{kj}^m + g_{mk} \Gamma_{ij}^m = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}.$$

Uit (19.6) en de bovenstaande twee gelijkheden volgt i.v.m. de symmetrie van de benedenindices van g en Γ

$$(19.7) \quad g_{km} \Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\}.$$

zodat tenslotte

$$(19.8) \quad \Gamma_{ij}^k = g^{kn} [i j, n],$$

waarbij

$$(19.9) \quad [ij, k] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\},$$

hetgeen bekend staat als het Christoffel symbool van de eerste soort. De getallen Γ_{ij}^k heten het Christoffel symbool van de tweede soort. Uiteraard is ook

$$(19.10) \quad [i \ j, \ k] = g_{kn} \Gamma_{ij}^n.$$

Zoals gezegd vormen de Christoffel symbolen geen tensoren. Hun transformatie-eigenschappen kunnen a.v. gemakkelijk afgeleid worden. Uit de transformatieregel van de contravariante vector v^i

$$(19.11) \quad v^{i'} = A_i^{i'} v^i$$

volgt door differentiatie

$$(19.12) \quad dv^{i'} = A_i^{i'} dv^i + v^i dA_i^{i'}.$$

Aangezien de pseudo-parallele vector $v^i - d^* v^i$ aan de transformatieregel van een contravariante vector in Q voldoet, t.w.

$$(19.13) \quad v^{i'} - d^* v^{i'} = (A_i^{i'} + dA_i^{i'}) (v^i - d^* v^i)$$

geldt i.v.m. (19.11)

$$(19.14) \quad d^* v^{i'} = A_i^{i'} d^* v^i - v^i dA_i^{i'}.$$

Uit (19.12) en (19.14) volgt door aftrekking dat

$$(19.15) \quad \delta v^i \stackrel{\text{def}}{=} dv^i + d^* v^i$$

weer aan de transformatieregel (18.8) voldoet zodat δv^i een infinitesimale contravariante vector voorstelt. We noemen δ de covariante differentiaal. We kunnen schrijven

$$(19.16) \quad \delta v^i = \nabla_j v^i dx^j.$$

De hierdoor bepaalde tensor $\nabla_j v^i$ noemen we de covariante afgeleide van v^i . I.v.m. (18.1) kunnen we schrijven

$$(19.17) \quad \delta v^i = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i v^k \right) dx^j$$

De covariante afgeleide van v^i is dus

$$(19.18) \quad \nabla_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i v^k.$$

Vaak gebruikt men hiervoor de notatie

$$(19.19) \quad \nabla_j v^i = v^i_{,j}.$$

Zoals gezegd volgt uit het vectorkarakter van δv^i en van dx^k het tensorkarakter van $v^i_{,j}$. We hebben reeds gezegd dat Γ^i_{jk} geen tensor is. De transformatieregel hiervan volgt gemakkelijk uit (19.14). Substitutie van (19.4) in (19.14) geeft namelijk

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{j'k'} v^{j'} dx^{k'} &= A^{i'}_{i'} \Gamma^i_{jk} v^j dx^k - v^i dA^{i'}_{i'} = \\ &= A^{i'}_{i'} A^j_{j'} A^k_{k'} \Gamma^i_{jk} v^{j'} dx^{k'} - A^i_{j'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} A^{i'}_{i'} v^{j'} dx^{k'}, \end{aligned}$$

zodat

$$\Gamma^i_{j'k'} = A^{i'}_{i'} A^j_{j'} A^k_{k'} \Gamma^i_{jk} - A^i_{j'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} A^{i'}_{i'},$$

of

$$(19.20) \quad \Gamma^i_{j'k'} = A^{i'}_{i'} A^j_{j'} A^k_{k'} \Gamma^i_{jk} + A^{i'}_{i'} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}.$$

Na deze uitvoerige behandeling van de pseudo-parallele verplaatsing en covariante differentiatie van contravariante vectoren is het niet moeilijk meer soortgelijke bewerkingen ook voor covariante vectoren en tensoren in te voeren. Voor een scalar ϕ is $d\phi$ reeds een covariante differentiaal aangezien $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ een covariante vector, de gradiënt, is. We hebben dus m.a.w. voor een scalar $d^* \phi = 0$ en

$$(19.21) \quad \delta \phi = d\phi.$$

Voor de covariante differentiaal van een covariante vector w_i gaan we uit van de differentiatieregel van Leibniz welke we toepassen op de scalar $w_i v^i$ waarbij v^i een willekeurige contravariante vector is. We hadden dan

$$v^i \delta w_i + w_i \delta v^i = \delta(w_i v^i) = d(w_i v^i) = v^i dw_i + w_i dv^i.$$

Substitutie van (19.17) leidt onmiddellijk tot

$$(19.22) \quad \delta w_j = dw_j - \Gamma^i_{jk} w_i dx^k$$

en

$$(19.23) \quad \nabla_k w_j = \frac{\partial w_j}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^i w_i.$$

We schrijven ook

$$(19.24) \quad \nabla_k w_i = w_{j,k}.$$

Voor een tensor T kunnen we analoge uitdrukkingen afleiden.

Elke index geeft de aanleiding tot een Γ - term welke een + teken heeft voor een contravariante index en een - teken voor een covariante index.

Bijv.

$$(19.25) \quad \delta T_{\cdot j}^i = d T_{\cdot j}^i + \Gamma_{kl}^i T_{\cdot j}^l dx^k - \Gamma_{jk}^m T_{\cdot m}^i dx^k$$

en

$$(19.26) \quad T_{\cdot j, k}^i = \frac{\partial T_{\cdot j}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i T_{\cdot j}^l - \Gamma_{jk}^m T_{\cdot m}^i.$$

Tenslotte vermelden we nog een veel voorkomende formule. Men heeft

$$(19.27) \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} \log g, \quad g = \det g_{ij}.$$

Het bewijs volgt gemakkelijk door uit te gaan van de definitie (19.8), (19.9).

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^i &= \frac{1}{2} g^{in} \left\{ \frac{\partial g_{in}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{nj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n} \right\} = \frac{1}{2} g^{in} \frac{\partial g_{in}}{\partial x^j} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{in}} \frac{\partial g_{in}}{\partial x^j} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

In een Euclidische ruimte E_N is het mogelijk Cartesiaanse coördinaten te kiezen. De fundamentealtensor g_{ij} reduceert zich dan voor alle punten van de ruimte simultaan tot δ_{ij} d.w.z.

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^N)^2.$$

Alle Christoffel-symbolen zijn dan overal tegelijk nul zodat de covariante differentiatie (19.23) overeenstemt met gewone partiële differentiatie. Zoals bekend kan men uit de contravariante vector v^i in Euclidische coördinaten de invariant $\partial_i v^i$, de divergentie, afleiden.

In algemene kromlijnige coördinaten stemt de tensor $\partial_j v^i$ overeen met de covariante afgeleide $v^i_{,j}$ en de divergentie met de contractie $v^i_{,i}$. Volgens (19.18) is

$$v^i_{,i} = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ik} v^k.$$

I.v.m. (19.27) kunnen we hiervoor schrijven

$$v^i_{,i} = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{g}$$

zodat

$$(19.28) \quad v^i_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (v^i \sqrt{g}).$$

We kunnen van een covariante vector w_i de divergentie vormen door er eerst een contravariante vector $g^{ij} w_j$ van te maken. Passen we dit toe op de gradiënt $\frac{\partial s}{\partial x^i}$ dan vinden we uit (19.28) voor de Laplace operator Δ

$$(19.29) \quad \Delta s = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{ij} \frac{\partial s}{\partial x^j} \sqrt{g}).$$

Voorbeeld. Pseudo-parallele verplaatsing over een boloppervlak. Op een boloppervlak zijn de punten bepaald door de kromlijnige coördinaten $x^1 = \theta$ en $x^2 = \psi$ met als uitdrukking voor de kwadraatlengte van het lijnelement

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2.$$

Voor de uit vier elementen bestaande covariante fundamentealtensor g_{ij} geldt dus

$$g = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \sin^2 \theta.$$

De contravariante componenten zijn

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \sin^{-2} \theta.$$

Voorts geldt

$$\begin{aligned} [1 \ 2, \ 2] &= \sin \theta \cos \theta \Gamma^1_{22} = -\sin \theta \cos \theta \\ [2 \ 2, \ 1] &= -\sin \theta \cos \theta \Gamma^2_{12} = \cotg \theta. \end{aligned}$$

Alle overige Christoffel-symbolen zijn nul.

Laat nu (u, v) een contravariante vector in het punt $P(\theta, \psi)$ zijn, dan levert volgens (19.4) pseudo-parallele verplaatsing naar het naburige punt $Q(\theta + d\theta, \psi + d\psi)$ de vector

$$\begin{cases} u(Q) = u(P) + v(P) \sin \theta \cos \theta d\psi \\ v(Q) = v(P) - u(P) \cotg \theta d\psi. \end{cases}$$

Verplaatsing van de vector over de breedtecirkel $\theta = \text{constant}$ leidt tot de differentiaalvergelijkingen

$$\frac{du}{d\psi} = v \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{dv}{d\psi} = -u \cotg \theta.$$

De oplossing hiervan is

$$u = a \sin (\psi \cos \theta + b), \quad v \sin \theta = a \cos (\psi \cos \theta + b),$$

waarbij a en b integratieconstanten zijn die we aan de aanvangspositie in P kunnen aanpassen.

We constateren dat bij een maal rondlopen over de breedtecirkel

$\psi \rightarrow \psi + 2\pi$ de vector niet meer met de aanvangspositie overeenstemt, tenzij $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

20. Korste lijnen

In een X^N kunnen we bijzondere lijnen, geodeten, bepalen welke de eigenschap bezitten dat ze de korste verbinding vormen tussen twee punten. Voor deze lijnen $x^i(t)$ geldt dus dat

$$(20.1) \quad \int_P^Q \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

minimaal is. Volgens de methode van de variatierekening vergelijken we de lengte over de korste lijn $x^k(t)$ met die van een willekeurige naburige lijn $x^k(t) + \epsilon u^k(t)$. Schrijven we (20.1) als

$$f(\epsilon) \equiv \int_P^Q F(x^k + \epsilon u^k, \dot{x}^k + \epsilon \dot{u}^k) dt,$$

waarbij het fluxie-symbool differentiatie naar t aanduidt, dan moet dus $\frac{\partial f}{\partial \epsilon} = 0$ voor willekeurige $u^k(t)$.

