Belasting en korting

in de trant van Rawls

Ko Anthonisse

5 februari 2023

Samenvatting

Er wordt een methode onderzocht waarmee belastingtarieven en verzilverbare heffingskortingen kunnen worden berekend. Dit is op basis van belastbare inkomens, met speciale aandacht voor de minst bedeelden. Dat is in de trant van Rawls.

Eerst wordt een methode ontwikkeld die de tarieven en kortingen berekent door het oplossen van twee reeksen lineaire optimaliseringsproblemen.

Het blijkt dat deze oplossing een aantal bijzondere structurele eigenschappen heeft.

Deze eigenschappen zijn de basis van een veel eenvoudiger methode, die ook sneller is, voor het berekenen van de kortingen en de tarieven.

Het resultaat van de berekeningen is, per inkomensklasse, de heffing en de korting. Hierbij geldt dat minstens een van die twee bedragen nihil is.

Verdere vereenvoudiging wordt bereikt door te werken met geschikt gekozen en smalle inkomensklassen. Het resultaat is dan een lineair dalende korting voor de lagere inkomens en een lineair stijgende heffing voor de hogere inkomens.

Inleiding

In 1971 verscheen *A Theory of Justice* door John Rawls (1921-2002), in 1999 kwam de *Revised Edition* uit [1].

Wikipedia[1] meldt over John Rawls: Hij was als politiek filosoof verbonden aan de Harvard University en wordt vanwege zijn hoofdwerk *A Theory of Justice* en aanverwante publicaties algemeen beschouwd als de invloedrijkste politieke filosoof van de 20e eeuw.

In het boek stelt Rawls op diverse plaatsen dat speciale aandacht moet worden gegeven aan de positie van de minst bedeelden (the least advantaged), dat is een uitvloeisel van de theorie.

Bijvoorbeeld:

> Once the difference principle is accepted, however , the minimum is to be set at that point which, … , maximizes the expectations of the least advantaged group.

Encyclopedia.com[2] geeft een beknopte omschrijving van het Difference Principle:

> The difference principle governs the distribution of income and wealth, positions of responsibility and power, and the social bases of self-respect.
>
> It holds that inequalities in the distribution of these goods are permissible only if they benefit the least well-off positions of society.

De theorie is gericht op de basis-structuur van een rechtvaardige maatschappij en is breed en diep.

De verschillen tussen meest en minst bedeelden gaan over meer dan inkomen en bezit.

In deze notitie gaat het alleen over inkomen, en dan nog alleen over een *methode* ter bepaling van (inkomens-) belasting en korting.

Aandacht voor de minst bedeelden is vaker genoemd. In *Big Planet* van Jack Vance [2] vraagt een potentaat hoe hij het best de erfenis van zijn zoon kan veiligstellen. Na enige discussie zegt het orakel: In this case your son must prove himself a ruler so able that no one will desire to get rid of him. … To foster this situation, you must institute a change in your own policies. Examine every act of your officials from the viewpoint of the least privileged members of the state, and modify your policies accordingly; then when you die, your son will be floated on a reservoir of good will and loyalty.

In de Bijbel, Matteüs 25:40, staat te lezen: Wat gij aan de minste der Mijnen hebt gedaan, hebt gij aan Mij gedaan.

Tenslotte Confucius (551-479 v. Chr.) [3] die heeft gezegd: Wat ik geleerd heb, is dat een hoogstaand mens de nooddruftigen bijstaat en niet de rijken nog rijker maakt.

---

[1] Versie 28 oktober 2021
[2] Versie 16 juli 2022

Er zijn voorstellen[3] ter herziening van het belastingstelsel die, in het kader van de inkomstenbelating (IB), huishoudens een inkomens-on-afhankelijke uitkering geven (de verzilverbare heffingskorting). Hierbij wordt dus geen speciale aandacht gegeven aan de minst bedeelden.

Die uniforme heffingskorting geeft geld aan de rijken die het niet nodig hebben. Dat geld gaat dus niet naar de minst bedeelden die het hard nodig hebben.

Het voordeel van inkomens-on-afhankelijk is dat het eenvoudig werkt. De voorstellen gaan meer over efficiëncy dan over rechtvaardigheid.

De opbouw van deze notitie is als volgt.

Eerst wordt een methode voor het verdelen van een toeslag beschreven, vervolgens naar analogie daarvan een methode voor het verdelen van een heffing. Dan volgen enkele opmerkingen over belastinghervorming. Vervolgens wordt een model ter berekening van belastingtarieven en kortingen besproken, gevolgd door het optimaliseren van de oplossing. Een waarneming aan een voorbeeld leidt tot een andere aanpak voor hetzelfde probleem. Die kan nog verder worden vereenvoudigd door te werken met geschikt gekozen smalle inkomensklassen.

Het resultaat is dan dat de lage inkomens een verzilverbare heffingskorting krijgen (met hetzelfde effect als een toeslag), die maximaal is voor het laagste inkomen en lineair afbouwt tot nul. Inkomens voorbij dit punt betalen een heffing die lineair toeneemt met het belastbare inkomen. Hierbij kan worden gekozen voor een uniforme marginale druk <= 50%.

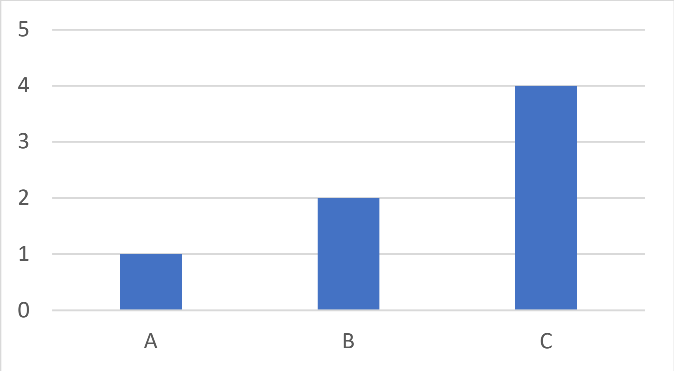
De laatste sectie bevat enkele slotopmerkingen.

[3] Komen in een volgende sectie kort aan de orde

Toeslag verdelen

Aan de hand van een voorbeeld schets ik een alternatief voor de uniforme verdeling.

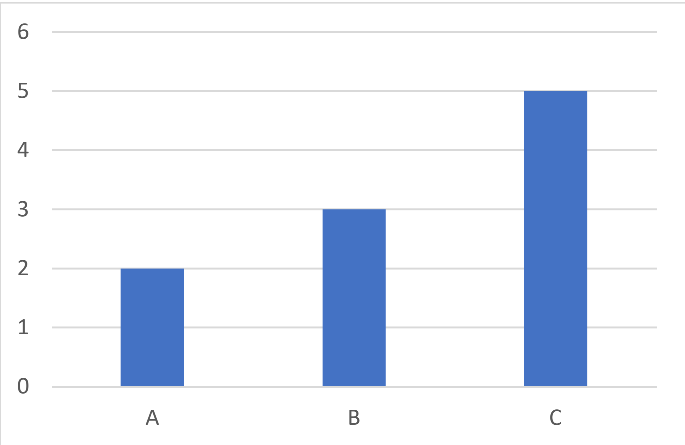
Er zijn drie personen A, B en C met netto-inkomens 1, 2, 4 dukaten, zie Figuur 1.



Figuur 1: Aanvankelijke netto-inkomens.

Er is een bedrag van 3 dukaten beschikbaar ter verdeling over deze personen, teneinde hun positie te verbeteren. Dit is een toeslag op het netto-inkomen.

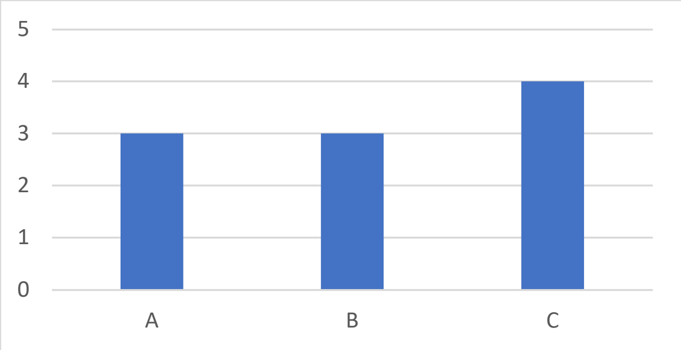
De eenvoudigste verdeling is om elke persoon een van de dukaten te geven, zie Figuur 2.



Figuur 2: Iedereen een dukaat extra, besteedbaar inkomen.

Het verdelen kan ook als volgt worden gedaan:

A is de minst bedeelde en krijgt als eerste een dukaat, die brengt A op het niveau van B. Nu zijn A en B samen de minst bedeelden. Er zijn nog 2 dukaten over en elk van hen krijgt er één, zie Figuur 3 voor het resultaat.



Figuur 3: Inkomensverdeling na het verbeteren, besteedbaar inkomen.

Het is duidelijk hoe dit in het algemeen werkt. Het laagste inkomen wordt aangevuld tot het niveau van het op een na laagste inkomen is bereikt. Vervolgens vormen de aanvankelijk laagste plus de aanvankelijk op een na laagste samen het nieuwe laagste. Het proces wordt herhaald tot er geen geld meer over is om te verdelen. Dit is verdelingsmethode A. Iemand met een hoger inkomen ontvangt niet meer toeslag dan iemand met een lager inkomen.

