Vakantiecursus 2000

Voor leraren in de exacte vakken VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden organiseert het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) in 2000 een vakantiecursus met als thema:

Is wiskunde nog wel mensenwerk?

Ook dit jaar betreft het een tweedaagse cursus, die zowel in Eindhoven als in Amsterdam wordt gehouden en wel op **vrijdag 25 augustus en zaterdag 26 augustus in Eindhoven** in het Auditorium van de Technische Universiteit Eindhoven, Den Dolech te Eindhoven.

Op **vrijdag 1 september en zaterdag 2 september in Amsterdam** in het CWI, Kruislaan 413 te Amsterdam.

Bij de cursus is inbegrepen een warme maaltijd op vrijdag en een lunch op zaterdag.

Aanmelding
Aanmelding voor deelname aan de cursus kan geschieden door

- het aanmeldingsformulier achter in deze brochure in te vullen en vóór 15 augustus 2000 op te sturen aan het CWI;
- via de website http://www.cwi.nl/conferences/VC2000/ waar een online registratieformulier ingevuld en opgestuurd kan worden.

NB. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit. Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar. Degene die daarop prijs stelt, gelieve het betreffende formulier in te vullen.

Ten geleide

Jan van de Craats
KMA

Is wiskunde nog mensenwerk? Menigeen die de stormachtige ontwikkelingen van de informatietechnologie in de laatste decennia van de afgelopen eeuw gevolgd heeft, zal zich dat wel eens hebben afgevraagd. En de man of vrouw op straat, voor wie wiskunde toch al gelijk staat met rekenen op een moeilijke manier, heeft al lang het idee dat de computer het rekenen, en dus ook alle wiskunde, van de mens overgenomen heeft. Maar ook wiskundeleraren en wiskundigen die in andere sectoren van de maatschappij werkzaam zijn, zullen zich de laatste tijd steeds vaker zijn gaan afvragen welk deel van de wiskunde nog mensenwerk blijft, nu steeds meer van het traditionele handwerk door computers overgenomen wordt.

De vraag ligt daarbij voor de hand of er nog wel werk voor wiskundigen overblijft, met name in het onderwijs. Symbolisch differentiëren en integreren kan de computer immers veel beter dan wij, grafieken tekenen en functieonderzoek plegen is met de computer een fluitje van een cent. Het moeizaam benaderen van kansverdelingen door een normale verdeling en die vervolgens op standaardvorm herleiden, is dankzij de computer een volstrekt overbodige vaardigheid geworden. Voer een willekeurige stelling uit de vlakke euclidische meetkunde in symbolische vorm in het computeralgebrapakket *MAPLE* in, en een geschikt deelprogramma antwoordt onmiddellijk 'TRUE' of 'FALSE', waarmee het kort geleden weer in de klas ingevoerde moeizame zoeken naar synthetische meetkundige bewijzen met recht ter discussie gesteld kan worden.

Is wiskunde nog mensenwerk? en: *Wat voor werk is er nog voor wiskundigen in de komende eeuw?* – Dat zijn de centrale vragen van de Vacantiecursus 2000. De sprekers zullen laten zien dat er voor het hierboven geschetste pessimisme geen enkele reden bestaat. De wiskunde is nog steeds springlevend – je zou zonder enige overdrijving kunnen zeggen: springlevender dan ooit, als dat niet zulk lelijk Nederlands was. Want weliswaar neemt de computer ons steeds meer werk uit handen, maar tegelijkertijd zorgt diezelfde computer voor tal van nieuwe mogelijkheden en uitdagingen.

Ook in de klas, zoals *drs. A. Heck*, de auteur van een van de standaardreferentiewerken over MAPLE, zal laten zien. Zijn bijdrage gaat over mogelijkheden om een op school bij natuurkunde, scheikunde en biologie veel gebruikt computer- en meetpakket, IP-COACH genaamd, ook in de wiskundelessen te gebruiken bij profielwerkstukken en praktische opdrachten.

Een ander facet van het gebruik van de computer in het wiskunde-onderwijs wordt belicht door *dr. H.J.M. Sterk*, die zal spreken over interactief onderwijs, een kreet die vaak valt in discussies over onderwijs en informatietechnologie, meestal zonder dat de betrokkenen daarover een helder beeld voor ogen hebben. Aan de TU Eindhoven wordt het elementaire algebra-onderwijs thans op een interactieve manier gegeven aan de hand van een speciaal daarvoor ontwikkeld boek met CD-rom. De ervaringen die daar worden opgedaan zijn uitermate interessant, en misschien wel richtinggevend voor het gehele wiskundeonderwijs in de komende eeuw.

Prof.dr. N.G. de Bruijn, initiator van tal van baanbrekende ontwikkelingen op het gebied van de inzet van de computer bij de wiskunde, zal laten zien hoe de computer zowel in het onderwijs als in het onderzoek als instrument kan worden gehanteerd. Juist omdat in het onderwijs thans gelukkig weer aandacht wordt gevraagd voor redeneren en bewijzen, zullen zijn ideeën over natuurlijke deductie veel weerklank vinden. Professor De Bruijn verzorgt ook het traditionele *oefenuur* in de Vacantiecursus, waarin de deelnemers zelf hun krachten kunnen beproeven op uitdagende opgaven.

Een groot probleem in het huidige wiskunde-onderwijs is het feit dat leraren nog veel te weinig weten over de vele mogelijkheden die er thans voor afgestudeerde wiskundigen zijn om in de industrie aan uitdagende wiskundige problemen te werken. Zij kunnen hun leerlingen dus ook geen reëel beeld geven van de beroepsmogelijkheden voor wiskundigen. *Prof.dr. J. Molenaar*, een van de initiatiefnemers van de 'Studiegroep Wiskunde met de Industrie' zal laten zien hoe rijk en gevarieerd dat terrein van toepassingen is. En hij heeft aangekondigd dat hij ook zal beargumenteren dat, in tegenstelling tot wat veel mensen denken, de rol van de computer daarbij tamelijk bescheiden is: de wiskundige zal in de eerste plaats moeten meedenken, analyseren en modelleren!

Een betrekkelijk nieuw terrein van toepassingen is dat van de beeld- en signaalanalyse. Twee sprekers zullen ons daarover vertellen. *Dr. H.G. ter Morsche* legt uit wat *wavelets* zijn, en welke voordelen ze hebben boven de traditionele technieken van signaalanalyse zoals Fourier-reeksen en Fourier-transformaties. *Dr.ir. H.J.A.M. Heijmans* richt zich op moderne ontwikkelingen rond digitale beeldverwerking, een terrein dat sterk meetkundig georiënteerd is, en zich dus bij uitstek leent voor de presentatie van spectaculaire resultaten.

De slotlezing wordt verzorgd door *dr. W.W.J. Hulsbergen* en *dr. M. Coster*; beiden zijn als wiskundig cryptoloog werkzaam bij het ministerie van defensie. Zij zullen spreken over moderne wiskundige cryptosystemen die te maken hebben met elliptische krommen, een tak van wiskunde die tot voor kort het exclusieve speeldomein was van zuiver wiskundigen, maar die nu uitermate intrigerende praktische toepassingen vinden in de cryptografie.