Dus

$$\int_P^Q \left(\frac{\partial F}{\partial x^k} u^k + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} \frac{du^k}{dt} \right) dt = 0.$$

Partiële integratie geeft

$$\int_P^Q \left(\frac{\partial F}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} \right) u^k dt = 0.$$

Aangezien dit moet gelden voor alle $u^k(t)$ vinden we de differentiaalvergelijkingen (van Euler-Lagrange)

$$(20.2) \quad \frac{\partial F}{\partial x^k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}.$$

Substitutie van de uitdrukking voor het lijnelement geeft indien we voor de parameter t de booglengte s kiezen

$$\dot{x}^i \dot{x}^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2 \frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \right).$$

Hiervoor kunnen we schrijven

$$g_{ik} \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j,$$

zodat

$$g_{ik} \frac{d^2 x^i}{ds^2} + [i j, k] \dot{x}^i \dot{x}^j = 0.$$

Vermenigvuldiging met de covariante fundamentealtensor g^{kn} leidt in verband met (19.8) tot

$$(20.3) \quad \frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0.$$

Dit zijn dus de differentiaalvergelijkingen van de geodeten.

In een Euclidische ruimte met rechtlijnige coördinaten zijn alle Christoffel symbolen nul. Volgens (20.3) zijn de geodeten de rechte lijnen $x^k = \alpha^k s + \beta^k$.

Voor verdere eigenschappen van de geodeten zie men de literatuur.

21. Kromlijnige coördinaten in E_3 .

We specialiseren ons nu tot een Euclidische ruimte van drie dimensies met kromlijnige coördinaten (x^1, x^2, x^3) . Als voorbeeld gelden bol- en cylindercoördinaten en elliptische coördinaten.

De primaire begrippen zijn de covariante fundamenteeltensor g_{ij} , de corresponderende contravariante fundamenteeltensor g^{ij} en de gemengde eenheidstensor δ_j^i . Zij zijn gebonden door de betrekking

$$(21.1) \quad g_{jk} g^{ik} = \delta_j^i.$$

Uit het ε - symbool

$$(21.2) \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{bij twee gelijke indices} \\ 1 & \text{bij even permutatie van } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{bij oneven permutatie van } 1, 2, 3 \end{cases}$$

kunnen we de volgende tensoren afleiden

$$(21.3) \quad e^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon_{ijk}, \quad e_{ijk} = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk}.$$

Het bewijs van het tensorkarakter volgt uit de in (18.13) gegeven transformatieregel

$$(21.4) \quad \sqrt{g'} = \Delta^{-1} \sqrt{g}$$

($\sqrt{g}$ is dus geen invariante scalar maar heet een scalardichtheid).

Inderdaad is bijv.

$$A_{i,j,k}^i \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} = \Delta^{-1} \sqrt{g} \varepsilon_{i',j',k'} = \sqrt{g'} \varepsilon_{i',j',k'}.$$

Het scalarproduct van twee contravariante vectoren a^i en b^i is

$$(21.5) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ij} a^i b^j.$$

Het vectorproduct van twee contravariante vectoren a^i en b^i is de contravariante vector

$$(21.6) \quad \vec{a} \times \vec{b} = e^{ijk} a_j b_k.$$

De gradiënt van een scalarveld $s(x^1, x^2, x^3)$ is de covariante vector

$$(21.7) \quad \text{grad } s = \frac{\partial s}{\partial x^i}.$$

De divergentie van een contravariant vectorveld $v^i(x^1, x^2, x^3)$ is volgend (19.28)

$$(21.8) \quad \text{div } \vec{v} = v^i_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} v^i) .$$

De rotatie van een covariant vectorveld $w_i(x^1, x^2, x^3)$ is de contravariante vector

$$(21.9) \quad \text{rot } \vec{w} = e^{ijk} w_{k,j} .$$

Volgens (19.2) zijn de componenten van de rotatie gelijk aan

$$(21.10) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial w_3}{\partial x^2} - \frac{\partial w_2}{\partial x^3} \right), \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x^3} - \frac{\partial w_3}{\partial x^1} \right), \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x^1} - \frac{\partial w_1}{\partial x^2} \right) .$$

De divergentie van een gradiëntveld $\text{grad } s$ levert de Laplace operator formule (19.29) het volgende geeft

$$(21.11) \quad \Delta s = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \frac{\partial s}{\partial x^j} \sqrt{g} \right) = (g^{ij} s_{,j})_{,i} .$$

Met behulp van het voorgaande is het niet moeilijk meer de evenwichts- en bewegingsvergelijkingen van de fysica voor algemene kromlijnige coördinaten op te schrijven. Als voorbeeld kiezen we de elasticiteitstheorie van §14. De uitwijking u_i bij de deformatie vatten we op als een covariante vector (vlakkenpaar). De deformatietensor van (14.6) gaat over in

$$(21.12) \quad D_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

Voor de dilatatie (14.33) schrijven we nu

$$(21.13) \quad \theta = g^{ij} D_{ij} = g^{ij} u_{i,j} .$$

De rek-trek relatie (14.28) wordt

$$(21.14) \quad p_{ij} = \lambda \theta g_{ij} + 2\mu D_{ij} .$$

De bewegingsvergelijking (14.32) tenslotte wordt

$$(21.15) \quad (\lambda + \mu) \theta_{,i} + \mu g^{jk} u_{i,j,k} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} .$$

Op analoge wijze kunnen de vergelijkingen van de hydrodynamica in algemene vorm gebracht worden.

Hierbij gaan we uit van de contravariante snelheidsvector $v^i = dx^i/dt$.
De continuïteitsvergelijking (15.3) gaat over in

$$(21.16) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^i)_{,i} = 0.$$

De bewegingsvergelijking (15.9) wordt

$$(21.17) \quad \frac{\partial v^i}{\partial t} + (v^i v^j + \frac{1}{\rho} g^{ij} p)_{,j} = F^i.$$

APPENDIX bij INLEIDING TOT DE VECTOR - EN TENSORREKENING

(prof.dr. H.A. Lauwerier)

door R.P. van de Riet, november, 1966.

Opmerking bij formule 14.4:

Omdat de afgeleiden $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ klein verondersteld worden, zodat we kwadratische termen mogen verwaarlozen, kan 14.4 ook geschreven worden als

$$(14.4a) \quad d\eta_i = (\delta_{ij} + R_{ij})dx_j$$

$$(14.4b) \quad d\xi_j = (\delta_{jk} + D_{jk})d\eta_k$$

Omdat R_{ij} een antisymmetrische tensor is bestaat er een vector $\vec{\omega}$ zo dat

$$R_{ij} dx_j = \epsilon_{ijk} \omega_j dx_k$$

Dus
$$d\vec{\eta} = d\vec{x} + \vec{\omega} \times d\vec{x}$$

Eenvoudig is in te zien dat $|d\vec{\eta}| = |d\vec{x}| +$ kwadratische termen zodat R_{ij} inderdaad een zuivere rotatie beschrijft, die geen bijdrage zal leveren in de spanningstoestand van het elastisch lichaam.

Omdat we geïnteresseerd zijn in het verband tussen deformatie en spanning kunnen we ons dus beperken tot het beschouwen van de tensor D_{ij} .

M.a.w. we mogen veronderstellen dat $R_{ij} = 0$, zodat de $d\eta_k$ in (14.4b) vervangen kan worden door dx_k .

Opgave:

- 1) Bewijs dat de lengte dx_1 van de vector $(dx_1, 0, 0)$ na deformatie met een bedrag $D_{11} dx_1$ is toegenomen. (Op kwadratische termen na).
- 2) Bewijs dat de hoek ϕ tussen de twee vectoren $(dx_1, 0, 0)$ en $(0, dx_2, 0)$ na de deformatie voldoet aan

$$\cos \phi = 2D_{12} \quad (\text{op kwadratische termen na}).$$

Blijkbaar nemen de componenten D_{11} , D_{22} en D_{33} de uitrekking (Eng. extension) voor hun rekening, terwijl de componenten D_{12} , D_{23} en D_{13} de afschuiving (Eng. shear) veroorzaken.

Dit volgt ook uit formule (14.10).

De betekenis van de covariante en contravariante componenten van een vector

In deze beschouwing nemen we aan dat de Riemann ruimte een Euclidische ruimte is.

M.a.w. er bestaat een vast gekozen Cartesisch coördinatenstelsel x^i waarin we de co- en contravariante vectoren willen beschouwen.

We merken op dat $g_{ij} = \sum_{i'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$.

Beschouw een vector $\vec{v}$ gedefinieerd met componenten $v^{i'}$ in het Cartesisch coördinatenstelsel.

Aangezien $g_{i'j'} = \delta_{i'j'}$, geldt $v_{i'} = g_{i'j'} v^{j'} = v^{i'}$.

De co- en contravariante componenten van v zijn dus identiek.

In het x^i coördinatensysteem zijn de co- en contravariante vectoren gegeven door

$$v^i = A_{i'}^i v^{i'} \quad \text{en} \quad v_{i'} = A_{i'}^{i'} v_{i'}$$

Hieruit volgt dat $v^i v_i = v^{i'} v_{i'} = |\vec{v}|^2$.

We zullen nu een interpretatie geven van de co- en contravariante componenten van $\vec{v}$ in het x^i coördinatenstelsel.