Is dit rechtvaardig?

In de trant van Rawls gaat de redenering als volgt, het is een gedachtenexperiment.

Er zijn personen die weten dat ze een inkomen hebben, maar niet hoe hoog of hoe laag dat is, zelfs de verdeling van de inkomens is onbekend. Over hun verdere omstandigheden weten ze ook niets. Dit is de sluier van onwetendheid. Ze weten wel dat er een onbekende hoeveelheid geld is om onderling te verdelen, als aanvulling op die onbekende inkomens. Over welk verdelingsmechanisme zouden ze het eens kunnen worden? Elk van hen wil haar inkomen maximaliseren. Dan is het logische resultaat een mechanisme dat het laagste inkomen maximaliseert.

In het voorbeeld is duidelijk dat elke andere verdeling van de 3 dukaten tot een lager laagste inkomen leidt. De geschetste methode resulteert in het maximale laagste inkomen.

Rawls noemt het resultaat rechtvaardig als de personen, achter de sluier van onwetendheid (the veil of ignorance), unaniem met de methode en het resultaat instemmen

Het resultaat van verdelingsmethode A is dat degenen die een toeslag ontvangen hetzelfde besteedbare inkomen hebben. Dit is nivellering van onder af.

In het volgende voorbeeld zijn A, B en C groepen personen, met dezelfde netto-inkomens als in het vorige voorbeeld. Groep A telt 20 personen, in B zijn dat er 40 en in C zijn er 10 personen. Voor de verbetering van de inkomens zijn 80 dukaten beschikbaar. Daarvan gaan er eerst 20 naar A en vervolgens 60 naar A+B. Zie figuur 3 voor het resultaat. Als deze situatie periodiek optreedt zal worden opgemerkt dat iemand uit groep A er geen baat bij heeft om zich in te spannen en naar groep B te promoveren.

Om dit te verhelpen worden aan de verdeling extra eisen gesteld: de promotie van A naar B houdt een verbetering in van minstens 0,5 dukaat besteedbaar, en die van B naar C minstens 1 dukaat besteedbaar. Deze bedragen zijn de helft van de aanvankelijke netto-inkomens-verschillen tussen de opeenvolgende groepen. In plaats van de helft kan ook een andere fractie worden gekozen, deze grootheid is de *groeifactor*. Deze extra eisen zijn de groei-voorwaarden. Voor elk tweetal opeenvolgende klassen is er een groei-voorwaarde:

besteedbaar(tweede) >= besteedbaar(eerste) + groeifactor*(netto(tweede) - netto(eerste))

Het linkerlid minus het rechterlid is de *slack* van de tweede klasse. De slack is >= 0. Als slack > 0 dan is besteedbaar(tweede) groter dan de geldende ondergrens.

Dit leidt tot een ander verdelingsmechanisme, methode TV = toeslag verdelen..

De groepen A, B en C worden in die volgorde behandeld. Telkens wordt de toeslag van de onderhanden groep en die van de voorgaande groepen met hetzelfde bedrag verhoogd. Het proces stopt zodra de voorraad te verdelen dukaten is uitgeput.

Stap A. Het besteedbaar inkomen van groep B moet minstens 0,5 dukaat groter zijn dan dat van groep A. Daarom krijgt groep A in eerste instantie 0,5 dukaat toeslag. Groep A en groep B verschillen nu 0,5 dukaten in besteedbaar inkomen.

Stap B. Het besteedbaar inkomen van groep C moet minsten 1 dukaat groter zijn dan dat van groep B. Daarom wordt de toeslag van beide groepen A en B met 1 dukaat verhoogd. Groep B en groep C verschillen nu 1 dukaat in besteedbaar inkomen. Het verschil tussen groep A en groep B blijft 0,5 want de toeslagen zijn met hetzelfde bedrag verhoogd.

Stap C. Er zijn nog 10 dukaten over. De toeslag van alle groepen wordt met 10/70 = 0,14287 dukaten verhoogd.

De verschillen in besteedbaar inkomen tussen opeenvolgende groepen zijn nu precies de vereiste minima. Hieruit volgt dat het besteedbaar inkomen van groep A maximaal is. Want meer toeslag voor A betekent minder toeslag voor minstens een andere groep en dan is niet meer aan de extra eisen voldaan. Andere redenering: verhoging van toeslag A betekent, wegens de extra eisen, verhoging van toeslag B, enzovoort. Maar dat kan niet, want alle beschikbare dukaten zijn al verdeeld.

Met groeifactor = 1 verlopen de berekeningen als volgt.

Aanvankelijk krijgen A en B geen toeslag, de groeifactor houdt dat tegen. In stap C zijn nog 80 dukaten over, dus ontvangt iedereen 80/70 = 1.142857.

Met groeifactor = 1 ontvangt iedereen hetzelfde bedrag als toeslag. Dat is de enige verdeling waarbij, bij opeenvolgende groepen, het verschil in besteedbaar inkomen gelijk is aan het verschil in netto-inkomen.

In de volgende tabel worden de resultaten van TV gegeven.

groep	# leden	netto inkomen	methode TV		
			groeifactor 0	groeifactor = 0.5	groeifactor = 1.0
A	20	1	3	2.64	2.14
B	40	2	3	3.14	3.14
C	10	4	4	4.14	5.14

Tabel 1: Resultaten methode TV, van netto naar besteedbaar inkomen

Groeifactor = 0 (= methode A) werkt nivellerend voor de lagere inkomens.

Het is duidelijk dat de gegarandeerde groei ten koste gaat van de laagste inkomens. Wellicht zullen de betrokkenen, achter de sluier van onwetendheid, methode TV met groeifactor = 0.5, prefereren. Maar de keuze van een methode zal niet op grond van één klein voorbeeldje worden gemaakt.

Met methode TV is het zo dat, als twee opeenvolgende groepen beide een positieve toeslag ontvangen, de betreffende groei-voorwaarde geldt met het = teken. Links en rechts staat dezelfde waarde. Dat volgt uit het verloop van de berekeningen. De slack van de tweede groep = 0.

Heffing verdelen

In het volgende voorbeeld zijn A, B en C groepen personen, met belastbare inkomens 1, 2 en 4. Groep A telt 20 personen, in B zijn dat er 40 en in C zijn er 10 personen. Er moet 45 dukaten aan belasting worden opgebracht, dat is een gemiddelde belastingdruk van 45/140 = 32.1%.

Voor elk tweetal opeenvolgende klassen is er een groei-voorwaarde:

netto(tweede) >= netto(eerste) + groeifactor*(belastbaar(tweede) - belastbaar(eerste))

Ook hier is de slack van de tweede klasse het linkerlid minus het rechterlid. De slack is >= 0.

De heffing per klasse kan worden berekend met de methode HV = heffing verdelen, die analoog werkt aan TV. Maar nu wordt gewerkt van de hoogste naar de laagste klasse, en er zijn mogelijk complicaties.

Het is gewenst dat, voor elk tweetal opeenvolgende klassen de heffing en het tarief (= heffing / belastbaar) van de tweede klasse niet kleiner zijn dan die van de eerste en dat de slack van de tweede = 0 als beide een positieve heffing hebben.

Met groeifactor = 0 loopt het als volgt.

Het inkomen van groep C mag dalen van 4 tot 2, dat is het inkomen van groep B. Dit leidt tot een heffing van 2 dukaten voor groep C, opbrengst 20 dukaten, nog 25 te gaan.

Het inkomen van groep B mag dalen van 2 tot 1, dat is het inkomen van groep A. Dit zou leiden tot een heffing van 1 dukaat voor groep B en 1 dukaat extra voor groep C, opbrengst 50 dukaten, dat is teveel. De heffing voor groep B en de verhoging voor groep C moet 25/50 = 0.5 zijn (de noemer is het aantal leden van groep C + B).

In de volgende tabel worden de resultaten van HV weergegeven.

groep	# leden	belastbaar inkomen	methode HV		
			groeifactor= 0	groeifactor = 0.5	groeifactor = 1.0
A	20	1	1.0	0.93	0.679
B	40	2	1.5	1.43	1.679
C	10	4	1.5	2.43	3.679

Tabel 2: Resultaten methode HV, van belastbaar naar netto inkomen

Met groeifactor = 1.0 krijgt iedereen dezelfde heffing, de inkomensverschillen worden gehandhaafd. Groeifactor = 0 werkt nivellerend bij de hogere inkomens.

Met methode HV is het zo dat, als twee opeenvolgende groepen beide een positieve heffing hebben, de betreffende groei-voorwaarde geldt met het = teken. Links en rechts staat dezelfde waarde. Dat volgt uit het verloop van de berekeningen. Voor de tweede groep geldt slack = 0.

Iemand met een hoger inkomen heeft geen lagere heffing dan iemand met een lager inkomen. De vraag is of dat voor het belastingtarief ook geldt.

Als in totaal 90 dukaten aan belasting moeten worden opgebracht dan gaan de berekeningen, met groeifactor = 0.5, als volgt.