Het gehele programma overziende kan gezegd worden dat de Vacantiecursus 2000 een waardige start belooft te worden van een nieuwe eeuw. De verschillende voordrachten zullen tal van aanknopingspunten bieden met de schoolwiskunde, maar tegelijkertijd zullen de sprekers op allerlei manieren laten zien hoe belangrijk, uitdagend en fascinerend de wiskunde van de toekomst is. Niet ondanks de computer, maar juist dankzij de nieuwe mogelijkheden die de moderne informatietechnologie de wiskunde te bieden heeft.

Programma Eindhoven

25 en 26 augustus 2000

vrijdag 25 augustus

15.00 – 15.25	Ontvangst, koffie
15.25 – 15.30	Opening
15.30 – 16.15	Interactief onderwerp in de algebra H.J.M. Sterk
16.15 – 16.45	Pauze
16.45 – 17.30	Rekenen aan beelden: is een plaatje duizend woorden waard? H.J.A.M. Heijmans
17.30 – 18.30	Warme maaltijd
18.30 – 19.15	Wavelets in beeld en geluid H.G. ter Morsche
19.15 – 19.45	Pauze
19.45 – 20.30	Een computerwerkplaats voor wiskunde A. Heck

zaterdag 26 augustus

10.00 – 10.45	Wiskunde werkt! J. Molenaar
10.45 – 11.15	Pauze
11.15 – 12.00	Computers: ook voor de wiskunde zelf N.G. de Bruijn
12.00 – 13.00	Lunch
13.00 – 13.45	Oefeningen (o.l.v. N.G. de Bruijn)
13.45 – 14.15	Pauze
14.15 – 15.00	Elliptische krommen en cryptografie M. Coster / W.W.J. Hulsbergen
15.00 – 15.05	Sluiting

Programma Amsterdam

1 en 2 september 2000

vrijdag 1 september

15.00 – 15.25	Ontvangst, koffie
15.25 – 15.30	Opening
15.30 – 16.15	Interactief onderwerp in de algebra H.J.M. Sterk
16.15 – 16.45	Pauze
16.45 – 17.30	Rekenen aan beelden: is een plaatje duizend woorden waard? H.J.A.M. Heijmans
17.30 – 18.30	Warme maaltijd
18.30 – 19.15	Wavelets in beeld en geluid H.G. ter Morsche
19.15 – 19.45	Pauze
19.45 – 20.30	Wiskunde werkt! J. Molenaar

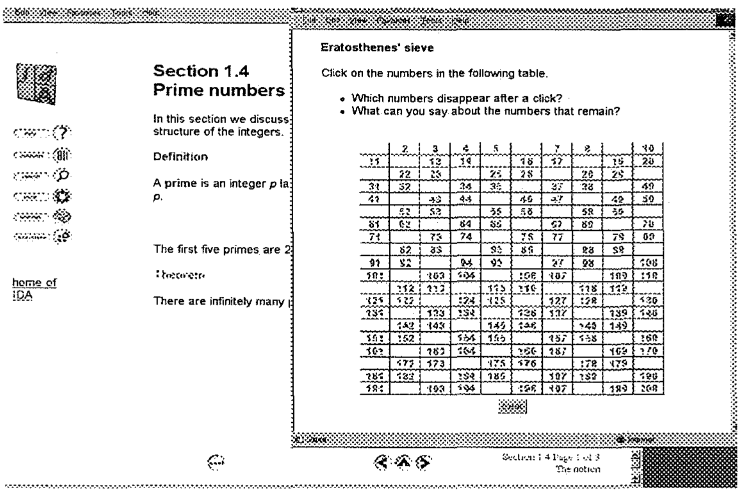
zaterdag 2 september

10.00 – 10.45	Een computerwerkplaats voor wiskunde A. Heck
10.45 – 11.15	Pauze
11.15 – 12.00	Computers: ook voor de wiskunde zelf N.G. de Bruijn
12.00 – 13.00	Lunch
13.00 – 13.45	Oefeningen (o.l.v. N.G. de Bruijn)
13.45 – 14.15	Pauze
14.15 – 15.00	Elliptische krommen en cryptografie M. Coster / W.W.J. Hulsbergen
15.00 – 15.05	Sluiting

Interactief onderwijs in de algebra

Hans Sterk
Technische Universiteit Eindhoven

De overgang van papieren media naar electronische media staat nog in de kinderschoenen, en dwingt ons derhalve na te denken over de presentatie van wiskunde met de computer, maar ook, een stap dieper, over de representatie van wiskunde op de computer, dat wil zeggen de manier waarop wiskundige expressies bij computers bekend zijn. Handige representatie van wiskunde op de computer leidt immers tot flexibeler gebruik en meer (reken)mogelijkheden. Computeralgebrapakketten zijn voorbeelden van software waarin wiskunde-expressies vlot manipuleerbaar zijn. Wel zijn er twee beperkingen: ten eerste blijft dit manipuleren beperkt tot het specialisme van het pakket, en ten tweede moet men de taal van het bewuste pakket leren. Een verbreding van de mogelijkheden dient zich aan met internet, dat een infrastructuur biedt waarbij men minder gebonden is aan de eigen computer en men in staat is verbindingen met allerlei plekken op de wereld te leggen, zodat berekeningen in principe ook kunnen worden uitbesteed aan machines elders. Juist wanneer men van andere machines en andere software gebruik wil kunnen maken, speelt de wijze waarop wiskunde op de computer wordt gerepresenteerd een essentiële rol.



FIGUUR 1. Een snapshot van een 'bladzijde' en een applet uit *Algebra Interactive!*

Dit cursusjaar (1999–2000) is bij de Faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven het cursusmateriaal *Algebra Interactive!* in gebruik genomen, bestaande uit een CD-rom en een boek[1]. Op de CD-rom is nieuwe technologie gebruikt om de cursussen algebra te verlevendigen. Met dit materiaal proberen we onder meer nieuwe (electronische) onderwijswegen in te slaan en te ontdekken welke vernieuwingen op dat terrein succesvol zijn en een vervolg verdienen. *Algebra Interactive!* is een tussenproduct uit het OpenMath-project dat beoogt een scenario als boven aangeduid te realiseren: een wiskunde-omgeving waarin men soepel met wiskunde kan omgaan, zowel wat de presentatiekant als de manipulatiekant betreft, zonder dat men wordt gestoord door bijvoorbeeld pakketafhankelijke zaken, en zonder dat men precies hoeft te weten waar welke berekening uitgevoerd wordt.

Aan de hand van *Algebra Interactive!* zal ik uiteenzetten wat de technologie te bieden heeft en wat ons voor de nabije toekomst voor ogen staat. Het boek is ruwweg opgezet in twee delen, waarvan het eerste deel zich op concrete algebraïsche verschijningsvormen richt (denk aan rekenen met gehele getallen, modulorekenen, rekenen met veeltermen, permutaties) en het tweede deel deze concrete vormen een plaats biedt binnen abstractere structuren zoals groepen en lichamen. Allerlei rekenfaciliteiten, illustraties, visualisaties en multiple choice toetsen stellen de gebruiker in staat zich de gepresenteerde algebra eigen te maken. In Figuur 1 ziet u bijvoorbeeld een (snapshot van een) 'bladzijde' over priemgetallen en een applet dat de zeef van Erathostenes ter bepaling van de priemgetallen (hier tot 200) visualiseert: deze snapshot is genomen nadat een klik op het getal 3 alle 3-vouden behalve het getal 3 zelf uit de lijst heeft verwijderd.