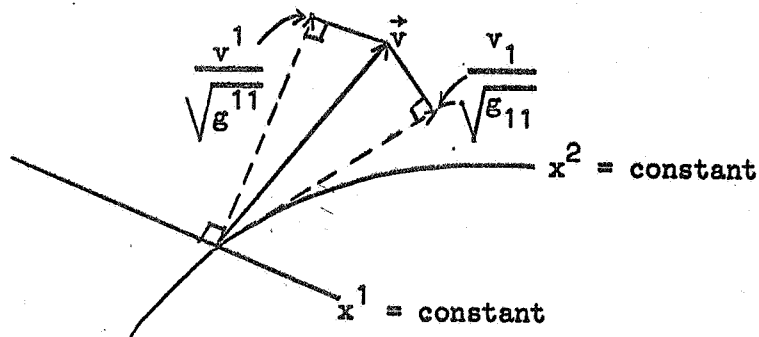
Stelling: De component van $\vec{v}$ in de richting van de x^1 as is gegeven door:

$$\frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}}$$

de component van $\vec{v}$ in de richting loodrecht op het vlak $x^1 = \text{constant}$ is gegeven door:

$$\frac{v^1}{\sqrt{g^{11}}}$$

Deze stelling is nader geïllustreerd in de figuur



Bewijs: Het Cartesisch coördinatenstelsel $x^{i'}$ is gedefinieerd door

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^N) \quad (1)$$

De richting van de x^1 as, is de richting van de raakvector aan de kromme, die ontstaat door $x^2, \dots, x^N$ constant te nemen en x^1 te variëren.

De raakvector $\vec{t}$ heeft dus als componenten in het $x^{i'}$ stelsel

$$t^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1}.$$

De component van $\vec{v}$ in de richting van $\vec{t}$ is nu

$$\frac{\vec{t} \cdot \vec{v}}{|\vec{t}|} = \frac{\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1} \cdot v_{i'}}{\left(\sum_{i'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}}$$

De inverse transformatie van (1) is gegeven door

$$x^i = x^i(x^{1'}, \dots, x^{N'})$$

De richting $\vec{n}$ loodrecht op het vlak $x^1 = \text{constant}$ is dus

$$\vec{n} = \nabla x^1 \quad \text{en} \quad n_{i'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}}.$$

De component van $\vec{v}$ in de richting van $\vec{n}$ is dus

$$\frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{|\vec{n}|} = \frac{\frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}} \cdot v^{i'}}{\left(\sum_{i'} \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}} \cdot \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{v^1}{\sqrt{g^{11}}}$$

N.B. dat $g^{11} = \sum_{i'} \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}}$, volgt uit de volgende beschouwing:

$$\sum_j \left(\sum_{i'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{i'}} \right) \cdot g_{jk} = \sum_j \left(\sum_{i'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{i'}} \cdot \sum_{j'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} \right) =$$

$$\sum_{i'} \sum_{j'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j'}} \cdot \delta_{i'}^{j'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} = \sum_{i'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i'}} \cdot \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} = \delta_k^{i'}.$$

Anderzijds geldt $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$, en aangezien de determinant $g \neq 0$, volgt:

$$g^{ij} = \sum_{i'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{i'}}.$$

De Divergentie, de Gradiënt, de Laplace operator en de Rotatie.

We leiden eerst een uitdrukking af voor de divergentie van een vector $\vec{v}$ in een willekurig kromlijng coördinatenstelsel x^i .

De volgende definitie zal het uitgangspunt zijn:

De divergentie van $\vec{v}$ in een punt P is bepaald door:

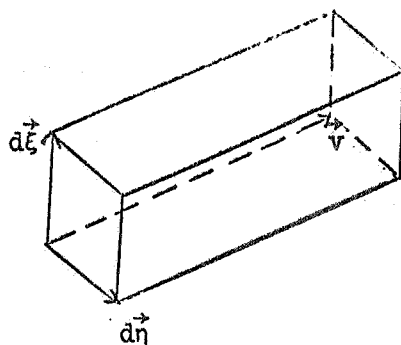
$$\text{div } \vec{v} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{R_\epsilon} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}}{\text{VOL } G_\epsilon}$$

waarin G_ϵ een gebied is dat, als $\epsilon \rightarrow 0$, tot het punt P convergeert, waarin R_ϵ de rand van G_ϵ is en waarin Vol G_ϵ het volume van G_ϵ is.

Voor G_ϵ nemen we het gebied dat wordt gevormd door een parallelpipidum, met zijden evenwijdig aan de $x^i = \text{constant}$ vlakken en ribben dx^1 , dx^2 en dx^3 .

De bijdragen tot $\iint_{R_e} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$, worden gevormd door de verschillende zijvlakken.

Een willekeurig zijvlak kan voorgesteld worden door twee vectoren $d\vec{\xi}$ en $d\vec{\eta}$.



De normaal $\vec{n}$ is dan gegeven door $\vec{n} = d\vec{\xi} * d\vec{\eta}$

het oppervlak van $d\sigma$ is $|\vec{n}|$.

Dus $\vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot (d\vec{\xi} * d\vec{\eta}) = \epsilon_{i'j'k'} v^{i'} d\xi^{j'} d\eta^{k'}$.

Nu is ϵ_{ijk} geen invariante tensor zoals δ_j^i .

Dit blijkt als volgt (met $x^{i''}$ een willekeurig coördinatenstelsel):

$$\epsilon_{ijk} A_{i''}^i A_{j''}^j A_{k''}^k = \begin{vmatrix} A_{i''}^1 & A_{i''}^2 & A_{i''}^3 \\ A_{j''}^1 & A_{j''}^2 & A_{j''}^3 \\ A_{k''}^1 & A_{k''}^2 & A_{k''}^3 \end{vmatrix} = \epsilon_{i''j''k''} \cdot \Delta^{-1},$$

met $\Delta^{-1} = \det (A_{i''}^i)$.

ϵ_{ijk} is een zogenaamde tensor capaciteit.

Beschouw nu $\sqrt{g}$:

Uit

$$g_{i''j''} = A_{i''}^i A_{j''}^j g_{ij}$$

volgt $\sqrt{g''} = \Delta^{-1} \sqrt{g}$.

$\sqrt{g}$ is een zogenaamde scalar dichtheid.

Het product $\sqrt{g} \epsilon_{ijk}$ is nu wel een tensor omdat bij transformatie de factoren Δ wegvallen.

Voor Cartesische coördinaten geldt $\sqrt{g'} = 1$ zodat we zonder meer kunnen stellen

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} &= \sqrt{g'} \epsilon_{i'j'k'} v^{i'} d\xi^{j'} d\eta^{k'} \\ &= \sqrt{g} \epsilon_{ijk} v^i d\xi^i d\eta^k. \end{aligned}$$

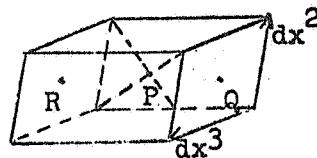
Neem nu $d\xi^i = (0, dx^2, 0)$

$$d\eta^i = (0, 0, dx^3)$$

dan is

$$\vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \sqrt{g} \epsilon_{123} v^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{g} v^1 dx^2 dx^3.$$

Het parallelpipidum (dx^1, dx^2, dx^3) , waarop we de uitdrukking voor de divergentie willen toepassen is getekend in de volgende figuur:



We beschouwen de bijdrage tot $\int \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$ van de gearceerde vlakjes.
De bijdrage van het voorvlak is dan:

$$\sqrt{g}(Q) v^1(Q) dx^2 dx^3,$$

het achtervlak levert een bijdrage

$$- \sqrt{g}(R) v^1(R) dx^2 dx^3.$$

(Het minus teken omdat de normaal $d\vec{\xi} \neq d\vec{\eta}$, naar binnen wijst).

Van beide vlakjes samen dus een bijdrage

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} \cdot v^1) \cdot dx^1 dx^2 dx^3.$$

De andere vlakjes leveren dezelfde bijdragen met verwisseling der indices, dus

$$\iiint_{R_\epsilon} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} v^i) \cdot dx^1 \cdot dx^2 \cdot dx^3.$$

Tenslotte moeten we nog het volume van het parallelpipidum berekenen.

In het Cartesisch coördinatenstelsel is het volume gegeven door

$$\epsilon_{i'j'k'} d\xi^{i'} d\eta^{j'} d\zeta^{k'}$$

met $d\xi^i$, $d\eta^j$ en $d\zeta^k$ de vectoren die het parallelpipidum opspannen.

In het x^i coördinatenstelsel is dit dus gelijk aan:

$$\sqrt{g} \epsilon_{ijk} d\xi^i d\eta^j d\zeta^k$$

met

$$d\xi^i = (0, dx^2, 0)$$

$$d\eta^i = (0, 0, dx^3)$$

$$d\zeta^i = (dx^1, 0, 0).$$

$$\text{Dus VOL } G_\epsilon = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Conclusie:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} v^i).$$

De gradiënt van een functie ϕ , heeft in het Cartesisch coördinatenstelsel de componenten

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}}.$$

Zodat de covariante componenten in het x^i coördinatenstelsel gegeven zijn door

$$A_{i'}^{i'} \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

en de contravariante componenten:

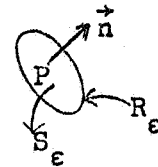
$$\sum_{i'} A_{i'}^i \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}} = \sum_{i'} A_{i'}^i A_{i'}^j \frac{\partial \phi}{\partial x^j} = g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}.$$

De Laplace operator $\Delta \phi$ is gedefinieerd door

$$\Delta \phi = \text{div grad } \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \cdot g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}).$$

De uitdrukking voor de rotatie leiden we af, gebruik makend van : de rotatie van $\vec{v}$ in een punt P in de richting $\vec{n}$ is bepaald door:

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{v} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\oint_{R_\epsilon} \vec{v} \cdot d\vec{s}}{S_\epsilon}$$



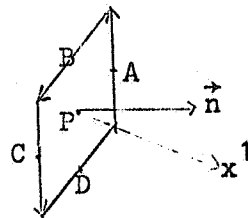
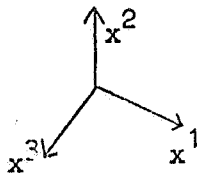
Waarin R_ϵ de rand is van een gericht oppervlak, met eenheidsnormaal $\vec{n}$ en oppervlak S_ϵ .

Als $\epsilon \rightarrow 0$ dan moet het oppervlak convergeren naar het punt P.

We beschouwen eerst een lijnelement $d\vec{s} = d\vec{\xi}$, en we berekenen $\vec{v} \cdot d\vec{s}$.