Het inkomen van groep C mag dalen van 4 tot 3, dus een heffing van 1 dukaat voor deze groep, opbrengst 10 dukaten, nog 80 te gaan.

Het inkomen van groep B mag dalen tot 1.5, dus groep B krijgt heffing 0.5 en die van C wordt met 0.5 verhoogd tot 1.5, opbrengst 25, nog te gaan 55.

Nu verschilt het inkomen van groep A precies 0.5 van dat van groep B. Alle heffingen zouden nu met 55/70 = 0.786 moeten worden verhoogd. Dus groep A krijgt heffing 0.786, dat is een tarief van 0.786. Als vervolgens de heffing van groep B wordt verhoogd tot 0.5 + 0.786 = 1.286 dan is dat een tarief van 0.643, dat is lager dan het tarief van groep A, dus niet toegestaan. Het probleem is onoplosbaar, in het algemeen kan dat ook al eerder blijken. Na elke verhoging van heffingen moet worden gecontroleerd of de tarieven nog niet-dalend zijn. Is er een daling, dan is er geen oplossing. Als er in het voorbeeld, geen 55 maar nog <= 35 te verdelen was, dan was er wel een oplossing, met > 35 is er geen oplossing.

Belastinghervorming

De notities [4,5] van het CPB bevatten de doorrekening van de voorstellen die door D66 respectievelijk de ChristenUnie zijn gedaan.

Het CPB vat de voorstellen als volgt samen:

D66: In de plannen van D66 komen onder andere de toeslagen en de hypotheekrenteaftrek te vervallen en wordt de AOW deels gefiscaliseerd. Daarvoor in de plaats wordt onder andere een nieuwe verzilverbare heffingskorting geïntroduceerd en wordt het wettelijk minimumloon verhoogd.

ChristenUnie: In de plannen van de ChristenUnie vervalt een groot deel van de bestaande aftrekposten, toeslagen en heffingskortingen en wordt de AOW gedeeltelijk gefiscaliseerd. In plaats daarvan worden onder andere nieuwe uitkeerbare en niet-uitkeerbare heffingskortingen geïntroduceerd en wordt het wettelijk minimumloon verhoogd.

D66 stelt ook voor om de uitkeringen van Rijk naar gemeenten met 3 miljard te verlagen. Dat geld is dan beschikbaar voor de heffingskorting en het minimumloon. Ter compensatie zouden de gemeenten een nieuwe belasting mogen invoeren: ook de gebruikers gaan OZB betalen. Dus de ene hand geeft (heffingskorting, minimumloon) en de andere hand neemt (OZB-gebruikersdeel). De OZB is onafhankelijk van het inkomen, de lage inkomens worden hierdoor onevenredig getroffen. Er is geen speciale aandacht voor de minst bedeelden.

De CPB notitie omschrijft de heffingskorting van D66 als volgt:

> D66 introduceert een nieuwe verzilverbare heffingskorting op huishoudniveau. De korting bestaat uit een basisbedrag per jaar van 2,6 dzd voor paren, 3,6 dzd euro voor alleenstaanden, en 7,0 dzd euro voor alleenstaande ouders. Voor ieder kind wordt de korting verhoogd met 2,3 dzd euro (met een maximum van drie kinderen). Dit is een lastenverlichting van 39,2 mld euro in 2025. (D66_104)

Dit is een van de tien punten in de rubriek Wijzigingen inkomen en arbeid.

De korting is onafhankelijk van het inkomen. Hier gaat dus geld naar de beter gesitueerden. Desondanks is de mediaan van het inkomenseffect van de groep huishoudens met de hoogste 20% van de inkomens negatief: -1,4%. Dus meer dan de helft van de huishoudens in deze groep ondervindt een negatief inkomenseffect. Voor de vier andere inkomensgroepen en voor de groep Alle huishoudens, de drie groepen naar Inkomensbron, de drie groepen naar Huishoudtype en de twee naar Gezinssamenstelling geldt dat tussen 25 en 50% van de huishoudens een negatief effect heeft. Van deze zijn de Gepensioneerden het slechtst af met een mediaan van 0,1%.

De CPB notitie omschrijft de heffingskorting van de ChristenUnie als volgt:

- De ChristenUnie voert een verzilverbare basiskorting in. De basiskorting bedraagt 3.000 euro voor een alleenstaande en loopt op basis van een equivalentiebenadering op met het aantal huishoudleden tot een bedrag van 6.600 euro voor een gezin met drie huishoudleden, waarna er per huishoudlid 1.500 euro bijkomt. Hiermee is het bedrag bijvoorbeeld 12.600 euro voor een gezin met zeven huishoudleden. (…)
- De ChristenUnie voert een inkomensafhankelijke kop op de basiskorting in die verzilverbaar is. Het normbedrag van de kop is exact gelijk aan het inkomensonafhankelijke deel van de

> basiskorting, ofwel 3.000 euro voor een alleenstaande. De kop bouwt af naar nul met het verzamelinkomen over een vast inkomenstraject van 20.000 tot 70.000 euro. (…)

Dit zijn twee van de 21 punten in de rubriek Wijzigingen inkomen en arbeid. Ze worden ook genoemd in de rubriek Wijzigingen sociale zekerheid.

Bij Wijzigingen sociale zekerheid staat dat de basiskorting een intensivering van de overheidsuitgaven is van 4,7 mld euro in 2025, voor de kop daarop is dat 11,6 mld euro in 2025.

Bij Wijzigingen inkomen en arbeid staat dat de basiskorting een lastenverlichting is van 36,4 mld euro in 2025, voor de kop daarop is dat 8,9 mld euro in 2025.

De basiskorting is onafhankelijk van het inkomen. Ook hier gaat dus geld naar de beter gesitueerden. De kop op deze basiskorting is wel afhankelijk van het inkomen en geeft niets aan de inkomens vanaf 70.000.

De mediaan van het inkomenseffect van de groep huishoudens met de hoogste 20% van de inkomens is 3,0% en iets meer dan 25% van deze huishoudens heeft een negatief effect. De groep met de laagste 20% van de inkomens is het slechtste af: de mediaan is 1,0% en het effect is negatief voor iets minder dan 50% van deze huishoudens. Bij de Gepensioneerden, de Alleenstaanden en de huishoudens Met kinderen is er een negatief effect voor iets meer dan 25% van de huishoudens, bij de Uitkeringsgerechtigden is het ruim meer dan 25%. Bij de overige groepen is het minder dan 25%.

De situatie van de laagste inkomens is vatbaar voor verbetering. Bijvoorbeeld door ook de basiskorting te beperken tot de inkomens tot 70.000 euro en het vrijkomende geld aan de laagste inkomens toe te kennen. Een wat verdergaande optie zou zijn om hetzelfde te doen met geld dat vrijkomt door de basiskortingen te verlagen. Een nog verdergaande optie is om uitsluitend met een inkomens-afhankelijke korting te werken. Bijvoorbeeld door de korting alleen te geven aan mensen met een inkomen onder de mediaan van de inkomensverdeling.

De voorstellen van de ChristenUnie bevatten een inkomens-on-afhankelijke heffingskorting die wel afhankelijk is van de samenstelling van het huishouden, het gaat om het aantal leden van het huishouden, een alleenstaande is een 1-persoons huishouden. De huishoudens kunnen worden gegroepeerd naar het aantal leden. Dat geeft een aantal disjuncte groepen. Per groep is dan gemakkelijk het totaal bedrag aan heffingskorting voor die groep te berekenen. Voor elke groep zou dan dat bedrag met methode TV over de betreffende huishouden kunnen worden verdeeld, op basis van het netto inkomen van de huishoudens. Hierbij wordt de heffingskorting als toeslag gezien. De toeslag is verzilverbaar en wordt verrekend met de verschuldigde belasting.

In beide voorstellen gaat de belastingheffing in twee schijven, zoals ook nu het geval is. De tarieven en het startpunt van de tweede schijf worden wel aangepast. Twee schijven is zeker efficiënt, maar het is niet *a priori* duidelijk of het ook rechtvaardig is. Overigens is het opzoeken van een percentage in een tabel van twee regels niet essentieel veel gemakkelijker dan het opzoeken in een tabel van zeg 10 of 20 regels. Dit geldt zowel voor mensen als voor machines.

In de voorstellen wordt de heffingskorting toegepast op het niveau van de huishoudens. De belastingheffing is op het niveau van personen. Als een huishouden meerdere belastingplichtigen bevat moet de korting over hen verdeeld worden.

Een model

In deze sectie wordt op niet al te formele wijze een model beschreven waarmee belastingtarieven en heffingskortingen kunnen worden berekend[4]. Het model wordt met enkele voorbeelden toegelicht. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de gegevens in Tabel 3.

klasse	1	2	3	4	5	6	7	8
klasse minimum	0	10 000	20 000	30.000	40 000	50 000	100 000	200 000
klasse maximum	9 999	19 999	29 999	39 999	49 999	99 999	199 999	
klasse gemiddelde	4.3	14.9	24.8	34.8	44.9	68.1	128.0	321.2
mediaan	4.0	15.4	24.7	34.7	44.8	65.3	120.7	249.8
aantal personen	1772.1	2993.2	2074.8	1712.3	1429.5	3095.3	642.7	77.6

Tabel 3: Bruto inkomens van personen 2020, bron CBS[5].