[1] De ontwikkeling van *Algebra Interactive!* (auteurs: A.M. Cohen, H. Cuypers, H. Sterk) is oorspronkelijk gestart als een initiatief van de leerstoel Discrete Algebra en Meetkunde van de TUE in het kader van een studeerbaarheidsproject gesubsidieerd door het Ministerie OC en W, en is later deel gaan uitmaken van het Europese project OpenMath. Een demo is te zien onder http://www.win.tue.nl/~ida/demo/index.html

Rekenen aan beelden: is een plaatje duizend woorden waard?

Henk J.A.M. Heijmans
Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam

Informatie komt steeds vaker tot ons in de vorm van beelden. Dit is het geval in de medische diagnostiek waar artsen over steeds betere beeldvormingstechnieken beschikken, o.a. dankzij steeds geavanceerdere MRI en CT-scanners. In een groot aantal produktie-processen worden tussen- en eindprodukten vaak aan geautomatiseerde visuele inspectie onderworpen. Daarnaast worden veel routinematige of risicovolle taken verricht door robots welke middels camera's worden aangestuurd dan wel gecorrigeerd. Op het militaire vlak probeert men steeds vaker wapensystemen uit te rusten met computers welke een zekere mate van 'visuele intelligentie' bezitten. Een steeds groter aantal satellieten zendt een almaar toenemende hoeveelheid visuele data naar de aarde, die vervolgens geanalyseerd en opgeslagen moet worden.

Maar ook in het dagelijks leven speelt beeldinformatie, en dan met name in digitale vorm, een steeds belangrijkere rol. Daarbij kan men natuurlijk in de eerste plaats aan internet denken, maar ook digitale fotografie en video maken hun opmars en digitale televisie staat op het punt onze huiskamers te veroveren.

In al deze toepassingen spelen de volgende twee deelproblemen een uitermate belangrijke rol:

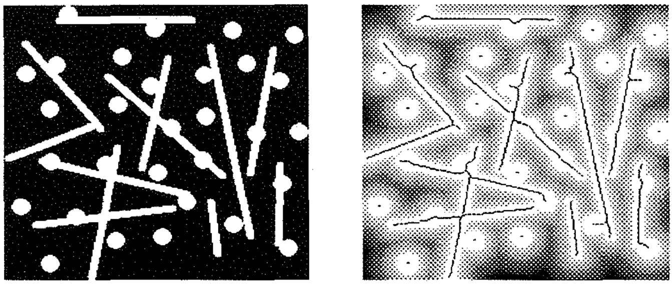
– Welke informatie bevat een beeld en hoe kan men deze informatie aan een beeld onttrekken?

– Hoe houden we opslagruimte en transmissietijden van beelddata binnen de perken?

Bij het aanpakken van zulke problemen speelt wiskunde van oudsher een belangrijke rol, een rol die alleen maar belangrijker wordt naarmate de eisen die aan de oplossing gesteld worden steeds hoger worden.

Een bekend Engels spreekwoord zegt: 'A picture is worth a thousand words'. Dat klinkt wellicht voor de hand liggend, maar een 'intelligente' computer zou daar onmiddelijk tegen inbrengen dat een 'picture' veel meer ruimte inneemt dan 'thousand words', en dat de informatie voor een computer nou niet onmiddelijk voor het oprapen ligt.

In deze voordracht zullen we een paar problemen uit de digitale beeldverwerking de revue laten passeren. Daarnaast zullen we kort ingaan op één specifieke beeldverwerkingsmethodiek, de mathematische morfologie, een methodiek die sterk meetkundig georiënteerd is en derhalve bij uitstek geschikt voor het extraheren van geometrische informatie.



FIGUUR 1. Links ziet men een zwart-wit beeld en rechts twee specifieke morfologische transformaties van dit beeld, de afstandstransformatie en daarop het skelet (dunne zwarte lijn). Skelet-transformaties worden in de praktijk o.a. gebruikt in algoritmen voor automatische schriftherkenning.

In bijgaande illustratie laten we twee eenvoudige voorbeelden van morfologische transformaties zien.

Wavelets in beeld en geluid

Hennie ter Morsche
Technische Universiteit Eindhoven

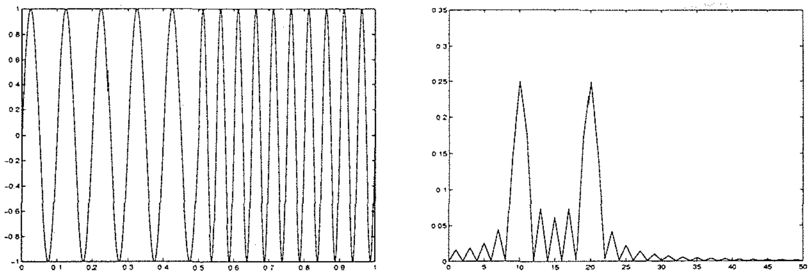
Iedere wiskundige heeft in zijn of haar opleiding geleerd wat bases van vectorruimten zijn. Door middel van een basis laat iedere vector in de vectorruimte (zo'n vector kan een functie, een geluidssignaal maar ook een beeld zijn) zich representeren door een rij van getallen. Deze getallen zijn de coëfficiënten in de ontwikkeling van die vector naar de gegeven basis. Bijvoorbeeld in onze bekende drie-dimensionale ruimte $\mathbf{R}^3$ bestaat een basis uit drie onafhankelijke vectoren, zeg $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ en iedere vector $\mathbf{x}$ is te schrijven als $x_1\,\mathbf{a} + x_2\,\mathbf{b} + x_3\,\mathbf{c}$ voor zekere reële getallen (de coëfficiënten) x_1, x_2 en x_3. De vector $\mathbf{x}$ is nu door de coëfficiënten x_1, x_2 en x_3 eenduidig bepaald.
De rij van coëfficiënten in een basisontwikkeling identificeert de vector volledig. Dit impliceert dat alles wat we van de vector willen weten op een of andere manier is opgeslagen in die coëfficiëntenrij. Nu kent een vectorruimte verschillende bases en voor het achterhalen van een bepaalde type informatie zal de ene basis beter zijn uitgerust dan een andere. Een mooi voorbeeld is de frequentie-analyse van signalen, waarbij we een signaal interpreteren als een functie gedefinieerd op een interval $[0, T]$ een deel van de tijd-as $-\infty < t < \infty$. De corresponderende vectorruimte is weliswaar oneindig dimensionaal. De Fourier-theorie levert een mooie bases, waardoor praktisch ieder signaal gezien kan worden als een som of superpositie van basissignalen van het type $\cos(\omega\,t + \varphi)$ met beginfase φ en een frequentie ω, die voor het interval $[0, T]$ een geheel veelvoud is van de grondfrequentie $\omega_0 = 2\,\pi/T$: $\omega = n\,\omega_0$, $(n = 0, 1, \ldots)$. Wat preciezer geformuleerd leert de Fourier-theorie ons dat een signaal f voor praktische alle t als een (oneindige) som kan worden geschreven:

$$f(t) = c_0 + A_1\,\cos(\omega_0\,t + \phi_0) + A_2\,\cos(2\,\omega_0\,t + \varphi_0) + \ldots .$$