$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = v_i d\xi^i, \quad d\xi^i = v_i d\xi^i.$$

Voor het oppervlak S_ϵ kiezen we een oppervlak in het vlak x^1 is constant, de rand R_ϵ kiezen we langs de x^2 en x^3 coördinaatlijnen.



De rand R_ϵ is opgebouwd uit de volgende "vectortjes", die tot de integraal de tevens vermelde bijdragen leveren:

$$d\xi_A^i = (0, dx^2, 0) : v_2(A) dx^2$$

$$d\xi_B^i = (0, 0, dx^3) : v_3(B) dx^3$$

$$d\xi_C^i = (0, -dx^2, 0) : -v_2(C) dx^2$$

$$d\xi_D^i = (0, 0, -dx^3) : -v_3(D) dx^3.$$

Totaal dus:

$$-\frac{\partial v_2(P)}{\partial x^3} \cdot dx^3 dx^2 + \frac{\partial v_3(P)}{\partial x^2} \cdot dx^2 dx^3$$

Verder is het oppervlak S_ϵ gelijk aan de lengte van

$$\vec{\alpha} = d\xi_A \times d\xi_B.$$

Nu is

$$\alpha_{i'} = \epsilon_{i'j'k'} d\xi_A^{j'} d\xi_B^{k'}$$

dus

$$\alpha_i = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} d\xi_A^j d\xi_B^k$$

$$= \sqrt{g} \epsilon_{i23} dx^2 dx^3$$

zodat

$$|\vec{\alpha}| = (g^{ij} \alpha_i \alpha_j)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g^{11}} \sqrt{g} dx^2 dx^3$$

Conclusie:

In het punt P is de rotatie van $\vec{v}$, in de richting van $\vec{n}$, d.w.z. in de richting loodrecht op het vlak $x^1 = \text{constant}$ gegeven door:

$$\frac{1}{\sqrt{g^{11}} \cdot g} \cdot \left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^3} \right).$$

De contravariante component van $\text{rot } \vec{v}$ is dus gegeven door:

$$(\text{rot } \vec{v})^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^3} \right).$$

Op analoge wijze vinden we de andere contravariante componenten.

Het is nu eenvoudig in te zien dat we kunnen schrijven:

$$(\text{rot } \vec{v})^i = \frac{\epsilon^{ijk} \partial v_k}{\sqrt{g} \partial x^j}$$

$$\text{met } \epsilon^{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{als } i = j \text{ of } i = k \text{ of } j = k, \\ 1 & \text{als } (i, j, k) \text{ een even permutatie van} \\ & (1, 2, 3) \text{ is,} \\ -1 & \text{als } (i, j, k) \text{ een oneven permutatie van} \\ & (1, 2, 3) \text{ is.} \end{cases}$$

Opgaven:

1. Als het coördinatensysteem x^i orthogonaal is dan valt de richting loodrecht op het vlak $x^i = \text{constant}$ samen met de richting van de x^i coördinaatas, en er geldt:

$$g_{ij} = 0 \text{ als } i \neq j.$$

In de notatie van paragraaf 13 is nu $h_1^2 = g_{11}$, $h_2^2 = g_{22}$ en $h_3^2 = g_{33}$. In paragraaf 13 zijn de formules afgeleid voor de divergentie, de gradiënt, de Laplace operator en de rotatie, die schijnbaar verschillen met de formules afgeleid in deze appendix. Verklaar het verschil.

2. Een contravariante vector v^i kunnen we voorstellen als een pijl tussen twee punten (bijv. $v^i = \frac{dx^i}{dt}$), een covariante vector w_i als een pijl tussen twee vlakken (bijv. $w_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$).

De contravariante component v^1 van een vector $\vec{v}$ is de component van $\vec{v}$ in de richting loodrecht op het vlak $x^1 = \text{constant}$, vermenigvuldigd met $\sqrt{g^{11}}$. Men zou in eerste instantie echter verwachten dat dit de covariante component v_1 had moeten zijn.

Verklaar deze zaak, zonder gebruik te maken van het in deze appendix gegeven bewijs, door uit te gaan van de raakvector $\vec{v}$ aan een kromme $x^{i'} = x^{i'}(t)$.

3. Bewijs dat het systeem $\frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}}$ een tensor is.

Covariante differentiatie, Geodeten-coördinatenstelsel, Pseudo-parallel.

In de Euclidische ruimte kan uit een scalarveld s een vectorveld gedefinieerd worden door:

$$v_i = \frac{\partial s}{\partial x^i}.$$

In kromlijnige coördinaten zijn de aldus gedefinieerde componenten v_i ook de componenten van een vector.

Daar immers in een nieuw coördinatenstelsel $x^{i'} = x^{i'}(x^1 \dots x^N)$ geldt

$$v_{i'} = \frac{\partial s}{\partial x^{i'}} = A_{i'}^i \frac{\partial s}{\partial x^i}$$

In de Euclidische ruimte vormen de componenten $\frac{\partial v^i}{\partial x^k}$ een tensor.

Dit is niet meer het geval in een kromlijnig coördinatenstelsel, als gevolg van het feit dat v^i in een punt $P(x^i)$ anders transformeert dan in het punt $Q(x^i + dx^i)$;

Men kan dit ook direct inzien door berekening:

$$\frac{\partial v^{i'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}} (A_{i'}^i v^i) = A_{k'}^k A_{i'}^i \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + v^i \frac{\partial A_{i'}^i}{\partial x^{k'}}.$$

In feite ontbreekt het middel om $v^i(P)$ te vergelijken met $v^i(Q)$.

De beide vectoren zijn wezenlijk verschillend.

Het is daarom nodig een nieuw begrip in te voeren n.l. de pseudo-parallele verplaatsing, analoog aan het begrip parallele verplaatsing in de Euclidische ruimte.

In de Euclidische ruimte verplaatsen we $v^i(P)$, parallel aan zich zelf naar Q en vergelijken daar beide vectoren $v^i(P)$ en $v^i(Q)$, hetgeen aanleiding geeft tot de afgeleide vector $\frac{\partial v^i}{\partial x^k}$.

De meest eenvoudige wijze om een vector pseudo-parallel te verplaatsen is te eisen dat de verplaatste vector $u^i(Q)$ in al zijn componenten gelijk is aan $v^i(P)$

dus $u^i(Q) = v^i(P).$

Dit is echter een veel te strenge eis, want nu is in het algemeen $u^i(Q)$ geen vector.

Wel echter kunnen we eisen dat er een speciaal coördinaten systeem $x^{i'}$ bestaat zodanig dat $u^{i'}(Q) = v^{i'}(P)$.

Dit coördinaten systeem zullen we het geodeten-coördinaten systeem noemen. In het oorspronkelijke x^i coördinaten systeem heeft $u^i(Q)$ de gedaante:

$$\begin{aligned} u^i(Q) &= A_{i'}^i(Q) u^{i'}(Q) = A_{i'}^i(Q) v^{i'}(P) \\ &= (A_{i'}^i(P) + \frac{\partial A_{i'}^i(P)}{\partial x^k} \cdot dx^k) v^{i'}(P) \\ &= v^i(P) + \frac{\partial A_{i'}^i(P)}{\partial x^k} \cdot dx^k \cdot A_j^{i'} v^j(P) \\ &= v^i(P) - \Gamma_{jk}^i v^j(P) dx^k \end{aligned}$$

$$\text{met } \Gamma_{jk}^i = - \frac{\partial A_{i'}^i}{\partial x^k} \cdot A_j^{i'}.$$

Er geldt: Γ_{jk}^i is symmetrisch in j en k .

$$\text{immers } \Gamma_{jk}^i = - \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}} \cdot A_k^{k'} A_j^{i'} = - \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} \cdot A_j^{k'} A_k^{i'}.$$

Dit is een manier om pseudo-parallele verplaatsing in te voeren; een andere manier is om uit te gaan van het systeem Γ_{jk}^i ; en $u^i(Q)$ per definitie pseudo-parallel aan $v^i(P)$ te verklaren als

$$u^i(Q) = v^i(P) - \Gamma_{jk}^i v^j(P) dx^k.$$

Hierbij hoeft men eventueel niet te eisen dat Γ_{jk}^i symmetrisch is (in dat geval heeft men te maken met z.g.n. ruimtes van Cartan).

Wel moet men eisen stellen aan de transformatie wijze der Γ_{jk}^i , opdat $u^i(Q)$ inderdaad een vector zal zijn.

Deze eisen verkrijgt men op de volgende wijze:

$$u^{i'}(Q) = v^{i'}(P) - \Gamma_{j'k'}^{i'} v^{j'}(P) dx^{k'}$$

(N.B. het accent teken heeft betrekking op een willekeurig coördinatenstelsel en niet op het geodeten-coördinatenstelsel; i.h.v. zal $v^{i'}(P)$

als $v^{i'}$ genoteerd worden).

$$A_{i'}^{i'}(Q) u^i(Q) = A_{i'}^{i'} v^i - \Gamma_{j'k'}^{i'} A_{j'}^{j'} v^j A_{k'}^{k'} dx^k$$

het linkerlid is gelijk aan

$$A_{i'}^{i'}(Q) [v^i - \Gamma_{pq}^i v^p dx^q] =$$

$$(A_{i'}^{i'} + \frac{\partial A_{i'}^{i'}}{\partial x^s} dx^s)(v^i - \Gamma_{pq}^i v^p dx^q) =$$

$$= A_{i'}^{i'} v^i + (-\Gamma_{pq}^i A_{i'}^{i'} + \frac{\partial A_{i'}^{i'}}{\partial x^q} v^p) dx^q v^p$$

Conclusie: $(-\Gamma_{pq}^i A_{i'}^{i'} + \frac{\partial A_{i'}^{i'}}{\partial x^q} + \Gamma_{j'k'}^{i'} A_{j'}^{j'} A_{k'}^{k'}) v^p dx^q = 0$

dit moet gelden voor willekeurige v^p en dx^q dus:

$$-\Gamma_{pq}^i A_{i'}^{i'} + \frac{\partial A_{i'}^{i'}}{\partial x^q} = -\Gamma_{j'k'}^{i'} A_{j'}^{j'} A_{k'}^{k'}$$

na vermenigvuldiging met $A_{n'}^p, A_{m'}^q$, en verwisseling van $n' \rightarrow j', m' \rightarrow k'$:

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = A_{j'}^p, A_{k'}^q, A_{i'}^{i'} \Gamma_{pq}^i - A_{j'}^p, A_{k'}^q, \frac{\partial A_{i'}^{i'}}{\partial x^q}$$

Uitgaande van de definitie van pseudo-parallele verplaatsing t.o.v. de Γ_{jk}^i , is het nu niet moeilijk om een differentiaalvergelijking te construeren waaraan het speciale geodeten-coördinatenstelsel moet voldoen.