Het gemiddelde en de mediaan (in de tabel) luiden in duizenden euro, het aantal personen (in de tabel) luidt ook in duizenden. De waarden worden genoteerd met de decimale punt. Klasse 1 betreft de personen met een persoonlijk bruto inkomen minder dan 10 000 euro. Het gemiddeld inkomen in die klasse is 4.3 duizend euro, de mediaan is 4.0 duizend euro, het aantal personen is 1 772 100.

Het model gaat uit van het belastbaar inkomen, daarvoor wordt het klasse gemiddelde gebruikt. Als er geen of weinig aftrekposten zijn is het bruto inkomen een goede benadering. Het gaat in deze notitie niet om de precieze cijfermatige resultaten maar om de werking van de methode.

Het gebruik van deze tabel impliceert dat belasting en korting beide op individuele personen worden toegepast. Met een analoge tabel van belastbare inkomens per huishouden zou de toepassing op het niveau van huishouden zijn. Het belastbare inkomen van een huishouden is de som van de belastbare inkomens van de leden van het huishouden. Als daarmee belastingtarieven en heffingskortingen zijn berekend leidt dat per huishouden tot een heffing en een korting. Die moeten dan weer over de leden van het huishouden worden verdeeld, de verdeling kan bijvoorbeeld evenredig aan hun individuele belastbare inkomens zijn.

In het model zijn, per klasse,

1. het gemiddelde belastbare inkomen, en
2. het aantal personen

input voor de berekeningen. Er wordt gerekend alsof die personen allen dat gemiddelde als belastbaar inkomen hebben. Hier zijn bezwaren tegen, die verminderen naarmate met meer en smallere klassen wordt gewerkt. Dit komt later nog aan de orde.

Ook de volgende drie grootheden behoren tot de input:

B = bovengrens voor de bruto totale belastingopbrengst,

K = bovengrens voor het totaal bedrag dat als heffingskortingen wordt toegekend, en

N = B – K = de gewenste netto belastingopbrengst.

[4] Bijlage 1 bevat een formele beschrijving.
[5] Met dank aan de Infoservice

Het model heeft, per klasse, drie variabelen. De berekeningen resulteren in numerieke waarden voor deze variabelen, die zijn *output* van het model. De drie variabelen zijn

1. Het belastingtarief voor de betreffende klasse,
2. De heffingskorting voor deze klasse,
3. Het netto inkomen van deze klasse.

De variabelen hebben niet-negatieve waarden.

Elke klasse heeft een eigen belastingtarief, dat is van toepassing op het inkomen in de klasse. Er wordt in dit model niet met belastingschijven gewerkt. Belastingschijven vragen een iets ander model. Het tarief is een fractie [tussen 0 en 1], maar die kan als percentage worden weergegeven.

De drie variabelen zijn als volgt aan elkaar gekoppeld:

netto = belastbaar – (heffing – korting) .

Hierbij geldt: heffing = belastbaar x tarief.

Omdat

belastbaar – (heffing – korting) = belastbaar – heffing + korting

kan de korting, rekenkundig, ook als een toeslag worden gezien.

Voor twee opeenvolgende klassen geldt:

1. Het tarief van de tweede is niet lager dan dat van de eerste, het tarief is progressief,
2. De korting van de tweede is niet hoger dan die van de eerste, de korting is regressief,
3. Netto van de tweede is minstens een bedrag X hoger dan netto van de eerste.

Hierbij geldt X = g x (belastbaar(tweede) – belastbaar(eerste)) waarbij g een fractie is.

Als g = ½ dan leidt een verhoging van het belastbaar inkomen, met v, tot een verhoging van het netto inkomen met minstens ½ v. De grootheid g wordt hier de *groeifactor* genoemd.

Elke klasse heeft een eigen groeifactor, in de voorbeelden heeft die in elke klasse dezelfde waarde.

De groeifactor van klasse 1 heeft betrekking op een fictieve klasse 0 (als eerste klasse, met belastbaar inkomen = netto inkomen = 0) en klasse 1 als tweede klasse. Zodoende is netto(1) >= g(1) x belastbaar(1).

Voor klasse 2 en volgende geldt dat de groeifactor betrekking heeft op die klasse als tweede en de voorgaande klasse als eerste.

Tenslotte twee variabelen die niet aan een klasse zijn gekoppeld

b = de totale belastingopbrengst op basis van de tarieven per klasse,

k = het totaal aan heffingskortingen op basis van de kortingen per klasse.

En hierbij horen twee restricties, er geldt:

b – k = N

k <= K

Als k = K dan is b – k = b – K = N = B – K en dus b = B.

Het model laat toe dat $b < B$, en dan is $K - k = B – b$, zodat de netto belastingopbrengst N is gegarandeerd (binnen het model).

Het model bestaat uit een aantal niet-negatieve variabelen en een aantal lineaire voorwaarden, het is een LP model en kan met methoden voor Lineaire Programmering worden opgelost. Daartoe moet dan nog wel een (lineaire) doelstelling worden geformuleerd.

Als alle $g = 0$ dan heeft het model minstens één oplossing:

Voor iedereen geldt hetzelfde tarief = B/totaal belastbaar en iedereen heeft dezelfde korting = K/totaal aantal personen.

In het algemeen zal dit niet de gewenste oplossing zijn.

Als niet alle $g = 0$ dan zorgt $g(\text{klasse}) > 0$ er voor dat een deel van het belastbare inkomen van die klasse onbelast is. Dit houdt in dat B, of eigenlijk N, niet willekeurig hoog kan worden gekozen.

Als een bestaande toeslag of bijslag naar de algemene heffingskorting wordt overgeheveld dan wordt het daarmee gemoeide bedrag toegevoegd aan K en verwijderd uit N, want B moet niet veranderen.

Optimaliseren

Het bepalen van belastingtarieven en heffingskortingen met het model gaat in twee fasen:

1. In de eerste fase wordt, voor elk van de opeenvolgende klassen, vanaf klasse 1, het maximale netto inkomen berekend. Dat is een optimaliseringsprobleem voor elke klasse. Per klasse wordt een extra restrictie aan het model toegevoegd, deze fixeert het netto inkomen in die klasse op de gevonden waarde. Aan het eind van deze fase zijn alle nett inkomens bepaald, ze zijn input voor de tweede fase.
2. In de tweede fase wordt, voor elk van de opeenvolgende klassen, vanaf klasse 1, het minimale belastingtarief berekend. Per klasse wordt het tarief op de gevonden waarde gefixeerd. Aan het eind van deze fase zijn alle tarieven bepaald.

Fase 2 kan met behulp van het model worden uitgevoerd, maar het kan ook sneller. Het blijkt dat de oplossing van de tweede fase direct uit de oplossing van de eerste fase kan worden afgelezen, zoals in de volgende tabel is aangegeven.

als resultaat eerste fase	dan resultaat tweede fase
netto > belastbaar	heffing = 0, korting = netto - belastbaar
netto = belastbaar	heffing = 0, korting = 0
netto < belastbaar	heffing = belastbaar – netto, korting = 0

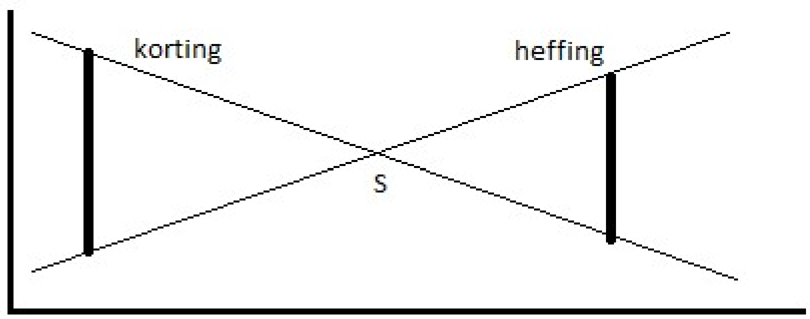
Tabel 4: Oplossing tweede fase aflezen uit oplossing eerste fase

Na afloop van de eerste fase wordt de tabel op elke klasse toegepast.

Uit de tabel blijkt dat voor elke klasse geldt dat, na tweede fase, heffing en korting niet beide > 0 kunnen zijn. Voor zulke oplossingen wordt de term *regulier* gebruikt. De optimale oplossing is regulier.

Als na afloop van de eerste fase blijkt dat voor een klasse zowel heffing > 0 als korting > 0 dan kunnen beide bedragen met hetzelfde bedrag, namelijk met m = het minimum van de twee, worden verminderd, zodat daarna nog hoogstens één van de twee > 0 is. Dit is equivalent met Tabel 4.

In onderstaande figuur zijn een niet-stijgende korting en een niet-dalende heffing schematisch weergegeven, na afloop eerste fase.



De verticale lijn links in de figuur correspondeert met korting – heffing (= de gecorrigeerde korting), deze grootheid is niet-stijgend, en = 0 vanaf het snijpunt S van korting en heffing. De verticale lijn rechts correspondeert met heffing – korting (= de gecorrigeerde heffing), deze grootheid is = 0 links van het punt S en niet-dalend vanaf S. Hieruit blijkt dat de gecorrigeerde korting niet-stijgend is en dat de gecorrigeerde heffing niet-dalend is, zoals het model vereist. Het blijkt dat ook het gecorrigeerde tarief niet-dalend is.