Hierin is c_0 het gemiddelde van het signaal over het interval $[0, T]$ en $A_n \geq 0$ $(n \geq 1)$ de amplitude behorende bij de frequentie $n\,\omega_0$ ofwel $n\,\omega_0/(2\,\pi)$ Hertz (Hz).
Wanneer in een dergelijke ontwikkeling bijvoorbeeld de amplitude A_2 groot is vergeleken met de andere amplitudes, dan weten we dat in het signaal f de frequentie $2\,\omega_0$ domineert en misschien wel storend aanwezig is. Beschouw als voorbeeld het signaal

$$f(t) = \begin{cases} \sin(20\,\pi\,t) & 0 \leq t \leq 0.5, \\ \sin(40\,\pi\,t) & 0.5 < t \leq 1. \end{cases}$$

Van dit signaal is $c_0 = 0$. De grafiek van f en de amplitudes $A_1, \ldots, A_{50}$ zijn in Figuur 1 getekend.
In de grafiek van de amplitudes is de horizontale as de frequentie-as en verder zijn de amplitudes via rechte lijntjes verbonden. Deze lijntjes hebben verder geen betekenis. Aan de grafiek van het signaal ziet men dat in de eerste helft van het tijdsinterval $[0, 1]$ de frequentie van 10 Hz "voorkomt". en in de tweede helft een frequentie van 20 Hz. Uit de Fourier-ontwikkeling is het wel gemakkelijk af te lezen welke frequenties in een signaal voorkomen. Echter, niet op welke tijdsintervallen zich deze frequenties manifesteren. Om dit te kunnen vaststellen hebben we een andere basis nodig. Een geschikte basis daarvoor is een basis van wavelets.



FIGUUR 1. Grafiek van $f(t)$ en het amplitudespectrum

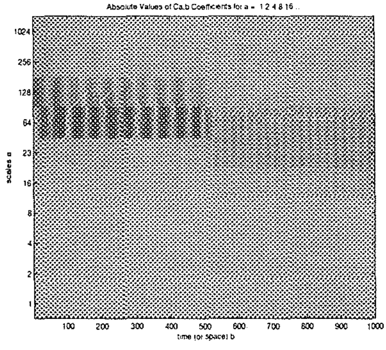
De Wavelet-theorie levert een nieuw type basissignalen, die aan onze wens tegemoet kan komen en die verder ook nog voor vele andere toepassingen geschikt is, zoals het onderdrukken van ruis in beeld en geluid en het comprimeren van data (beeldcompressie). Met wavelets kan men een signaal of een beeld lokaal op verschillende schaalniveaus inspecteren. Lokaal kunnen hoge frequentie worden opgespoord door wavelets met een fijne schaal. Wavelets zijn op een bijzondere manier opgebouwd. Om dit te illustreren beschouwen we signalen die op de gehele t- as ($-\infty < t < \infty$) zijn gedefinieerd. Men start met een geschikt signaal ψ, een zogenaamde moederwavelet, waaruit vervolgens de basissignalen $\psi_{n,j}$ worden geconstrueerd. Deze basissignalen worden beschreven door twee indices, een index j, ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), die naar een schaal verwijst en een index n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ die naar een plaats verwijst. De relatie met ψ ziet er als volgt uit.

$$\psi_{n,j}(t) = 2^{j/2}\, \psi(2^j\, t - n).$$

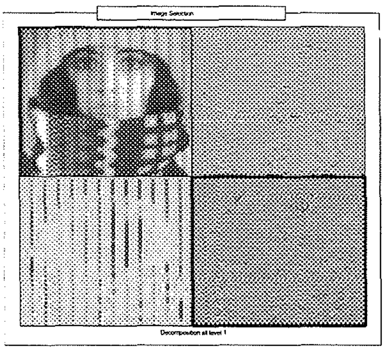
De wavelets $\psi_{j,n}$ zijn blijkbaar door een (dyadische dilatatie) $t \longrightarrow 2^j\, t$ en een translatie $t \rightarrow t - 2^{-j}\, n$ uit de moederwavelet ontstaan. Hoe groter de waarde van j hoe fijner de schaal. Een signaal f kan nu ontwikkeld worden naar de waveletbasis en omdat er sprake is van twee indices schrijven we deze ontwikkeling als volgt op.

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(t), \; f_j(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,j}\psi_{n,j}(t).$$

De coëfficiënten $a_{n,j}$ heten de waveletcoëfficiënten. Hieronder zijn de waveletcoëfficiënten van ons gegeven signaal in Figuur 1 in beeld gebracht als een grijswaardenplaatje.
De gebruikte wavelet is een zogenaamde Daubechies wavelet van de orde 3. In de afbeelding correspondeert een donkere grijstint met een in absolute waarde relatief grote waveletcoëfficiënt. In de verticale richting staan de schaalwaarden $a = 2^{-j}, j = 0, -1, -2, \dots, -8$ van fijn naar grof en in de horizontale richting de translatiestappen, die afgestemd zijn op het aantal samples (in ons geval 1000) op het tijdsinterval $[0, 1]$. Bij $j = 0$ is de staplengte 0.001 en bij algemene j is de lengte $2^j/1000$. Tijdens de vakantiecursus zullen we zien hoe we uit dit soort grijswaardenbeelden informatie over



FIGUUR 2. Grijswaardenplaatje van waveletcoëfficiënten



FIGUUR 3. Een jonge dame achter tralies

signalen kunnen destilleren. In ons voorbeeld is het nu al duidelijk dat de frequenties op de eerste helft en de tweede helft van het tijdsinterval duidelijk verschillen.
Beelden kunnen opgevat worden als functies van twee variabelen en ook hiervoor bestaan waveletbases, die nu door drie wavelets worden gegenereerd. Een wavelet voor het inspecteren van details in de horizontale richting, een wavelet voor de verticale richting en een wavelet voor de diagonale richting. In de afbeelding hierna is een jonge dame achter tralies geplaatst.
Met de klok mee zien we vervolgens een detailbeeld in de horizontale richting, de diagonale richting en de verticale richting. Het detailbeeld in de verticale richting bevat blijkbaar de tralies. Door de corresponderende wavelet coëficiënten op nul te zetten kan de jonge dame worden bevrijd. Men kan aantonen dat bij een geschikte keuze van moederwavelets vele waveletcoëfficiënten erg klein zijn. De bijbehorende wavelets kunnen dan zonder merkbaar kwalitieitsverlies uit het beeld worden weggelaten. Dit maakt wavelets geschikt voor beeldcompressie. In de cursus zullen een aantal voorbeelden worden getoond.

Een computerwerkplaats voor wiskunde

André Heck
Universiteit van Amsterdam

Het onderwijs ontgroeit het krijtje. De moderne leerkracht houdt zich meer bezig met het ontwerpen, voorbereiden en begeleiden van leeractiviteiten dan met de traditionele doceertaak. Frontaal lesgeven wordt niet langer meer gezien als de meest effectieve methode voor informatieverstrekking, kennisoverdracht en vaardigheidsontwikkeling. Zelfstandig en actief leren zijn de nieuwe sleutelbegrippen voor het leren in het studiehuis.