Immers in het geodeten-coördinatenstelsel geldt $\Gamma_{j'k'}^{i'} = 0$.

Dus de functies $x^{i'} = x^{i'}(x^1 \dots x^n)$ moeten voldoen aan

$$A_{j'}^p, A_{k'}^q, A_{i'}^{i'} \Gamma_{pq}^i - A_{j'}^p, A_{k'}^q, \frac{\partial A_{i'}^{i'}}{\partial x^q} = 0$$

Nu is

$$\frac{\partial A_{i'}^{i'}}{\partial x^q} = A_{i'}^{i'} \frac{\partial A_{i'}^{i'}}{\partial x^q}$$

Bovendien geldt: $A_j^p, A_p^{i'} = \delta_j^{i'}$

dus
$$A_j^p, \frac{\partial A_p^{i'}}{\partial x^{q'}} = - A_p^{i'}, \frac{\partial A_j^p}{\partial x^{q'}}$$

We vinden dus

$$A_j^p, A_k^q, A_i^{i'} r_{pq}^i + A_p^{i'}, A_k^q, A_q^{q'} \frac{\partial A_j^p}{\partial x^{q'}} = 0$$

vermenigvuldiging met A_i^1 , geeft:

$$A_j^p, A_k^q, r_{pq}^1 + \frac{\partial A_j^1}{\partial x^{k'}} = 0$$

of

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{k'}} r_{pq}^1 + \frac{\partial^2 x^1}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} = 0$$

Het is nu mogelijk om de covariante afgeleide van v^i te definieren:

$$\begin{aligned} \nabla_k v^i &= \lim_{dx^k \rightarrow 0} \frac{v^i(Q) - u^i(Q)}{dx^k} \\ &= \lim_{dx^k \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + r_{jk}^i v^j \right) dx^k \right\} / dx^k \end{aligned}$$

dus

$$\nabla_k v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + r_{jk}^i v^j$$

Dit wordt ook genoteerd als $v_{,k}^i$.

Differentiatie van covariante vectoren en algemene tensoren wordt nu zodanig gedefinieerd dat

- 1e. in een Euclidisch coördinaten systeem de gewone differentiatie geldt,
 - 2e. de regel van Leibniz gehandhaafd blijft:
- dus als f' de nieuwe differentiatie van f aanduidt geldt:

$$(f_1 \dots f_n)' = f_1' f_2 \dots f_n + \dots + f_1 \dots f_{n-1}' \cdot f_n'$$

Aangezien $\frac{\partial s}{\partial x^k}$, met s een scalarveld, al een vector is, kan dus gesteld worden:

$$\nabla_k s = \frac{\partial s}{\partial x^k}.$$

Voor een covariante vector u_i en een willekeurige contravariante vector v^i geldt:

$$u_i v^i = \text{scalar}$$

dus

$$\nabla_k (u_i v^i) = \frac{\partial}{\partial x^k} (u_i v^i) = u_i \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + v^i \frac{\partial u_i}{\partial x^k}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} u_i \nabla_k v^i + v^i \nabla_k u_i$$

$$= u_i \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i v^j \right) + v^i \nabla_k u_i.$$

Dus

$$(\nabla_k u_i + \Gamma_{ik}^j u_j - \frac{\partial u_i}{\partial x^k}) v^i = 0$$

voor willekeurige v^i , dus moet gelden:

$$\nabla_k u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^j u_j.$$

Op analoge wijze volgt uit de boven omschreven eisen dat

$$\begin{aligned} \nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} &= \frac{\partial}{\partial x^k} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \\ &+ \Gamma_{\rho k}^{i_1} t^{\rho i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \dots + \Gamma_{\rho k}^{i_p} t^{i_1 \dots i_{p-1} \rho}_{j_1 \dots j_q} \end{aligned}$$

$$- \left[\Gamma_{j_1 k}^{\rho} t^{i_1 \dots i_p}_{\rho j_2 \dots j_q} + \dots + \Gamma_{j_q k}^{\rho} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{q-1} \rho} \right].$$

Hetgeen ook genoteerd wordt als $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q, k}$

Covariante afgeleide in een metrische ruimte

In een Riemann ruimte, met fundamenteaaltensor g_{ij} is het mogelijk de Γ^i_{jk} zo te definieren dat de parallel verplaatste vector dezelfde lengte heeft als de oorspronkelijke vector.

We vragen ons dus af kan men zodanige Γ^i_{jk} construeren dat geldt:

$$g_{ij}(Q) u^i(Q) u^j(Q) = g_{ij}(P) v^i(P) v^j(P).$$

Het zal blijken dat het antwoord bevestigend luidt.

Achteraf zullen we echter moeten aantonen dat de gevonden Γ^i_{jk} ook behoren bij een geodeten-coördinatenstelsel.

Allereerst construeren we de Γ^i_{jk} , vervolgens verwijzen we naar paragraaf 20 waarin de kortste lijnen (geodeten) behandeld zijn en tenslotte tonen we aan dat er inderdaad een geodeten-coördinatenstelsel bestaat.

Van nu af aan zullen we zolang nog niet vastgesteld is of er inderdaad een geodeten-coördinaten systeem te vinden is, niet meer de notatie Γ^i_{jk} gebruiken maar $\{^i_{jk}\}$.

Gevraagd dus, zijn er $\{^i_{jk}\}$ zodanig dat als

$$u^i(Q) = v^i(P) - \{^i_{jk}\} v^j dx^k$$

geldt:

$$g_{ij}(Q) u^i(Q) u^j(Q) = g_{ij}(P) v^i(P) v^j(P).$$

$$(g_{ij}(P) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} dx^k)(v^i(P) - \{^i_{lm}\} v^l dx^m)(v^j(P) - \{^j_{np}\} v^n dx^p) =$$

$$= g_{ij} v^i v^j - g_{ij} v^i \{^j_{np}\} v^n dx^p - g_{ij} v^j \{^i_{lm}\} v^l dx^m + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^i v^j dx^k +$$

+ tweede orde termen = $g_{ij} v^i v^j$

$$\text{of: } g_{ij} \{^j_{np}\} v^i v^n dx^p + g_{ij} \{^i_{lm}\} v^j v^l dx^m = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^i v^j dx^k.$$

Aangezien alle indices sommatie indices zijn kunnen we er voor zorgen dat overal $v^i v^j dx^k$ staat

$$g_{ij} \{^1_{jk}\} v^i v^j dx^k + g_{lj} \{^1_{ik}\} v^i v^j dx^k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^i v^j dx^k$$

$$\text{dus: } g_{il} \{^1_{jk}\} + g_{lj} \{^1_{ik}\} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \quad (1)$$

Verwisseling van indices geeft

$$i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$$

$$g_{il} \{^1_{ki}\} + g_{lk} \{^1_{ji}\} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \quad (2)$$

$$\text{en } g_{kl} \{^1_{ij}\} + g_{li} \{^1_{kj}\} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \quad (3)$$

Nemen we nu aan dat $\{^1_{ij}\}$ symmetrisch is in i en j dan kunnen we $\{^1_{ij}\}$ berekenen door vergelijkingen (2) en (3) op te tellen en daarvan (1) af te trekken, dit resulteert in:

$$g_{lk} \{^1_{ji}\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\} = [ij, k]$$

met

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\}$$

Dit systeem getallen wordt het 1e symbool van Christoffel genoemd.

Vermenigvuldiging met g^{kp} geeft:

$$\{^p_{ij}\} = g^{kp} [ij, k], \text{ en is inderdaad symmetrisch.}$$

Het systeem $\{^p_{ij}\}$ heet het 2e symbool van Christoffel.

Het geodeten-coördinatenstelsel

Met behulp van de in paragraaf 20 ingevoerde geodeten, kan men een geodeten-coördinatenstelsel invoeren, in de buurt van P.

Voor het gemak nemen we aan dat P de oorsprong is.

Door elk punt van de ruimte gaan i.h.a. ∞^{N-1} geodeten, (N.B. N is de dimensie van de ruimte). Waarvan de richting nog nader bepaald mag worden. Zo ook in P.

We kunnen dus N richtingsgetallen α^i , met $g_{ij} \alpha^i \alpha^j = 1$, kiezen waarmee een geodeet is vastgelegd. Op deze geodeet liggen ∞^1 punten die we kunnen karakteriseren door de booglengte s gemeten vanaf P. Op deze wijze zijn N nieuwe coördinaten geconstrueerd namelijk α^i en s.

Hoe zien deze coördinaten er lokaal in P uit; wat is het verband met de oorspronkelijke coördinaten?

De geodeet heeft de parametervoorstelling $x^i = x^i(s)$; ontwikkeling naar s geeft:

$$x^i = \alpha^i s + \beta^i s^2 + \dots$$

Substitutie in (20.3) met $\Gamma_{jk}^i = \{ \}_{jk}^i$ geeft:

$$2\beta^i + \{ \}_{jk}^i (\alpha^j + 2\beta^j s)(\alpha^k + 2\beta^k s) + \dots = 0.$$

Dus
$$\beta^i = -\frac{1}{2} \{ \}_{jk}^i \alpha^j \alpha^k.$$

We construeren nu het geodeten-coördinatenstelsel $\bar{x}^i$ door

$$\bar{x}^i = \alpha^i s.$$

Zodat

$$x^i = \bar{x}^i - \frac{1}{2} \{ \}_{jk}^i \bar{x}^j \bar{x}^k + \dots$$

Het bewijs dat het stelsel $\bar{x}^i$ aan de differentiaalvergelijking voor een geodeten-coördinatenstelsel voldoet in P wordt aan de lezer overgelaten.