Voorbeelden en een waarneming

Met de gegevens in Tabel 3 kan G = het totale belastbare inkomen worden berekend. In de voorbeelden is meestal gekozen voor B = 0.2 G en K = 0.1 B. Uiteraard kunnen voor B en K ook rechtstreeks numerieke waarden worden gespecificeerd.

Tabel 5 bevat de resultaten van de doorrekening van het model met groeifactor = 0 in elke klasse.

klasse	1	2	3	4	5	6	7	8
klasse gem	4.30	14.90	24.80	34.80	44.90	68.10	128.00	321.20
groeifactor	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
% belasting	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	19.61	57.23	82.96
heffing	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	13.35	73.25	266.45
korting	6.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
netto	10.46	14.90	24.80	34.80	44.90	54.75	54.75	54.75
slack	10.46	4.44	9.90	10.00	10.10	9.85	-0.00	-0.00

Tabel 5: Resultaten met groeifactor = 0.

Alleen de klassen 6, 7 en 8 hebben een positief belastingtarief, het tarief is zo dat in elk van deze klassen het netto inkomen 54.75 (duizend) is. De herverdeling komt uitsluitend ten gunste van klasse 1.

Ook achter de sluier van onwetendheid zullen de betrokkenen hier niet unaniem mee instemmen, deze oplossing is niet rechtvaardig.

Wegens groeifactor = 0 moet het netto inkomen van een klasse minstens het netto inkomen van de voorgaande klasse zijn. Dus het netto inkomen in klasse 2 moet minstens 10.46 zijn. Het is 14.90 en dat is 4.44 meer dan de geldende ondergrens. Het verschil tussen het gevonden netto inkomen en de ondergrens wordt de *slack* van dat inkomen genoemd.

Tabel 6 bevat de resultaten van de berekeningen met groeifactor = 0.5 in elke klasse.

klasse	1	2	3	4	5	6	7	8
klasse gem	4.30	14.90	24.80	34.80	44.90	68.10	128.00	321.20
groeifactor	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
% belasting	0.00	0.00	0.00	3.83	14.21	26.41	37.45	45.00
heffing	0.00	0.00	0.00	1.33	6.38	17.98	47.93	144.53
korting	5.62	0.32	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
netto	9.92	15.22	24.80	33.47	38.52	50.12	80.07	176.67
slack	7.77	0.00	4.63	3.67	-0.00	-0.00	0.00	0.00

Tabel 6: Resultaten met groeifactor= 0.5.

Nu hebben de klassen 4 tot en met 8 een positief belastingtarief. De herverdeling komst en gunste van klassen 1 en 2.

Als het belastbaar inkomen (klasse gem) stijgt wordt hoogstens de helft van de stijging door hogere belasting of lagere korting wegbelast. Ook achter de sluier van onwetendheid zou dit voor alle betrokkenen acceptabel kunnen zijn. Deze oplossing zou dan rechtvaardig worden genoemd.

Met groeifactor = 0.5 geldt dat marginale druk <= 50%.

Ter vergelijking volgen nu de netto bedragen bij vier groeifactoren.

groeifactor	klasse							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0.0	10.46	14.90	24.80	34.80	44.90	54.75	54.75	54.75
0.4	10.46	14.90	24.80	34.80	40.88	50.16	74.12	151.40
0.5	9.92	15.22	24.80	33.47	38.52	50.12	80.07	176.67
0.6	9.25	15.61	24.64	30.64	36.70	50.62	86.56	202.48

Tabel 7: Netto bedragen bij vier groeifactoren

In tabellen 5 en 6 valt het volgende op:

- Als twee opeenvolgende klassen beide een positieve korting hebben dan heeft de tweede klasse slack = 0,
- Als twee opeenvolgende klassen beide een positieve heffing hebben dan heeft de tweede klasse slack = 0.

Dit blijken eigenschappen te zijn van de optimale oplossing.

Een oplossing met deze eigenschappen wordt hier *aansluitend* genoemd.

Een andere aanpak

De heffingen en kortingen in de optimale oplossing hebben precies de vorm die ook door HV en TV worden gevonden.

HV en TV kwamen aan het begin van deze notitie min of meer uit de lucht vallen. Nu blijkt dat ze de optimale oplossing zijn van een in vrij algemene termen gesteld optimaliseringsprobleem voor het bepalen van heffingen en kortingen, hebben ze een wat steviger achtergrond.

HV en TV kunnen worden gebruikt om de optimale oplossing te zoeken, als alternatief voor het toepassen van LP.

Allereerst wordt onderzocht of er wel een oplossing bestaat, dus HV wordt toegepast met het bedrag N als input. Als er geen oplossing is stoppen de berekeningen.

In het andere geval bestaan de berekeningen uit het, mogelijk herhaaldelijk, toepassen van TV en HV:

1. De methode TV wordt gebruikt om een bedrag k > 0 aan kortingen/toeslagen te verdelen. Het resultaat is een positieve korting voor de klassen i = 1, …, v met v >= 1. Korting = 0 voor de overige klassen.
2. De methode HV wordt gebruikt om een bedrag b= N + k aan heffingen te verdelen. Het resultaat is een positieve heffing voor de klassen i = w, …, n met w <= n. Heffing = 0 voor de overige klassen.

De gevonden v en w zijn afhankelijk van de waarde van k. Als k groeit dan stijgt v, (althans: daalt niet) en daalt w (althans: stijgt niet).

Als, in de met TV en HV gevonden oplossing, geldt: v >= w dan is die oplossing niet regulier en was de gebruikte waarde van k te groot en moet een lagere waarde van k worden onderzocht.

Als v < w – 1 dan is, in principe, de gebruikte waarde van k te klein en moet een hogere waarde van k worden onderzocht. Maar als k = K dan is geen hogere waarde beschikbaar. In dat geval is de optimale oplossing gevonden.

Als, tenslotte, v = w – 1 dan zijn er drie mogelijkheden:

1. slack(w) = 0 of slack(w) is, in absolute waarde, voldoende klein. In dit geval is de optimale oplossing gevonden of wordt de oplossing als een goede benadering van het optimum beschouwd.
2. slack(w) < 0 . Dit is in strijd met de voorwaarden van het LP model, het kan voorkomen omdat TV en HV onafhankelijk van elkaar worden toegepast. slack(w) stijgt als heffing(w) en korting(v) beide worden verlaagd. Dus was de gebruikte waarde van k te groot en er moet een lagere waarde van k worden onderzocht.
3. slack(w) > 0. Dit is niet verboden. slack(w) daalt als heffing(w) en korting(v) beide worden verhoogd, en dat kan als k < K. De oplossing is dan dus niet optimaal want de hogere korting(v) leidt tot hoger netto(v). De gebruikte waarde van k was te klein en er moet een hogere waarde van k worden onderzocht. Als k = K is de oplossing optimaal.

Dit wordt in eerste instantie toegepast is k = K en dus b = B. Als met deze waarden blijkt dat de optimale oplossing is gevonden en stoppen de berekeningen. Kennelijk is de oplossing regulier, en de gevonden resultaten zijn aansluitend, want zo werken TV en HV. Het volledige bedrag K is verdeeld dus het is onmogelijk om een of meer kortingen te verhogen. Het is ook onmogelijk om een of meer heffingen te verlagen, want dan zouden de kortingen ook dalen.

Als de optimale oplossing niet is gevonden wordt het zoeken naar de maximale waarde voor k die een reguliere uitkomst geeft.

Dit gaat snel met behulp van *bisectie*.

De optimale k ligt in het interval [0, K). Kies nu k = K/2 en pas TV en HV toe. Als k moet worden verhoogd dan ligt de optimale k in het interval [K/2, K). Als k moet worden verlaagd dan ligt optimale k in het interval [0, K/2). Het zoeken wordt op dezelfde wijze voortgezet met het gevonden interval, dat half zo lang is als het voorgaande interval. Dit gaat door tot het interval [x, y) voldoende smal is, bijvoorbeeld y-x < 0.0001. De waarde van x is dan een goede benadering van de maximale k.

De optimaliteit van de oplossing (of goede benadering daarvan) volgt uit de feiten dat TV en HV aansluitende oplossingen leveren en dat de optimale k (of goede benadering daarvan) wordt berekend. Die k is het maximale bedrag dat aan kortingen kan worden toegewezen, de verdeling daarvan, en de bijbehorende belastingtarieven, zijn optimaal omdat ze de vorm hebben die ook uit het LP model volgt.

De andere aanpak is toegepast op de gegevens waarbij alle g = 0.5. Het resultaat was identiek aan die met het LP model, zie Tabel 6.

Vervolgens is de aanpak toegepast op 81 gevallen, steeds met alle g = 0.5, waarbij telkens een andere combinatie van B en K werd gebruikt. B was 10, 20, …, 90 % van G (= totaal belastbaar inkomen) en K was 10, 20, …, 90 % van B. De resultaten zijn vergeleken met die van het LP model.