Voor wiskunde betekent ontdekkend leren dat leerlingen min of meer op eigen benen kleine onderzoekjes en praktische opdrachten uitvoeren. Leerlingen moeten zelf ideeën vormen, uitwerken en resultaten van hun werk presenteren. Ze verzamelen hiervoor informatie, overleggen met anderen, stellen een werkplan op, doen metingen, verwerken gegevens in tabellen en grafieken, stellen wiskundige modellen op, doen berekeningen, trekken conclusies, vatten hun werk samen, maken verslagen, enzovoorts. Kortom, de activiteit in het studiehuis is een afspiegeling van de professionele werkomgeving. Belangrijk argument is ook dat leerlingen meer leren door zelf actief bezig te zijn.

De actieve leerling heeft gereedschappen nodig voor het zelfstandig uitvoeren van werkzaamheden. Bij de natuurwetenschappen zijn dat bijvoorbeeld onderzoeksgereedschappen, bij techniek ontwerpgereedschappen en bij wiskunde faciliteiten voor rekenen, modelleren en simuleren. Steeds vaker wordt hiervoor gebruik gemaakt van informatie- en communicatietechnologie (ICT). Zo wordt op vrijwel elke school de aan de Universiteit van Amsterdam ontwikkelde digitale leeromgeving COACH gebruikt om ICT-vaardigheden bij natuurkunde, scheikunde, biologie, ANW en techniek te realiseren. Bij wiskunde-onderwijs is in Nederland de grafische rekenmachine ingevoerd. Ook worden domein-specifieke pakketten zoals voor meetkunde, statistiek en dynamische systemen ingezet. Een visie op het gebruik van computeralgebra en andere wiskundige software is groeiende.

De tijd is rijp om concreet na te denken over één leeromgeving voor zowel wiskunde als de natuurwetenschappelijke vakken. Belangrijkste reden om een geïntegreerd pakket te maken ligt in het feit dat leerlingen te maken krijgen met slechts één leeromgeving. Hierdoor kunnen zij meer de samenhang tussen de vakken ervaren; het kan helpen de systeemscheiding tussen de vakken op te heffen en er kan een aanzienlijke tijdsbesparing optreden door het gebruik van dezelfde gebruikersinterface. Voor de hand liggend is dat integratie met COACH wordt nagestreefd.

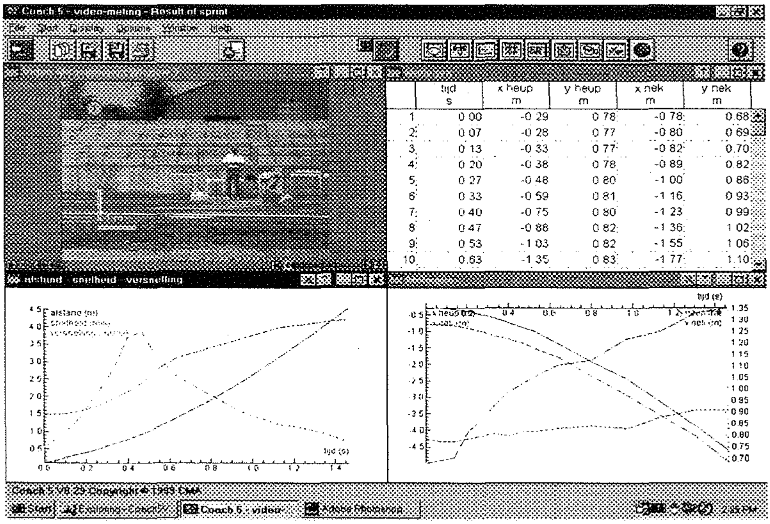
In deze presentatie geven we een overzicht van recente ontwikkelingen op dit gebied. We laten zien wat nu al op school bij de wiskunde mogelijk is met de nieuwste versie van COACH. Twee concrete mogelijkheden voor leerlingen in bovenbouw bij het uitvoeren van praktische opdrachten en het maken van een profielwerkstuk krijgen speciale aandacht:

– Werken met reële gegevens afkomstig uit videoclips.

  In plaats van echt meten met sensoren of ophalen van gegevens van Internet kunnen data ook uit een digitaal filmpje verkregen worden. Met de muis worden coördinaten van punten, afstanden en hoeken op een videoclip bepaald. Deze gegevens kunnen dan net als data uit een echt experiment verwerkt en geanalyseerd worden. Onderstaande figuur is een schermafbeelding van een videometing en analyse van de start van een sprintster.

– Modelleren en simuleren van dynamische systemen m.b.v. de computer.

Met concrete voorbeelden van de nieuwste versie van COACH hopen we een beeld te scheppen dat ICT wiskunde dan wel niet gemakkelijker maakt, maar wel veel aantrekkelijker, spannender en inzichtelijker. Formules, functies en grafieken zijn geen abstracte en gekunstelde noties bij wiskunde meer, maar ze worden concreet voor leerlingen en kunnen aan hun eigen leefomgeving gekoppeld worden in uitdagende activiteiten.

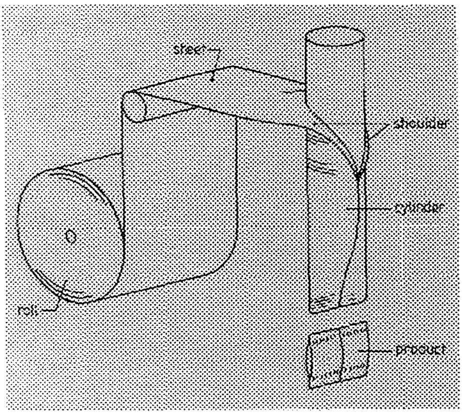


FIGUUR 1. Meting en analyse van de start van een sprintster

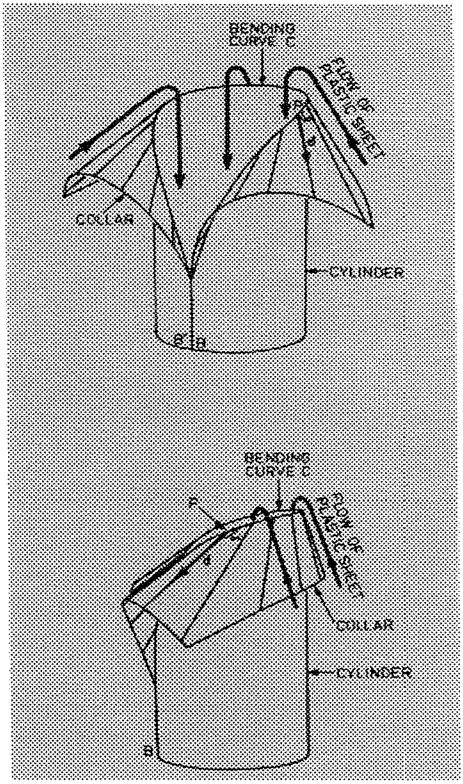
Wiskunde werkt!