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Syllabus

Vector en Tensorrekening

Appendix II



Februari 1969.

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Samenvatting Algemene Tensorrekening.

College Prof. Lauwerier 1968 - '69

1. Tensorrekening in R_n .

We beschouwen als generalisatie van de drie-dimensionale Euclidische ruimte R_3 met Cartesische coördinaten een n-dimensionale Euclidische ruimte R_n met rechte lijnige coördinaten $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. We zien m.a.w. voorlopig af van metrische begrippen als hoek en afstand. Overgang naar nieuwe coördinaten $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ met behoud van de oorsprong C wordt beschreven door een niet singuliere lineaire transformatie.

$$(1.1) \quad \bar{x}^i = A^i_{.j} x^j, \quad ,$$

$$\text{met } \Delta = \det A^i_{.j} = \begin{vmatrix} A^1_{.1} & A^1_{.2} & \dots & A^1_{.n} \\ A^2_{.1} & A^2_{.2} & \dots & A^2_{.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^n_{.1} & A^n_{.2} & \dots & A^n_{.n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Een bovenindex heet een contravariante index.

Een benedenindex heet een covariante index.

De indices hebben een rangorde van links naar rechts zodat in $A^i_{.j}$ de rijindex i vooraf gaat aan de kolomindex j. De sommatieconventie wordt toegepast op een als eo-eu contravariante herhaalde index.

De inverse transformatie van (1.1) is

$$(1.2) \quad x^i = A^i_{.j} \bar{x}^j.$$

De matrices $A^i_{.j}$ en $A^i_{.j}$ zijn elkaars reciproke.

Hierbij geldt

$$(1.3) \quad A^i_{.j} = \frac{\text{cofactor } A^j_{.i} \text{ in } (A^j_{.i})}{\Delta},$$

en

$$(1.4) \quad A_{\cdot j}^i A_{\cdot k}^j = A_{\cdot j}^i A_{\cdot k}^j = \delta_k^i ,$$

waarbij δ_k^i de aangepaste notatie is van het Kronecker symbool.

De volgorde van de indices doet er niet toe zodat we de indices gewoon onder elkaar schrijven.

Een contravariante vector v^i is meetkundig de pijl OP waarbij P de coördinaten $(v^1, v^2, \dots, v^n)$ heeft.

We noemen v^i de contravariante componenten van de vector. De transformatieregel van een contravariante vector is natuurlijk identiek met (1.1) en (1.2).

Een covariante vector wordt gedefinieerd als een lineaire functionaal op de door de contravariante vectoren v^i gevormde lineaire vectorruimte welke met R_n overeenstemt. Een lineaire functionaal op de v^i - ruimte is van de vorm

$$(1.5) \quad u_1 v^1 + u_2 v^2 + \dots + u_n v^n$$

en is zelf weer op te vatten als een vector met covariante componenten $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Het meetkundige beeld is het hypervlak dat bepaald is door de vergelijking

$$u_1 v^1 + u_2 v^2 + \dots + u_n v^n = 1 .$$

Gewoonlijk voegen we hier het door 0 hieraan evenwijdig gaande hypervlak aan toe.

In R_3 dus : puntenpaar = contravariante vector ,

vlakkenpaar = covariante vector.

De transformatieregel van de covariante vector u_i volgt uit de invariantie van (1.5) aangezien het begrip lineaire functionaal niet afhangt van het toevallig gekozen coördinatenstelsel.

$$\text{Uit} \quad \bar{u}_i v^i = u_i v^i = u_i A_j^i v^j = u_j A_i^j v^i ,$$

volgt

$$(1.6) \quad \bar{u}_i = A_i^j u_j$$

en analoog invers

$$(1.7) \quad u_i = A_{\cdot i}^j \bar{u}_j .$$

We merken op dat de matrix $A_i^{\cdot j}$ de getransponeerde inverse is van $A_{\cdot j}^i$, die van (1.1).

Uit een willekeurige contravariante vector a^i en een covariante vector b_i volgt de invariante scalar

$$(1.8) \quad a^i b_i,$$

hetgeen onmiddellijk voortvloeit uit de definitie van covariante vector. De meetkundige betekenis blijkt a.v.

De vector a^i correspondeert met het punt $A(x^i = a^i)$. De vector b_i komt overeen met het hypervlak β

$$b_i x^i = 1.$$

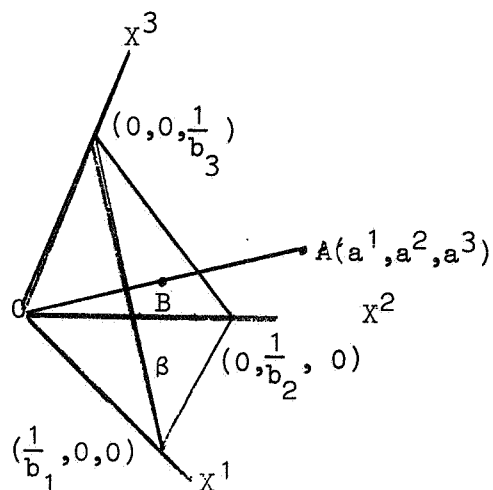
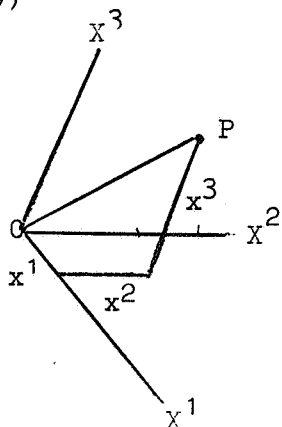
De lijn OA snijdt het hypervlak β in een punt B waarvan de coördinaten van de vorm (λa^i) zijn.

Substitutie in de vergelijking van β geeft

$$\lambda(b_i a^i) = 1.$$

Anderzijds geldt $\lambda = OS/OP$. Dus

$$(1.9) \quad a^i b_i = OP/OS.$$



Een tensor wordt gedefinieerd als een multilineaire functionaal t.o.v. de contra- en covariante vectoren.

Voorbeeld:

De tensor $T_{\dots k}^{ij}$ heeft 2 contravariante en 1 covariante index.

De transformatieregel is

$$\bar{T}_{\dots k}^{ij} = A_{\cdot p}^i A_{\cdot q}^j A_k^{\cdot r} T_{\dots r}^{pq}.$$

Een algemene begrip is de gewogen tensor waarbij in het rechterlid van de transformatieregel de factor Δ^μ voorkomt.

Als $\mu = 1$ spreekt men van een tensorcapaciteit.

Als $\mu = -1$ spreekt men van een tensordichtheid.

Voorbeeld: Een contravariante vectordichtheid M^i heeft de transformatieregel

$$\bar{M}^i = \Delta^{-1} A^i_{\cdot j} M^j.$$

Bij de speciale tensorrekening waaraan de groep SO_3 van echte draaiingen van Cartesische coördinatenstelsels ten grondslag ligt zijn er een aantal identificaties. Aangezien de transformatieregel (1.1) dan een orthogonale matrix t_{ij} met $\Delta = 1$ bevat stemt de transformatieregel van een covariante vector met die van een contravariante vector overeen. Het heeft dan geen zin meer onderscheid te maken tussen contra- en covariante vectoren en overeenkomstige indices. Aangezien ook $\Delta = 1$ verliest het begrip gewogen tensor zijn aparte betekenis.

Een kleine verruiming van de basisgroep, bijv. naar O_3 d.w.z. SO_3 met spiegelingen, geeft evenwel complicaties omdat ook $\Delta = -1$ mogelijk is. De gewogen tensoren vallen dan uiteen in echte tensoren met μ even en pseudotensoren met μ oneven. Als voorbeeld is het uitwendig product van twee vectoren te interpreteren als een pseudo-vector en het tripelproduct van drie vectoren, meetkundig de inhoud van een scheef blok, als een pseudoscalar.

De gebruikelijke tensorregels van de speciale tensorrekening kunnen met voor de hand liggende aanpassingen zonder moeite generaliseerd worden.

Een tensor heet symmetrisch wanneer verwisseling van twee contravariante indices of van twee covariante indices geen invloed heeft. Treedt er bij elke genoemde verwisseling tekenwisseling op dan heet de tensor antisymmetrisch.

Uit een gegeven tensor kunnen door de processen van symmetrisering of antisymmetrisering een symmetrische of antisymmetrische afgeleid worden.

Voorbeeld: $T^{(ij)} = \frac{1}{2} (T^{ij} + T^{ji})$ is symmetrisch.

$$T^{[ijk]} = \frac{1}{6} (T^{ijk} - T^{ikj} + T^{jki} - T^{jik} + T^{kij} - T^{kji}).$$

In het bijzonder kan men uit twee of drie contravariante vectoren door antisymmetrisering een zgn. bivector of trivector afleiden.

De bivector $a \begin{bmatrix} i & j \end{bmatrix}$ heeft $\frac{1}{2} n(n-1)$ componenten.

De trivector $a \begin{bmatrix} i & j & k \end{bmatrix}$ heeft $\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$ componenten.

Is R_3 heeft een bivector slechts 3 componenten. De vraag rijst of een bivector weer een vector is. In T^{ij} antisymmetrisch in R_3 , dan schrijven we

$$C_1 = T^{23} = -T^{32}, \quad C_2 = T^{31} = -T^{13}, \quad C_3 = T^{12} = -T^{21}.$$

Er geldt

$$\bar{C}_1 = T^{23} = A^2_{.i} A^2_{.j} T^{ij} = (A^2_{.i} A^3_{.j} - A^2_{.j} A^3_{.i}) C_k.$$

waarbij i, j, k een permutatie van 1, 2, 3 zijn.

Volgens (1.3) geldt

$$\bar{C}_1 = \text{cof. } A^1_{.k} C_k = \Delta A^1_{.k} C_k.$$

Hieruit volgt algemeen

$$\bar{C}_i = \Delta A^j_{.i} C_j,$$

zodat een contravariante bivector zich in R_3 transformeert als een covariante vectorcapaciteit.