Percentage dat B bepaalt	Percentage dat K bepaalt								
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
20	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	94.31	87.92	84.67	82.15
30	100.00	69.88	58.10	53.00	52.32	51.86	51.53	51.29	52.47
40	27.49	20.17	23.43	26.21	27.87	30.63	33.34	35.37	37.63
50	0.00	5.86	8.19	10.60	15.39	18.58	22.42	25.82	28.73
60	X	0.00	1.83	4.58	7.07	11.65	15.14	19.45	22.79
70	X	X	0.00	1.17	3.51	6.69	10.67	14.90	18.75
80	X	X	X	0.00	1.46	3.36	7.49	11.49	15.72
90	X	X	X	X	0.00	2.04	5.01	8.83	13.36

Tabel 8: Resultaten met andere aanpak, optimale k als percentage van K

In de tabel staan de onoplosbare problemen, beide methoden, aangegeven met X. Verder staat in de tabel de gerealiseerde totale herverdeling k als percentage van het beschikbare bedrag K.

Het LP model en de andere aanpak geven dezelfde netto inkomens (3 decimalen nauwkeurig).

In de gevallen met 100.00% was bisectie niet aan de orde. In de andere, oplosbare, problemen waren rond 30 stappen bisectie nodig om k tot op een euro nauwkeurig te bepalen.

Verfijning en vereenvoudiging

In het voorgaande is gerekend alsof alle personen/huishoudens in een klasse hetzelfde belastbare inkomen hebben, *i.e.* het gemiddelde in die klasse. Dat is te grof, er zijn binnen elke klasse aanzienlijke inkomensverschillen, daar zou rekening mee moeten worden gehouden.

Er zou gewerkt moeten worden met veel smallere klassen, bij de laagste inkomens bijvoorbeeld een klassenbreedte van 100 euro. Dan zouden die klassen als homogeen kunnen worden beschouwd omdat binnen die klassen de inkomensverschillen minder dan 10 euro per maand zijn, hetgeen denkelijk verwaarloosbaar is. Bij de hoge inkomens zouden wat bredere klassen worden gebruikt.

Met deze aanpak zou het probleem, om de gedachten te bepalen, uit bijvoorbeeld 2000 klassen bestaan. Dat leidt tot LP problemen met een aanzienlijk aantal variabelen en voorwaarden. Met moderne *solvers* zijn deze problemen zeker oplosbaar. Misschien is enig geduld nodig, want in elke fase moeten 2000 problemen (van afnemende grootte) worden opgelost.

Met de andere aanpak gaat het ongetwijfeld veel sneller.

De maximale verfijning wordt bereikt met klassenbreedte = 0, dat wil zeggen elk inkomen is een aparte klasse. Dat lijkt wat overdreven, maar het is niet *a priori* onuitvoerbaar.

Een andere keuze zou zijn klassenbreedte = 100 voor alle inkomens. In de eerste klasse wordt dan gerekend of alle inkomens 50 zijn, in de tweede 150, enzovoorts. Verder zou met een uniforme groeifactor, bijvoorbeeld 0.5, kunnen worden gewerkt.

Er geldt voor elk tweetal opeenvolgende klassen met beide korting > 0 dat slack(tweede) = 0, dus

netto(tweede) = netto(eerste) + groeifactor*(belastbaar(tweede) - belastbaar(eerste))

netto(tweede) – netto(eerste) = 0.5*100 = 50

netto(tweede) = netto(eerste) + 50.

Als het belastbaar inkomen met 100 stijgt dan stijgt het netto inkomen met 50, dus de korting daalt met 50. De korting is een dalende lineaire functie van het belastbaar inkomen. Bij inkomen 50 heeft de korting een zekere waarde, die daalt met 50 voor elke 100 inkomensstijging en stopt met waarde <= 50.

Analoog voor de heffingen, die zijn nihil tot een zeker inkomen, heeft daar een zekere waarde, en stijgen vanaf dat punt met 50 per 100 inkomensstijging.

Opeenvolgende kortingen en opeenvolgende heffingen verschillen 50 maar zijn in het algemeen geen veelvoud van 50.

Met uniforme groeifactor = 0.5 geldt, uniform, dat marginale druk <= 50%

Om enigszins een indruk te krijgen van wat dit betekent heb ik de gegevens van Tabel 3 op een heel eenvoudige (en zeer aanvechtbare) manier omgewerkt tot 600 klassen met elk breedte 1000 euro. De middens van de klassen zijn 500, 1500 enzovoort. Met uniforme groeifactor 0.5 was het resultaat:

Klasse 1 met belastbaar inkomen 500 euro heeft een korting/toeslag van 7 570 euro. Dit bouwt af met 500 euro per klasse tot klasse 16 met belastbaar inkomen 15 500 euro als laatste een korting/toeslag krijgt die 70 euro is. Klasse 37 met belastbaar inkomen 36 500 euro heeft als eerste een positieve heffing die 190 euro is. Dit bouwt op met 500 euro per klasse tot klasse 600 met belastbaar inkomen 599 500 euro als laatste een heffing krijgt die 281 690 euro is.

Tabel 9: Resultaten 600 klassen

De getallen moeten met een korrel zout worden genomen. Bij het aanmaken van de klassen is geen rekening gehouden met het gemiddelde en de mediaan van de oorspronkelijke klasse. Ook het maximum inkomen in klasse 8 *ad* 600 000 euro is geen waarneming.

Het is wel mogelijk om gemiddelde en mediaan te verwerken in de aantallen in de nieuwe klassen, maar er blijft toch iets willekeurigs in zitten. Niets is beter dan de echte gegevens. En die zullen toch wel ergens aanwezig en hopelijk beschikbaar zijn.

De vraag is of het resultaat voor betrokkenen, achter de sluier van onwetendheid, acceptabel is. In feite is het resultaat equivalent aan de oplossing in Tabel 6 omdat dezelfde B, K en g zijn toegepast.

Dank zij de lineariteit van heffing en korting zijn geen lange tabellen nodig om ze te specificeren, in het voorbeeld zou kunnen worden gewerkt met Tabel 10:

500 <= belastbaar <= 15 500	korting = 7 820 – belastbaar/2
15 500 < belastbaar < 36 500	korting = 0 heffing = 0
belastbaar > = 36 500	heffing = belastbaar/2 – 18 060

Tabel 10: Resultaten 600 klassen, berekening korting en heffing

Dit is niet helemaal hetzelfde als Tabel 9 omdat nu met de echte belastbare inkomens wordt gerekend en niet met de veelvouden van 500. Met klassenbreedte 100 zal het beter zijn, dan zijn de verschillen tussen echte belastbare inkomens en de veelvouden van 50 veel kleiner.

De lineariteit kan ook gebruikt worden om het rekenproces verder te versnellen zie Bijlage 2.

Slotopmerkingen

Deze notitie betreft het berekenen van rechtvaardige belastingtarieven en kortingen, met behulp van optimalisering, bij gegeven B (= bruto belastingopbrengst) en K (= maximum totaal aan kortingen). Het bepalen van B en K is hier niet aan de orde.

De gepresenteerde methode zou goed passen in een situatie waarin zoveel mogelijk (alle?) toeslagen en kortingen zijn vervangen door één toeslag of verzilverbare heffingskorting (voorstellen CU en D66, maar dan geen inkomens-on-afhankelijke korting).

In de voorstellen van CU en D66 zijn de kortingen afhankelijk van het type en de omvang van de huishoudens. Analoog daaraan zou de methode per type/omvang van de huishoudens kunnen worden toegepast. Daarbij zouden zich complicaties kunnen voordoen, het heeft geen nut om daarop vooruit te lopen.

Een en ander kan onderzocht worden aan de hand van gedetailleerde gegevens over de belastbare inkomens van de huishoudens, hetzij geregistreerd over een voorbij jaar, dan wel geschat voor een toekomstig jaar.

Als de methode en de resultaten als rechtvaardig worden geaccepteerd en er zijn flinke verschillen met de actuele situatie, dan zijn die verschillen op zich geen valide argument om de methode en resultaten af te wijzen. Want dat zou er op neer komen dat men een kennelijk niet-rechtvaardige situatie wil handhaven.

Maar misschien is die situatie volgens een andere benadering wel rechtvaardig.

Het aantrekkelijke van de aanpak van Rawls is dat specifieke deelbelangen geen rol spelen als het er om gaat of een methode rechtvaardig is.

Verwijzingen

1. John Rawls, *A Theory of Justice*, *Revised Edition,* Harvard University Press en Oxford University Press, 1999
2. Jack Vance, *Big Planet*, Standard Magazines Inc. 1952, Coronet Edition, 1977
3. Confucius, *De gesprekken*, vertaald door Kristofer Schipper, Uitgeverij Augustus, Amsterdam en Antwerpen, 2014
4. Patrick Koot en anderen, Doorrekening ex-ante effecten plannen socialezekerheids- en belastingstelsel D66, CPB, juni 2020.
5. Patrick Koot en anderen, Doorrekening ex-ante effecten plannen socialezekerheids- en belastingstelsel ChristenUnie, CPB, oktober 2020.

Bijlage 1: Een LP model

Deze bijlage bevat

- een meer formele beschrijving van het LP model
- een beschrijving van het optimaliseren
- een bespreking van enkele eigenschappen van de optimale oplossing.