Jaap Molenaar
Technische Universiteit Eindhoven

In de industrie wordt erg veel wiskunde toegepast maar zelden wordt dat zichtbaar. De vragen die men stelt zijn uiteraard niet puur wiskundig, maar komen voort uit de toepassing. Om zulke vragen te beantwoorden wordt op de een of andere manier de taal van de wiskunde gebruikt; deftig gezegd, er komt een wiskundig model aan te pas waarvan de oplossingen berekend worden met wiskundige technieken. Dit hele proces noemt men 'industriële wiskunde': wiskunde gebruikt in een industriële toepassing. Het speciale ervan is niet de wiskunde zelf, maar de manier waarop er mee wordt omgegaan. Het is een uiterst toepassingsgerichte houding waarbij op een concrete vraag een concreet antwoord moet komen. Hierin onderscheidt de 'industriële wiskunde' zich zeker van de 'pure" en 'toegepaste wiskunde". In deze twee laatste manieren van omgaan met de wiskunde staat de wiskunde zelf centraal en niet de toepassing. Waarschijnlijk staat industriële wiskunde dicht bij veel leerlingen, waarvan velen zich bij wiskunde voortdurend afvragen: waarom doe ik dit en wat moet ik ermee? Het is goed als ze dan gaan beseffen dat onze maatschappij sterk gemathematiseerd is, al zie je dat niet steeds in de krant.



In deze voordracht filosofeer ik eerst wat over industriële wiskunde in het algemeen. Ik vertel ook over het initiatief van de 'Studiegroep Wiskunde met de Industrie'. Tijdens zo'n studiegroep werken (meest academische) wiskundigen gedurende een week in groepen aan open problemen die vanuit de industrie zijn aangereikt. Aan het begin van de week wordt het probleem met de veelal nogal diffuse bedrijfsinformatie op tafel gegooid; aan het eind van de week is er vaak een opvallend goed gestructureerd model klaar en soms al een begin van een analyse daarvan. Wereldwijd draaien de studiegroepen al ongeveer 30 jaar; in Nederland is de traditie nu twee jaar oud.



De voordracht wordt afgerond met het presenteren van (waarschijnlijk) twee voorbeelden. Ik denk daarvoor aan het ontwerpen van schouders in de verpakkingsindustrie, waarbij het erom gaat een oppervlak te construeren met heel speciale eigenschappen (zie de figuur), en aan het kleurenmengprobleem, waarbij de vraag is een aantal basisverven zo te mengen dat een voorgeschreven kleur heel goed benaderd wordt.

Computers: ook voor de wiskunde zelf

N.G. de Bruijn
Technische Universiteit Eindhoven

Iedereen gebruikt tegenwoordig computers, dus wiskundigen doen dat ook. Ze gebruiken computers voor het samenstellen van teksten, het zoeken in teksten, zoeken naar teksten en naar allerlei gegevens in het WorldWideWeb. Ze gebruiken ze voor hun correspondentie, meestal via email, en voor het archiveren daarvan. Dat alles verschilt niet zoveel van wat andere mensen er voor hun werk mee doen.

Alleen moet gezegd worden dat de wiskundige aan een tekstverwerker andere eisen stelt dan de doorsnee gebruiker. Het wiskundige formulewerk, voorheen uitgevoerd door gespecializeerde handzetters, wordt nu geproduceerd door grote computerprogramma's, waarvan de uit TEX afgeleide tegenwoordig de belangrijkste zijn. De gebruiker ziet ze als tweetraps tekstverwerkers. In de eerste trap wordt met een gewone tekstverwerker een brontekst gemaakt waarin de tekst gelardeerd is met wat TEX idioom. Het TEX programma transformeert die brontekst in drukwerk dat op de monitor te lezen is en op papier kan worden afgedrukt, in een kwaliteit die vroeger alleen door de allerbeste drukkers kon worden geleverd.

Dit gaat allemaal zó gemakkelijk, dat de wiskundige het overal gebruikt waar maar even iets moet worden vastgelegd. Zonder geknoei en met groot gemak kunnen allerlei wijzigingen worden aangebracht. Deze systemen zijn zelfs te gebruiken voor dingen die vroeger alleen op kladpapier plaats vonden.

Dit alles is computerwerk ten bate van de wiskundige, maar het is nog geen wiskundig werk. Toch kunnen computers dat laatste ook, want daar is het immers allemaal mee begonnen. Oorspronkelijk waren het rekenmachines (het woord "computer" betekende niet de machine maar de menselijke rekenaar) die voor rekenwerk werden gebruikt door wat men in ruime zin toegepast wiskundigen zou kunnen noemen.

De zuiver wiskundige had er niet zo veel mee te maken. Die had altijd succes geboekt door erin te slagen het rekenen te vermijden, zoals het schooljongetje K.F. Gauss al deed toen hij de getallen van 1 tot 100 bij elkaar moest tellen. De wiskundige geniet daarvan. Met het uitvoeren van 'mechanische' procedures is nooit veel eer te behalen.

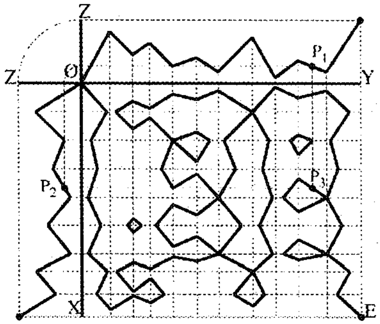
Na de opkomst van de programmeerbare rekenmachine kreeg het simpele rekenwerk vleugels, waardoor men zich met zaken kon gaan bezighouden waar vroeger niet over viel te dromen. De hele wereld profiteerde ervan, maar de wiskunde zelf eigenlijk niet zo erg veel. Het grootste profijt is misschien dat de wiskunde uitgroeit en uitbloeit zodra er wat van wordt toegepast. We zien dat bijna overal, ook in wat hier in deze cursus wordt aangeboden. Maar die wiskundige productie, bedoeld als toelevering voor toepassingen die (meestal met behulp van computers) aan de buitenwereld ten goede komen, wordt zelf doorgaans weer geheel op traditionele wijze zonder computers bedreven.

Echt computerwerk (dus afgezien van tekstverwerking) ten bate van de wiskunde zelf treedt wat minder in het daglicht. In de voordracht zal er het een en ander over worden verteld.

Soms levert de computer resultaten die direct worden gebruikt en soms produceert hij materiaal op grond waarvan vermoedens kunnen worden opgesteld die daarna met traditionele methoden worden bewezen.

Soms doet de wiskundige dit met kant-en-klaar programmapakketten in hapklare brokken, soms zal de wiskundige eigen programmatuur ontwikkelen aan de hand van de vragen die in het onderzoek opkomen.

Natuurlijk hoeft men niet alleen aan *onderzoek* te denken. Ook voor het *onderwijs* is er veel te beleven. In de voordracht zal een voorbeeld tentoongespreid worden waarbij de mens en de computer zowat gelijk op gaan: Natuurlijke deductie met "vlagvertoon". Het gaat niet om de resultaten, maar om de methoden. Soms is de mens handiger, maar de computer is sneller en levert mooi gedocumenteerd werk af.



Als voorproefje, van geheel andere aard, komt hier een geval waarin een computer is gebruikt bij een stuk beschrijvende meetkunde, toegepast op een probleem waarbij men dat niet direct zou verwachten.