Op analoge wijze blijkt een contravariante trivector in R_3 een scalarcapaciteit te zijn.

Is namelijk T^{ijk} antisymmetrisch en is

$$c = T^{123} = -T^{132} = \dots,$$

dan geldt $\frac{\bar{c}}{c} = T^{123} = A^1_{.i} A^2_{.j} A^3_{.k} T^{ijk} = (\epsilon_{ijk} A^1_{.i} A^2_{.j} A^3_{.k}) c,$

zodat inderdaad

$$\bar{c} = \Delta c.$$

Antisymmetrisering van de uit drie contravariante vectoren gevormde tensor $a^i b^j c^k$ leidt dus tot de scalarcapaciteit $\epsilon_{ijk} a^i b^j c^k$.

Hieruit volgt dat de tensor ϵ_{ijk} een covariante tensorcapaciteit is.

Antisymmetrisering van de covariante tensor T_{ijk} levert analoog een scalardichtheid. Dit betekent dat ϵ_{ijk} ook op te vatten is als een contravariante tensordichtheid.

2. Metriek in R_n .

In R_n wordt metriek ingevoerd door met behulp van een zgn. fundamenteaaltensor g_{ij} als inwendig product van twee contravariante vectoren a^i en b^i de volgende uitdrukking te definiëren

$$(2.1) \quad g_{ij} a^i b^j.$$

We nemen hierbij aan dat g_{ij} symmetrisch. We beperken ons tot de zgn. Riemann-metriek waarbij

$$g_{ij} x^i x^j,$$

een positief definitieve vorm is.

De kwadraatlengte van een contravariante vector a^i is nu gegeven als

$$(2.2) \quad g_{ij} a^i a^j,$$

welke in de hier gevolgde Riemann-metriek positief is.

De cosinus tussen a^i en b^i is bepaald door

$$(2.3) \quad \cos(a^i, b^i) = \frac{g_{ij} a^i b^j}{\sqrt{g_{ij} a^i a^j} \sqrt{g_{ij} b^i b^j}}.$$

In het bijzonder correspondeert loodrechte stand met

$$(2.4) \quad g_{ij} a^i b^j = 0.$$

Volgens de productregel van determinanten toegepast op

$$g_{ij} = A_{.i}^k A_{.j}^l \bar{g}_{kl},$$

geldt voor

$$(2.5) \quad g = \det(g_{ij}),$$

de transformatieregel

$$(2.6) \quad g = \bar{\Delta}^2 \bar{g}.$$

Hieruit volgt dat $\sqrt{g}$ een scalardichtheid is, mits we ons beperken tot transformaties met $\Delta > 0$.

Dank zij de metriek kan aan elke covariante vector op ondubbelzinnige wijze een contravariante vector toegevoegd worden en omgekeerd. Voor R_3 betekent dit meetkundig dat aan een (covariant) vlakkenpaar een (contravariante) pijl toegevoegd wordt welke er loodrecht op staat.

Volgens deze conjugatie bepaalt v^i de covariante vector $g_{ij} v^j$. Analoog kan uit de contravariante tensor T^{ij} de covariante tensor $g_{ik} g_{jl} T^{kl}$ afgeleid worden.

Volgens de quotientregel kan van de covariante fundamentealtensor g_{ij} een contravariante tensor afgeleid worden door middel van

$$(2.7) \quad g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i.$$

Als matrices beschouwd zijn (g^{ij}) en (g_{ij}) dus elkaars inverse.

Is nu w_i een gegeven covariante vector dan geeft conjugatie de contravariante vector $g^{ij} w_j$. Nogmaals conjugeren geeft

$$g_{ij} g^{ik} w_k = \delta_i^k w_k = w_i,$$

dus weer de uitgangsvector.

Er is in R_n een coördinatenstelsel waarin $g_{i,j}$ de hoogddiagonaalvorm aanneemt. De coördinaatassen staan dan onderling loodrecht.

Door ook geschikte meeteenheden te kiezen ontstaat tenslotte een Cartesisch coördinaten-stelsel. Alleen in dit speciale stelsel zijn de componenten van overeenkomstige geconjugeerde vectoren en tensoren identiek.

3. Kromlijnige coördinaten.

We beschouwen een ruimte van n dimensies waarbij de punten P door n parameters, kromlijnige coördinaten, $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ bepaald zijn. Beschrijven we de ruimte met andere coördinaten $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ dan is er in elk punt P een transformatie

$$(3.1) \quad \bar{x}^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

bepaald waarbij de Jacobiaan

$$(3.2) \quad \Delta = \det \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right),$$

ongelijk nul is.

Beperken we ons tot transformaties waarbij de functies f^i continue partiële afgeleiden van voldoende hoge orde hebben dan ontstaat een totaliteit van coördinatenstelsels verbonden door transformaties (3.1) welke een groep vormen. Is het mogelijk een ondergroep en een nevengroep te bepalen waarbij resp. $\Delta > 0$ en $\Delta < 0$ is dan heet de ruimte oriënteerbaar. Voorbeelden van niet-oriënteerbare ruimten zijn de Möbiusband en de fles van Klein. We spreken af hier slechts oriënteerbare ruimten te beschouwen.

De coördinaatruimten $x^i = \text{constant}$ bepalen in een punt P een stelsel van n kromlijnige coördinaatassen. In de omgeving van P kunnen we de coördinaatassen benaderen door de raaklijnen hieraan in P waardoor in P een lokaal rechtlijnig coördinatenstelsel gevormd wordt. In dit coördinatenstelsel kunnen we volgens de in § 1 ontwikkelde regels tensorrekening bedrijven door uit te gaan van de transformatieregel van de locale infinitesimale contravariante vector $(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$.

Deze regel volgt uit (2.1) door differentiatie als

$$(3.3) \quad d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j.$$

De inverse regel is natuurlijk

$$(3.4) \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j.$$

Vergelijking met (1.1) en (1.2) laat zien dat

$$(3.5) \quad A^i_{\cdot j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}, \quad A^{\cdot i}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}.$$

De uitbreiding is nu dat de coëfficiënten A van de coördinaten van P afhankelijk zijn. Zolang we bij P blijven kunnen we met de voor P geldende A-waarden volledig van het in de vorige paragrafen ontwikkelde formalisme gebruik maken.

Er komen nieuwe problemen zodra we de situatie in P vergelijken met die in een ander, bijv. naburig, punt. In het bijzonder geldt dit voor de generalisatie van de begrippen gradient, divergentie en rotatie.

De metriek wordt als in § 2 vastgelegd door een positief definitieve kwadraatlengte van de vector dx^i als

$$(3.6) \quad ds^2 = g_{ij} (x^1, x^2, \dots, x^n) dx^i dx^j .$$

Voorbeelden.

1. Cylindercoördinaten in R_3 met $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = z$.

Men heeft

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 .$$

2. Bolcoördinaten in R_3 met $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 .$$

3. Bolcoördinaten op het oppervlak van de eenheidsbol met $x^1 = \theta$, $x^2 = \phi$,

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 .$$

In overeenstemming met (2.6) is in de oriënteerbaar veronderstelde ruimte $g = \det(g_{ij})$ een scalardichtheid. Aangezien ϵ_{ijk} een covariante tensorcapaciteit is bestaat er in een oriënteerbare ruimte de gewone covariante tensor $\sqrt{g} \epsilon_{ijk}$ en is het mogelijk het uitwendig product van twee contravariante vectoren a^i , b^i ondubbelzinnig vast te leggen als

$$(3.7) \quad \sqrt{g} \epsilon_{ijk} a^j b^k .$$

In een niet-oriënteerbare ruimte zou het uitwendig product op tweewaardige wijze, met willekeurig teken, gevormd moeten worden

Het belangrijkste probleem is vooreerst de vertaling in algemene coördinaten van de bij de Castesische tensorrekening beschouwde begrippen : gradient, divergentie en rotatie.

Regel 1. De gradient van een scalarveld is een covariant vectorveld.

Bewijs.

Uit $s(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) = s(x^1, x^2, \dots, x^n)$,

volgt
$$\frac{\partial s}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial s}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i},$$

ofwel

$$\bar{\partial}_i s = A_i^{\cdot j} \partial_j s,$$

hetgeen de transformatieregel van een covariante vector is.

Beproeven we de transformatie van $\partial_j v^i$ dan blijkt dit i.h.a. geen tensortransformatie te worden. Immers

$$\frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} v^k \right) \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^j} = A_{\cdot k}^i A_j^{\cdot 1} \frac{\partial v^k}{\partial x^1} + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^1} A_j^{\cdot 1} v^k.$$

Wanneer in de gehele ruimte $\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^1} = 0$ voor alle indexcombinaties

gaat de transformatie wel in die van een tensor over. Dit is zo bij de groep van lineaire transformaties zoals bij de affiene ruimte.

Daarentegen geldt wel

Regel 2. De divergentie van een contravariante vectordichtheid is een scalardichtheid.

Bewijs.

We beperken ons gemakshalve tot drie dimensies. Volgens de bewering moet uit

$$\bar{M}^i = \Delta^{-1} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} M^j,$$

voor de contravariante vectordichtheid M^i volgen dat

$$\frac{\partial \bar{M}^i}{\partial \bar{x}^i} = \Delta^{-1} \frac{\partial M^i}{\partial x^i}.$$

Aangezien volgens (1.3) ook

$$\bar{M}^i = \left(\text{Cofactor } \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \right) M^j$$

is vinden we na differentiatie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{M}^i}{\partial \bar{x}^i} &= \Delta^{-1} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial M^j}{\partial x^k} + M^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \left(\text{Cof. } \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \right) = \\ &= \Delta^{-1} \frac{\partial M^i}{\partial x^i} + M^j \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \left(\text{Cof. } \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \right). \end{aligned}$$

We moeten dus bewijzen dat de laatste term in het rechterlid identiek nul is. Nemen we bijv. $j = 1$ dan geeft uitschrijven

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^2} \frac{\partial x^3}{\partial x^3} - \frac{\partial x^2}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial x^2} \right) + \\ + & \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial x^1} - \frac{\partial x^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^3}{\partial x^2} \right) + \\ + & \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^3}{\partial x^2} - \frac{\partial x^2}{\partial x^2} \frac{\partial x^3}{\partial x^1} \right) \end{aligned}$$

inderdaad het verlangde resultaat.