Data, variabelen en vergelijkingen

De eerste grootheid van het model is

n = het aantal klassen.

Per klasse zijn er drie grootheden:

e_i = gemiddeld inkomen klasse i

f_i = aantal personen in klasse i

g_i = groeifactor klasse i

waarbij i = 1, 2, …, n.

Er geldt dat

$0 <= g_i <= 1$.

Voor elk tweetal opeenvolgende klasse geldt

$e_i < e_{i+1}$,

de inkomens zijn stijgend.

Er zijn nog drie grootheden:

B = bovengrens voor de bruto belastingopbrengst

K = bovengrens voor het voor herverdeling (heffingskorting) beschikbare bedrag

N = gewenste netto belastingopbrengst.

Er geldt

N = B – K.

De genoemde grootheden zijn de *input* voor het model, het zijn constanten.

Het model bevat verder een aantal variabelen, waarvan de waarde moet worden vastgesteld, dat is de *output* van het model.

Per klasse zijn er drie variabelen:

t_i = het belastingtarief in klasse i

k_i = de heffingskorting in klasse i

s_i = het netto inkomen in klasse i.

waarbij i = 1, 2, …, n.

Er zijn twee algemene variabelen

b = de totale bruto belastingopbrengst

k = het totaal aan kortingen.

Nu volgen de voorwaarden waaraan de variabelen moeten voldoen.

Allereerst zijn alle variabelen >= 0.

De bruto belastingopbrengst

$$b = \sum_i \; f_i \; e_i \, t_i \tag{1}$$

Het totaal aan kortingen

$$k = \sum_i \; f_i \; k_i \tag{2}$$

De begrenzing van het totaal aan kortingen

$$k \leq K \tag{3}$$

De netto belastingopbrengst

$$b - k = N \tag{4}$$

De kortingen zijn niet-stijgend

$$k_i \geq k_{i+1} \tag{5}$$

De belastingtarieven zijn progressief

$$t_i \leq t_{i+1} \tag{6}$$

Het netto inkomen

$$s_i = e_i - (e_i \, t_i - k_i) = e_i - e_i \; t_i + k_i \tag{7}$$

Het netto inkomen in klasse 1

$$s_1 \geq g_1 \, e_1 \tag{8}$$

De groei van het netto inkomen

$$s_i - s_{i-1} \geq g_i (e_i - e_{i-1}) \tag{9}$$

Dit zijn alle voorwaarden.

In (1) en (2) loopt de sommatie over alle i (i=1, 2, …, n).

Voorwaarden (5) en (6) gelden voor i=1, 2, …, n-1. (7) geldt voor alle i (i=1, 2, …, n) en (9) geldt voor i=2, 3, …, n-1.

De voorwaarden (9) zijn de groei-voorwaarden. Met $g_i = 0.5$ neemt het netto inkomen toe met minstens de helft van de toename van het belastbaar inkomen. Met alle $g_i = 0$ kan het gebeuren dat twee of meer opeenvolgende klassen hetzelfde netto inkomen hebben, en dat kan zowel bij de lage als bij de hoge inkomens zijn.

Stel alle $g_i = 0$ en

alle $k_i = k' = K/F$ en alle $t_i = t' = B/G$, (10)

waarbij $F = \sum_i f_i$ = totaal aantal personen

en $G = \sum_i e_i f_i$ = totaal belastbaar inkomen.

Dan volgt uit (1) dat b = B en uit (2) volgt k = K. Hieruit volgt dat is voldaan aan de voorwaarden (3), (4), (5) en (6).

Uit (7) volgt dan dat $s_i = e_i + k'$, dus $s_i >= 0$, zodoende is aan (8) voldaan.

Tenslotte is dan $s_i - s_{i-1} = e_i - e_{i-1} >= 0$, zodat ook aan (9) is voldaan.

Dus met alle $g_i = 0$ heeft het stelsel vergelijkingen minstens één oplossing.

Stel nu alle $g_i = g'$ en oplossing (10) wordt wederom gebruikt, dan volgt uit (9) dat

$$t' + g' <= 1 \qquad (11)$$

moet zijn.

Stel, als laatste geval, dat alle $k_i = 0$, alle $g_i = g''$ en alle $t_i = t''$. Dan leiden (7) en (9), met i >= 2, tot

$$(e_i - e_{i-1})(1 – t'' – g'') >= 0 \qquad (12)$$

Aangezien $e_i - e_{i-1} > 0$ moet dan gelden dat

$$t'' + g'' <= 1. \qquad (13)$$

Dus de gemiddelde bruto belastingdruk is <= 1 – g''.

In het algemeen is de oplosbaarheid van het probleem afhankelijk van de gekozen g_i en N.

Optimaliseren

Het oplossen van het model gaat in twee fasen.

In de **eerste fase** worden achtereenvolgens de optimale s_i berekend voor i=1, 2, … , n. Dit gebeurt door het oplossen van een aantal lineaire programmerings (LP) problemen.

Stap i (i=1, 2, … , n) van de eerste fase bestaat uit het berekenen van

S_i = het maximum van s_i onder de voorwaarden (1), … , (9)

plus de voorwaarden

$s_k = S_k$ met k= 1, …, i-1 (14)

In stap 1 wordt het netto inkomen van klasse 1 gemaximaliseerd. In de volgende stappen is, door (14), dat inkomen op het gevonden maximum gefixeerd. Zo gaat dat verder voor de volgende klassen, en telkens wordt het inkomen op het gevonden maximum gefixeerd. Na afloop hiervan zijn alle netto inkomens bekend.

Als het probleem dat in stap 1 moet worden opgelost, geen oplossing heeft (*infeasible* is), dan is het gehele probleem onoplosbaar. Is er in stap 1 wel een oplossing, dan is het gehele probleem oplosbaar.

Aan het eind van de eerste fase zijn de optimale s_i bekend ($s_i = S_i$). De waarden van t_i en k_i moeten voldoen aan (7) en ≥ 0 zijn. Als voor t_i een bepaalde waarde wordt gekozen dan is wegens (7) de waarde van k_i bepaald. De t_i moeten worden geminimaliseerd, dan zijn de kortingen voor de lagere inkomens en de heffingen voor de hogere belastbare inkomens.

In de **tweede fase** worden achtereenvolgens de optimale t_i berekend voor i=1, 2, …, n. Dit kan naar analogie aan de eerste fase door het oplossen van een aantal LP problemen.

Stap i (i=1, 2, … , n) van de tweede fase bestaat uit het berekenen van

T_i = het minimum van t_i onder de voorwaarden (1), … , (7)

plus de voorwaarden

$s_k = S_k$ met k= 1, …, n (14’)

$t_k = T_k$ met k= 1, …, i-1 (15)

In stap 1 wordt het belastingtarief van klasse 1 geminimaliseerd. In de volgende stappen is, door (15), dat tarief op het gevonden minimum gefixeerd. Zo gaat dat verder voor de volgende klassen, en telkens wordt het tarief op het gevonden minimum gefixeerd. Na afloop hiervan zijn alle belastingtarieven en wegens (7) ook de kortingen bekend. In de tweede fase spelen de voorwaarden (8) en (9) geen rol omdat de netto inkomens s_i gefixeerd zijn op waarden die aan deze voorwaarden voldoen.

Het is *overkill* om in de tweede fase met LP te werken. De optimale oplossing kan worden afgelezen uit de oplossing van de eerste fase.

Het uitgangspunt is de oplossing die aan het eind van de eerste fase werd gevonden.

Er is een hulpvariabele $h_i = e_i \times t_i$ = de heffing in klasse i, dit leidt tot

$S_i - e_i = k_i - h_i$ (7’)

Als $k_i > h_i$ dan geldt ook

$k_j > h_j$ voor alle $j < i$ (16)

dit volgt uit (5).

Als $k_i < h_i$ dan geldt ook

$k_j < h_j$ voor alle $j > i$ (17)

dit volgt uit (6).

Nog wat notatie:

$v = 0$ als $k_j <= h_j$ voor alle i,

anders

v = de maximale i met $k_j > h_j$

$w = n+1$ als $k_i >= h_i$ voor alle i,

anders

w = de minimale i met $k_j < h_j$.

Het aflezen van de optimale oplossing van de tweede fase staat in Tabel A.

Er geldt, voor elke i=1, 2, …, n:		
1.	als $S_i > e_i$ dan is $K_i = S_i - e_i$ en $T_i = 0$	dit geldt voor i=1,…, v
2.	als $S_i = e_i$ dan is $K_i = 0$ en $T_i = 0$	dit geldt voor i=v+1, …, w-1
3.	als $e_i > S_i$ dan is $K_i = 0$ en $T_i = (e_i - S_i)/ e_i$	dit geldt voor i=w, …, n

Tabel A: Oplossing tweede fase aflezen uit oplossing eerste fase

Dit volgt uit het minimaliseren van t_i onder de voorwaarde (7) met $s_i = S_i$

$S_i - e_i = k_i - e_i\ t_i$ (7’’)

dit is een optimaliserings probleem met twee variabelen en één voorwaarde, K_i = de optimale waarde van k_i en T_i = de optimale waarde van t_i . Dit probleem heeft heel wat minder variabelen en voorwaarden dan het probleem dat in stap i met LP zou worden opgelost. De optimale oplossing van een probleem kan niet beter worden als extra voorwaarden worden toegevoegd. Het zou kunnen zijn dat de kleine probleempjes samen een oplossing geven die te goed is om waar te zijn, dat wil zeggen een oplossing die niet aan de voorwaarden van de LP problemen voldoet.