Eigenlijk is het jammer dat er tegenwoordig nog maar zo weinig aandacht aan beschrijvende meetkunde wordt besteed, want de leer van de meetkundige constructies (en dat geldt al voor die van de Grieken) is de moeder van het gestructureerd programmeren. Constructies zijn programma's, constructies van simpele zaken zijn *subroutines* die men later kan gebruiken bij meer complexe aangelegenheden, en zo gaat dat door. Ook het *correctheidsbewijs* is uit de oudheid: het bewijs dat de constructies inderdaad objecten met de gewenste eigenschap opleveren.

Het hier te beschouwen probleem gaat uit van twee bergpaden die van een niveau 0 naar een hoger gelegen niveau 1 leiden. De paden liggen, afgezien van begin- en eindpunten, geheel tussen deze twee niveaus. Gevraagd wordt om in een zeker tijdsinterval op elk van deze paden een punt continu te laten lopen, beginnend op niveau 0 en eindigend op niveau 1, en wel zó dat op elk moment de twee punten op dezelfde hoogte liggen. Als beide paden monotoon stijgen is dit heel gemakkelijk, maar wanneer er oneindig veel lokale maxima en minima mogen zijn is de oplosbaarheid niet gegarandeerd. We bekijken nu alleen het geval dat er maar eindig veel maxima en minima zijn, en beperken ons tot stuksgewijs lineaire paden.

We kiezen een orthogonaal assenkruis $OXYZ$ in de ruimte en nemen de paden respectievelijk in de vlakken OXZ en OYZ. Het vlak OXY wordt als grondvlak genomen, en de hoogte van een punt in de ruimte is de z-coordinaat van dat punt. Het vlak OXZ wordt om de lijn OX neergeslagen in het grondvlak, het vlak OYZ om de lijn OY.

We stellen ons een *dak* voor dat ontstaat als we door elk punt van het eerste pad een lijn evenwijdig aan OY trekken, en een tweede dak dat we krijgen wanneer we door elk punt van het tweede pad een lijn evenwijdig aan OX nemen. De doorsnede van de twee daken bestaat precies uit die punten waarvan de projecties (op OXZ resp. OYZ) op gelijk niveau op de paden liggen.

In de figuur is de horizontale projectie van de doorsnede getekend, geconstrueerd met de methoden van de beschrijvende meetkunde (hoewel niet alle constructielijnen in de figuur zijn aangegeven). Wanneer men in die projectie een weg van O (corresponderend met het laagste punt) naar E (corresponderend met het hoogste punt) aangeeft, heeft men een oplossing van het gestelde probleem.

De tekening is gemaakt met behulp van een computerprogramma (in Postscript) waarbij de hoogten van de opeenvolgende maxima en minima als invoer zijn geleverd. Men kan met die invoergegevens spelen om tot een interessante figuur te komen.

Overigens kan het bewijs dat er altijd een weg van O naar E is, geleverd worden met behulp van de beroemde stelling van Euler die zegt dat wanneer in een eindige graaf elk punt een even aantal uitgangen heeft, de graaf in een aantal kringen kan worden opgesplitst.

Elliptische krommen en cryptografie

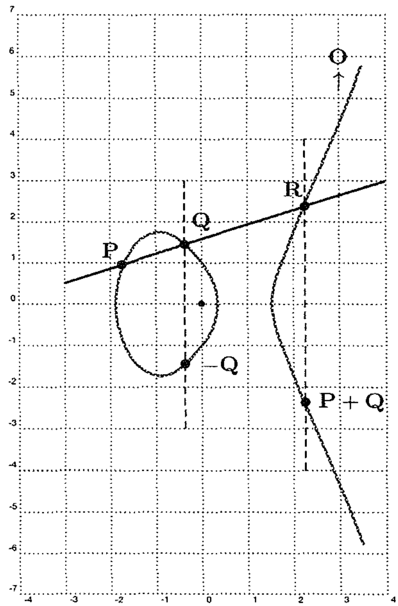
M.J. Coster
W.W.J. Hulsbergen
Ministerie van Defensie

Toen in 1977 R. Rivest, A. Shamir en L. Adleman hun cryptografisch protocol, sindsdien bekend als RSA, lanceerden, betekende dit een revolutie in de cryptografie. RSA is een voorbeeld van Public Key Cryptography (PKC). Het principe van RSA is gebaseerd op het feit dat vermenigvuldiging van twee grote (priem)getallen eenvoudig is uit te voeren, maar omgekeerd, dat het ontbinden van een groot getal dat het product is van twee (zorgvuldig gekozen) priemgetallen in die priemfactoren, zelfs op grote computers, een ondoenlijk probleem oplevert. Met de voortschrijdende capaciteit van computers is het begrip 'groot' wel aan verandering onderhevig, maar het is nog maar zeer kort geleden dat men erin geslaagd is een getal van 512 bits, zgn. RSA-512, te 'kraken'. Door de getallen in het RSA protocol groter te nemen, bv. 1024 bits, kan men voorlopig nog veilig een boodschap over het Internet versturen, maar dit heeft wel het bezwaarlijke gevolg dat RSA trager wordt.

Reeds vanaf het begin van RSA was duidelijk dat het ten opzichte van traditionele Secret Key Cryptography (SKC) traag was. RSA is evenwel zeer geschikt om in combinatie met traditionele methodes gebruikt te worden, bv. voor het uitwisselen van de sleutel van het traditionele cryptosysteem waarin de eigenlijke boodschappen worden uitgewisseld. Aan W. Diffie en M. Hellman komt de eer toe reeds in 1976 een methode te hebben bedacht waarmee dit elegant aangepakt kan worden. Deze methode is gebaseerd op het probleem van de discrete logaritme, d.w.z. enerzijds kan men voor gegeven 'grondtal' g en exponent x gemakkelijk g^x berekenen (in een groot eindig lichaam), maar anderzijds is de berekening van de exponent x als het grondtal g en de waarde g^x bekend zijn, ondoenlijk. De discrete logaritme kan ook worden toegepast voor digitale handtekeningen. Er heerst onder cryptologen het idee dat het 'kraken' van grote getallen en het 'berekenen' van de discrete logaritme, in vergelijkbare situaties, ongeveer even moeilijk zijn, maar dit is niet bewezen.

In 1984 kwam T. ElGamal met een public key cryptografisch protocol, dat gebaseerd is op de discrete logaritme (in een voldoende groot eindig lichaam). Dit protocol won snel populariteit.

Nauwelijks een jaar later stelden V. Miller en, onafhankelijk van hem, N. Koblitz een cryptografisch protocol voor dat op een equivalent van de discrete logaritme, die op elliptische krommen (gedefinieerd over een voldoende groot eindig lichaam), is gebaseerd. Elliptische krommen zijn al meer dan een eeuw zeer populair in de wiskunde vanwege hun intrigerende eigenschappen, zowel in de analyse als in de getallentheorie. Voor de cryptografie zijn ze interessant vanwege de groepstructuur, die tot een discreet logaritme probleem op de kromme aanleiding geeft. Men kan twee punten P en Q optellen als in onderstaand plaatje (voor de reële getallen):



In het bijzonder kan men een punt P een willekeurig aantal keren $n-1$ bij zichzelf optellen tot een punt $Q = nP$. Het discrete logaritme probleem wordt nu n te bepalen als P en Q bekend zijn.