Regel 3. De rotatie van een covariante vector is voor drie dimensies een contravariante vectordichtheid.

Bewijs.

Is dus w_i een covariant vectorveld dan moet volgens de bewering de vector met componenten $\epsilon^{ijk} \partial_j w_k$,

d.w.z.

$$\left(\frac{\partial w_3}{\partial x^2} - \frac{\partial w_2}{\partial x^3}, \frac{\partial w_1}{\partial x^3} - \frac{\partial w_3}{\partial x^1}, \frac{\partial w_2}{\partial x^1} - \frac{\partial w_1}{\partial x^2} \right)$$

zich transformeren als een contravariante vectordichtheid. Het is dus voldoende aan te tonen dat de geantisymmetriseerde $\partial_j w_k - \partial_k w_j$ een covariante tensor is. Inderdaad volgt uit

$$\frac{\partial w_i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x^j} \frac{\partial w_k}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^i \partial x^j} w_k,$$

en

$$\frac{\partial w_j}{\partial x^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x^j} \frac{\partial w_l}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^i \partial x^j} w_k,$$

door aftrekking de transformatieregel van een covariante tensor.

Weer dient te worden opgemerkt dat in een niet-oriënteerbare ruimte de rotatie niet eenduidig bepaald kan worden.

Om tot de juiste "vertaling" van de m.b.v. Cartesische coördinaten gevormde grad, div, rot en Δ te komen dienen we nog gebruik te maken van het feit dat $\sqrt{g}$ een scalardichtheid is.

Het begrip gradient geeft geen probleem.

De vertaling van $\text{div } \vec{v}$ gaat als volgt.

We gaan uit van de contravariante vector v^i . Hieruit vormen we de vectordichtheid $\sqrt{g} v^i$. Volgens regel 2 is $\partial_i (\sqrt{g} v^i)$ een scalar-dichtheid, zodat

$$(3.8) \quad \text{div } \vec{v} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} v^i).$$

De vertaling van $\text{rot } \vec{w}$ is analoog voor een covariante vector

$$(3.9) \quad \text{rot } \vec{w} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} w_k.$$

De Laplaceoperator $\Delta = \text{divgrad}$ levert tenslotte op

$$(3.10) \quad \Delta s \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial s}{\partial x^j}).$$

4. Covariante differentiatie.

Bij het gebruik van slechts Cartesische coördinaten in een Euclidische ruimte leidt een vectorveld na differentiatie tot een tensorveld o.a. omdat de nabla-operator zich als een vector gedraagt. Bij de algemene tensorrekening zijn de afgeleiden $\partial_j v^i$ van b.v. een contravariant vectorveld in het algemeen niet de componenten van een tensor.

Er bestaan evenwel coëfficiënten $\Gamma_{jk}^i (x^1, x^2, \dots, x^n)$, de zgn. symbolen van Christoffel, zodanig dat

$$(4.1) \quad \nabla_j v^i \stackrel{\text{def}}{=} \partial_j v^i + \Gamma_{jk}^i v^k,$$

wel de componenten van een tensor, de covariante afgeleiden van v^i , zijn.

Analoog wordt ook uit een covariant vectorveld w_i door

$$(4.2) \quad \nabla_k w_j \stackrel{\text{def}}{=} \partial_k w_j - \Gamma_{jk}^i w_i,$$

een tensor, de covariante afgeleide van w_i , gevormd.

De Christoffel symbolen kunnen op de volgende wijze ingevoerd worden. Eerst definiëren we de symbolen $[i j, k]$ als

$$(4.3) \quad [i j, k] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(-\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki}) .$$

De symbolen van Christoffel worden nu gedefinieerd als

$$(4.4) \quad \Gamma_{ij}^k \stackrel{\text{def}}{=} g^{kl} [i j, l] .$$

Zowel de drie-index symbolen als de Christoffel symbolen zijn geen tensoren maar we passen er wel de sommatieconventie op toe zoals bij de in (4.4) gegeven definitie.

We merken op dat bij het gebruik van rechtlijnige coördinaten in een Euclidische ruimte de componenten van de fundamenteeltensor overal dezelfde waarden hebben zodat de Christoffel symbolen in elk punt identiek verdwijnen.

Hieruit volgt dat, wanneer men zich beperkt tot lineaire transformaties van rechtlijnige coördinaten, de covariante afgeleiden (4.1) en (4.2) met de gewone afgeleiden overeenstemmen, zodat in dat geval $\partial_j v^i$ en $\partial_k w_j$ wel de transformatieregel van een tensor volgen.

De transformatieregel van de Christoffelsymbolen kan a.v. afgeleid worden:

Uit

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} g_{\alpha\beta} ,$$

volgt na partiele differentiatie

$$\begin{aligned} \partial_k \bar{g}_{ij} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \\ &+ g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \right) . \end{aligned}$$

Met enig gemanipuleer van indices volgt hieruit

$$\frac{1}{2}(-\bar{\partial}_k \bar{g}_{ij} + \bar{\partial}_i \bar{g}_{jk} + \bar{\partial}_j \bar{g}_{ki}) = \frac{1}{2}(-\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha}) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{-i}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{-j}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{-k}} +$$

$$+ g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{-i} \partial x^{-j}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{-k}},$$

ofwel

$$(4.5) \quad \overline{[i \ j, k]} = [\alpha \ \beta, \gamma] \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{-i}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{-j}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{-k}} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{-i} \partial x^{-j}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{-k}}.$$

Met toepassing van (4.4) kan hieruit zonder moeite de volgende regel afgeleid worden

$$(4.6) \quad \bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{-i}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{-j}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{-k}} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x^{-i} \partial x^{-j}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{-k}}.$$

Deze transformatieregel kan gebruikt worden om te bewijzen dat de door (4.1) en (4.2) gedefinieerde covariante afgeleiden zich inderdaad als tensoren transformeren.

De divergentie van een contravariante vector kan ook met behulp van (4.1) gevormd worden als

$$\text{div } \vec{v} = \nabla_i v^i = \partial_i v^i + \Gamma_{ij}^i v^j.$$

Voor Γ_{ij}^i vinden we

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^i &= g^{il} [i \ j, l] + \frac{1}{2} g^{il} \partial_j g_{il} = \\ &= \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial g_{il}} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} = \frac{1}{2g} \partial_j g. \end{aligned}$$

zodat

$$\text{div } \vec{v} = \partial_i v^i + \frac{v^i}{2g} \partial_i g = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (v^i \sqrt{g}),$$

waarmee de in (3.8) gevonden uitdrukking teruggevonden is.

De Christoffel symbolen welke hierboven op vrij kunstmatige wijze uit de lucht zijn komen vallen kunnen op de volgende wijze op meer natuurlijke wijze tevoorschijn gebracht worden.

We stellen de vraag in de gegeven ruimte de zgn. geodeten te bepalen, d.w.z. de lijnen $x^i = x^i(t)$ welke tussen twee punten de kortste verbindingsen vormen. Voor deze lijnen geldt dus dat

$$(4.7) \quad \int_P^Q \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt = \text{minimum} .$$

Volgens de beginselen van de variatierekening leidt deze eis tot de volgende vergelijkingen van Euler en Lagrange

$$(4.8) \quad \frac{\partial F}{\partial x^k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} ,$$

waarbij $F = ds/dt$.

Uitwerking van (4.8) geeft na overgang op de prettiger werkende parameter s :

$$\frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \partial_k g_{ij} = 2 \frac{d}{ds} (g_{ik} \frac{dx^i}{ds}) .$$

Na enige herleiding volgt hieruit

$$g_{ik} \frac{d^2 x^i}{ds^2} + [i j, k] \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 .$$

of na vermenigvuldiging met g^{kn}

$$(4.9) \quad \frac{dx^2}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 .$$

Voorbeeld 1.

In een Euclidische R_n zijn alle Christoffel symbolen nul.

Uit (4.9) volgt

$$\ddot{x}^k = \alpha^k s + \beta^k$$

zodat de geodeten rechte lijnen zijn, zoals natuurlijk te verwachten was.

Voorbeeld 2.

Op een boloppervlak

$$x = \sin\theta \cos\phi, \quad y = \sin\theta \sin\phi, \quad z = \cos\theta$$

geldt

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2.$$

De matrix van de fundamentealtensor is dus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Berekening van de drie-index symbolen geeft

$$[1 \ 1, \ 1] = [1 \ 1, \ 2] = [1 \ 2, \ 1] = [2 \ 2, \ 2] = 0,$$

$$[1 \ 2, \ 2] = -[2 \ 2, \ 1] = \sin\theta \cos\theta.$$

Voor de Christoffel symbolen vinden we

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \cot\theta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\sin\theta \cos\theta$$

De geodetenvergelijkingen (4.9) zijn daarmee

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2, \quad \frac{d^2\phi}{ds^2} = -2 \cot\theta \frac{d\phi}{ds} \frac{d\theta}{ds}.$$

Eliminatie van de parameter s geeft met behulp van

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\phi} \frac{d\phi}{ds}, \quad \frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{d^2\theta}{d\phi^2} \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + \frac{d\theta}{d\phi} \frac{d^2\phi}{ds^2},$$

als resultaat de vergelijking

$$\frac{d^2\theta}{d\phi^2} - 2 \cot\theta \left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2 - \sin\theta \cos\theta = 0,$$

welke geschreven kan worden als

$$\frac{d^2}{d\phi^2} (\cot\theta) + \cot\theta = 0.$$

Hieruit volgt de algemene oplossing

$$\cotg\theta = A \cos\phi + B \sin\phi ,$$

ofwel

$$\cos\theta = A \cos\phi \sin\theta + B \sin\phi \sin\theta .$$

Dit is dus de grote cirkel als doorsnede van de eenheidsbol en het vlak

$$z = Ax + By .$$

Op een bol zijn de grote cirkels de geodeten, ook weer een bekend feit.