Te bewijzen dus dat de oplossing die in Tabel A staat, wèl aan die voorwaarden voldoet. Dit is beperkt tot (5) en (6) omdat aan de overige voorwaarden zeker is voldaan.

Voor i= 1, …, w-1 is $T_i = 0$, dit voldoet aan (6).

Voor i= v+1, …, n is $K_i = 0$, dit voldoet aan (5).

Voor i = 1, …, v is $K_i = S_i - e_i = k_i - h_i$ wegens (7’). Omdat k_i niet-stijgend is en h_i niet-dalend, is $k_i - h_i$ niet-stijgend, dus K_i voldoet aan (5).

Voor $i = w, .., n$ is $T_i = (e_i - S_i)/ e_i = (h_i - k_i)/e_i = (e_i t_i - k_i)/e_i = t_i - k_i/e_i$. Omdat t_i niet-dalend is, en k_i/e_i niet-stijgend (want k_i is niet-stijgend en e_i is wel stijgend), is $t_i - k_i/e_i$ niet-dalend, dus T_i voldoet aan (6).

De conclusie is dat Tabel A dezelfde oplossing levert als het toepassen van LP voor de tweede fase.

Eigenschappen van de optimale oplossing

Uit Tabel A blijkt dat er in de optimale oplossing geen klassen zijn met zowel heffing als korting positief. De optimale oplossing is *regulier*.

Voor elk tweetal opeenvolgende klassen in het interval 1, …, v geldt dat de slack van de tweede = 0.

Stel dat in de optimale oplossing de slack van de tweede > 0, dus

$$s_{i+1} > s_i + g_{i+1}(e_{i+1} – e_i)$$

ofwel

$$e_{i+1} + k_{i+1} > e_i + k_i + g_{i+1}(e_{i+1} – e_i)$$

zodat het mogelijk is om k_{i+1} te verlagen ten gunste van k_i. Dan zou k_i stijgen, dus de oplossing is niet optimaal.

De conclusie is dat slack(i) = 0 voor i = 2, …, v.

Wegens (5) zou het verlagen van k_{i+1} eventueel gepaard kunnen gaan met het verlagen van een of meer k_j met $j > i+1$. Eveneens wegens (5) zou het verhogen van k_i eventueel gepaard kunnen gaan met het verhogen van een of meer k_j met $j < i$.

Slack = 0 betekent, voor i= 2, …, v

$$s_{i+1} = s_i + g_{i+1}(e_{i+1} – e_i)$$

dus

$$s_{i+1} - s_i = g_{i+1}(e_{i+1} – e_i)$$

zodat

$$e_{i+1} + k_{i+1} - e_i - k_i = g_{i+1}(e_{i+1} – e_i)$$

en

$$k_{i+1} - k_i = g_{i+1}(e_{i+1} – e_i) - (e_{i+1} - e_i)$$

en

$$k_i - k_{i+1} = (1-g_{i+1})(e_{i+1} – e_i).$$

Als nu de groeifactor uniform is, dus $g_i = g$ voor alle i, en de e_i zijn equidistant, $e_{i+1} – e_i = d$ voor alle i, dan verschillen opeenvolgende kortingen een constant bedrag, dus de korting is een lineaire functie van i (op dit interval).

Voor elk tweetal opeenvolgende klassen in het interval w, …, n geldt dat de slack van de tweede = 0.

Stel dat in de optimale oplossing de slack van de tweede > 0, dus

$$e_{i+1} - h_{i+1} > e_i - h_i + g_{i+1}(e_{i+1} – e_i)$$

zodat het mogelijk is om h_{i+1} te verhogen ten gunste van h_i. Dit zou inhouden dat t_{i+1} wordt verhoogd en dat t_i wordt verlaagd. Dan zou de oplossing dus niet optimaal zijn.

De conclusie is dat slack(i) = 0 voor i = w+1, …, n.

Wegens (6) zou het verhogen van t_{i+1} eventueel gepaard kunnen gaan met het verhogen van een of meer t_j met $j > i+1$. Eveneens wegens (6) zou het verlagen van t_i eventueel gepaard kunnen gaan met het verlagen van een of meer t_j met $j < i$.

Slack = 0 betekent, voor i= w+1, …, n

$$s_{i+1} = s_i + g_{i+1}(e_{i+1} – e_i)$$

dus

$$e_{i+1} - h_{i+1} = e_i - h_i + g_{i+1}(e_{i+1} – e_i) .$$

Hieruit volgt

$$h_{i+1} - h_i = (1-g_{i+1})(e_{i+1} – e_i).$$

Als nu de groeifactor uniform is, dus $g_i = g$ voor alle i, en de e_i zijn equidistant, $e_{i+1} – e_i = d$ voor alle i, dan verschillen opeenvolgende heffingen een constant bedrag, dus de heffing is een lineaire functie van i (op dit interval).

Tenslotte nog het geval dat $v = w – 1$ met slack(w) > 0, dus

$$e_w – h_w > e_v + k_v + g_w(e_w – e_v)$$

Dan kan h_w , dus t_w , stijgen ten gunste van k_v . Dan zou k_v stijgen, dus de oplossing is niet optimaal.

De conclusie is dat in dit geval slack(w) = 0.

In stap i wordt s_i gemaximaliseerd onder de voorwaarden (11). Dat resulteert in netto inkomen S_i . Dat is niet te verhogen, behalve door het verlagen van het netto inkomen van een of meer klassen < i. Die klassen waren toch al niet beter af dan klasse i.

Bijlage 2: Sneller rekenen met equidistante klasse-middens

Als voor elke klasse geldt $e_i = c + (i – ½)d$ dan is $e_{i+1} - e_i = d$, dus de middens van de klassen zijn equidistant.

Het toepassen van TV komt neer op het bepalen van v en k_v bij het gegeven totaal aan kortingen k.

Stel dat v is gekozen en $k_v = x$. Dan moet voor k = het totaal aan toegewezen kortingen gelden:

$$k = \sum_{i = 1, \ldots, v} f_i k_i \qquad (1)$$

De k_i zijn aansluitend dus

$$k_{i-1} = k_i + (1 – g_i) d$$

zodat

$$k_v = x$$

$$k_{v-1} = x + (1 – g_v) d$$

$$k_{v-2} = x + (1 – g_v) d + (1 – g_{v-1}) d$$

dus

$$k_i = x + u_i \qquad (2)$$

met

$$u_i = d \sum_{j = i, \ldots, v-1} (1 – g_{j+1}). \qquad (3)$$

[Als de groeifactoren uniform zijn, dus $g_i = g$ voor alle i, dan is

$$u_i = d \sum_{j = i, \ldots, v-1} (1 – g) = d (v – 1 – i + 1)(1 – g) = d (v – i)(1 – g) \qquad (3')$$

Als bovendien g= ½ en d = 1 dan is

$$u_i = ½ (v – i) \qquad (3'')$$

]

Wegens de groeifactor van klasse 1 moet gelden

$$e_1 + k_1 >= g_1 e_1$$

en dat is altijd het geval.

Als v < n dan is er een restrictie op x want er moet gelden dat slack(v+1) >= 0. Dit leidt tot

$$x <= (1 – g_{v+1})(e_{v+1} – e_v) \qquad (4)$$

Uit (2) blijkt dat k_i een lineaire functie is van x, dus het rechterlid van (1) is ook een lineaire functie van x. Dus x kan worden berekend door (1) op te lossen:

$$k = \sum_{i = 1, \ldots, v} f_i k_i$$

$$k = \sum_{i=1,\ldots,v} f_i (x + u_i)$$

$$k = x \sum_{i=1,\ldots,v} f_i + \sum_{i=1,\ldots,v} f_i u_i$$

$$x = (k - \sum_{i=1,\ldots,v} f_i u_i) / \sum_{i=1,\ldots,v} f_i \qquad (5)$$

Uit (5) volgt dat x daalt als functie van v, want met toenemende v daalt de teller en stijgt de noemer.

Naast (4) moet ook gelden $x > 0$, want klasse v moet een positieve korting hebben.

Als $x > 0$ en ook aan (4) is voldaan dan is met deze v een oplossing van TV gevonden.

Als $x <= 0$ dan leidt deze v niet tot een oplossing van TV. De teller in (5) is te klein, er moet een lagere waarde van v worden onderzocht.
Ook als niet aan (4) is voldaan leidt deze v niet tot een oplossing van TV. Nu is de teller in (5) te groot, er moet een hogere waarde van v worden onderzocht.

De oplossing van TV kan dus met behulp van bisectie worden gevonden. Het zou kunnen dat TV meerdere oplossingen heeft. Dan moet de oplossing worden gekozen waarvoor k_1 maximaal is, dus die met maximale x.

Geheel analoog kan ook de oplossing van HV met behulp van bisectie worden gevonden.

Al met al leidt dit tot drievoudige bisectie om bij gegeven B en K de optimale tarieven en kortingen te berekenen.