De toepassing van elliptische krommen in de cryptografie is van recente datum en het zal nog enige jaren duren voor elliptische krommen even populair zullen zijn als RSA in de PKC, maar met de komst van krachtiger computers heeft men voor RSA steeds grotere sleutels nodig, terwijl die bij gebruik van elliptische krommen aanzienlijk kleiner kunnen blijven om dezelfde veiligheid te garanderen.

In de voordracht zal iets over elliptische krommen en de manier waarop men cryptografie met ze kan bedrijven, i.h.b. à la ElGamal, worden verteld.

Cursusgeld

Het cursusgeld bedraagt f 145,00 voor Eindhoven en voor Amsterdam waarbij de syllabus en de maaltijden zijn inbegrepen.

Aanmelding

Bij Simone van der Wolff per e-mail (Simone.van.der.Wolff@cwi.nl), via de website http://www.cwi.nl/conferences/VC2000/ of per post door het aanmeldings formulier achter in de brochure in te vullen en op te sturen naar:

Centrum voor Wiskunde en Informatica
t.a.v. Simone van der Wolff
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

Tegelijkertijd dient men het cursusgeld over te boeken naar bank rek.nr. 31.35.57.977 van de Stichting Wiskunde en Informatica Conferenties bij de RABObank te Amsterdam (gironummer van de bank is 187744) onder vermelding van uw naam en VC2000.

NB. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit.
Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar. Degene die daarop prijs stelt, gelieve dit bij aanmelding te laten weten door invulling en opzending van het formulier op pagina 26

Plaats

Amsterdam: CWI, Kruislaan 413, zaal Z011.
Eindhoven: Auditorium TU Eindhoven, Den Dolech, zaal 7.

Syllabus

De syllabus zal worden uitgereikt bij aankomst op de cursus.

Informatie

Voor nadere informatie over de Vakantiecursus kunt u zich wenden tot Simone van der Wolff, tel. 020 – 592 4009, e-mail: Simone.van.der.Wolff@cwi.nl

Medewerkers

Prof.dr. N.G. de Bruijn (TUE)
Eikenlaan 2, 5671 AB Nuenen, n.g.d.bruijn@tue.nl

Dr. M. Coster (Ministerie van Defensie)
Wielingenstraat 24^{r}, 1078 KL Amsterdam, matthijs@coster.demon.nl

Prof.dr. J. van de Craats
KMA, Postbus 90154, 4800 RG Breda, tel. 076-5273816, jcr@euronet.nl

Drs. A. Heck (UvA)
Amstel Instituut, Kruislaan 404, 1098 SM Amsterdam, heck@wins.uva.nl

Dr. W.W.J. Hulsbergen (Ministerie van Defensie)
Engelandlaan 408, 2034 NN Haarlem, hulsw@wxs.nl

Prof.dr. J. Molenaar (TUE, UT)
Technische Universiteit Eindhoven, Faculteit Wiskunde en Informatica – IWDE,
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven, jaapm@win.tue.nl

Dr. H.G. ter Morsche (TUE)
Technische Universiteit Eindhoven, Faculteit Wiskunde en Informatica,
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven, H.G.termorsche@tue.nl

Dr. H.J.M. Sterk (TUE)
Technische Universiteit Eindhoven, Faculteit Wiskunde en Informatica,
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven, sterk@win.tue.nl

Contacten Centrum voor Wiskunde en Informatica

Dr. M. Bakker
Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079,
1090 GB Amsterdam, 020 – 592 4172, Miente.Bakker@cwi.nl

Simone van der Wolff
Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079,
1090 GB Amsterdam, 020 – 592 4009, Simone.van.der.Wolff@cwi.nl

Routebeschrijving

Technische Universiteit Eindhoven – Auditorium

Met openbaar vervoer:

- Alle universiteitsgebouwen liggen vlakbij het NS-station Eindhoven. U gaat de perrontrap af, dan rechtsaf en via de uitgang aan de noordzijde naar het busstation. U ziet de universiteitsgebouwen schuin rechts liggen op enkele minuten loopafstand. Op het TUE-terrein borden volgen naar "Auditorium."

Met de auto:

- U rijdt Eindhoven binnen richting Centrum. Borden "Technische Universiteit" volgen. U komt dan op de campus. Hier volgt u de borden "Auditorium."

CWI

Met openbaar vervoer:

- Vanaf station Amsterdam-Amstel: bus 67 naar het WCW-Amsterdam Science Park. NB: Bus 67 rijdt niet op zaterdag!
- Vanaf station Amsterdam-Centraal: een stoptrein of metro naar Amsterdam-Amstel. Vandaar: zie hierboven. Een alternatief is tram 9 naar het kruispunt Middenweg-Kruislaan en vandaar lopend over de Kruislaan naar het WCW (ongeveer 1 km.)
- Vanaf station Amsterdam-Muiderpoort: lopend via de Insulindeweg en de Molukkenstraat en dan over de brug linksaf de Oosterringdijk op. U ziet dan aan de rechterkant het WCW terrein liggen.

Met de auto:

- Alle autowegen naar Amsterdam komen uit op de rondweg rond Amsterdam: de ring (A10).
  Wanneer u uit de richting Amersfoort komt, neemt u de ring richting Utrecht/Den Haag.
  Wanneer u uit de richting Utrecht/Den Haag/Schiphol/Haarlem of Zaandam komt, neemt u de ring richting Amersfoort. Op de ring neemt u de afslag Watergraafsmeer/S113 (ring-oost). Aan het eind van de afrit volgt u de richting Science Park/Watergraafsmeer. U rijdt dan op de Middenweg. Bij de eerste kruising met stoplichten gaat u naar rechts: de Kruislaan. Na circa 1 km ligt het WCW/Amsterdam Science Park aan de linkerkant van de weg.

AANMELDINGSFORMULIER VAKANTIECURSUS 2000

Is wiskunde nog wel mensenwerk?

Ondergetekende,

Naam:

Functie:

Adres:

Postcode:

Woonplaats:

Telefoon:

wenst deel te nemen aan de Vakantiecursus 2000, die zal worden gehouden te

A. Eindhoven op vr. 25 en za. 26 augustus 2000 [ ]

B. Amsterdam op vr. 1 en za. 2 september 2000 [ ]

en heeft het verschuldigde bedrag (f 145,00 voor Eindhoven en voor Amsterdam) overgemaakt (voor rekeningnummers zie pag. 22).

Gelieve dit formulier vóór 15 augustus 2000 te sturen naar:

Centrum voor Wiskunde en Informatica
t.a.v. Simone van der Wolff
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

Degene die prijs stelt op een nascholingscertificaat wordt verzocht onderstaand formulier in te vullen, onder nauwkeurige vermelding van naam en voornamen (zonder afkortingen), geboortedatum en geboorteplaats.

NASCHOLINGSCERTIFICAAT
VAKANTIECURSUS 2000

Is wiskunde nog wel mensenwerk?

Naam:

Voornamen (zonder afkortingen):

Geboortedatum:

Geboorteplaats:

Gelieve dit formulier vóór 15 augustus 2000 te sturen naar:

Centrum voor Wiskunde en Informatica
t.a.v. Simone van der Wolff
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam