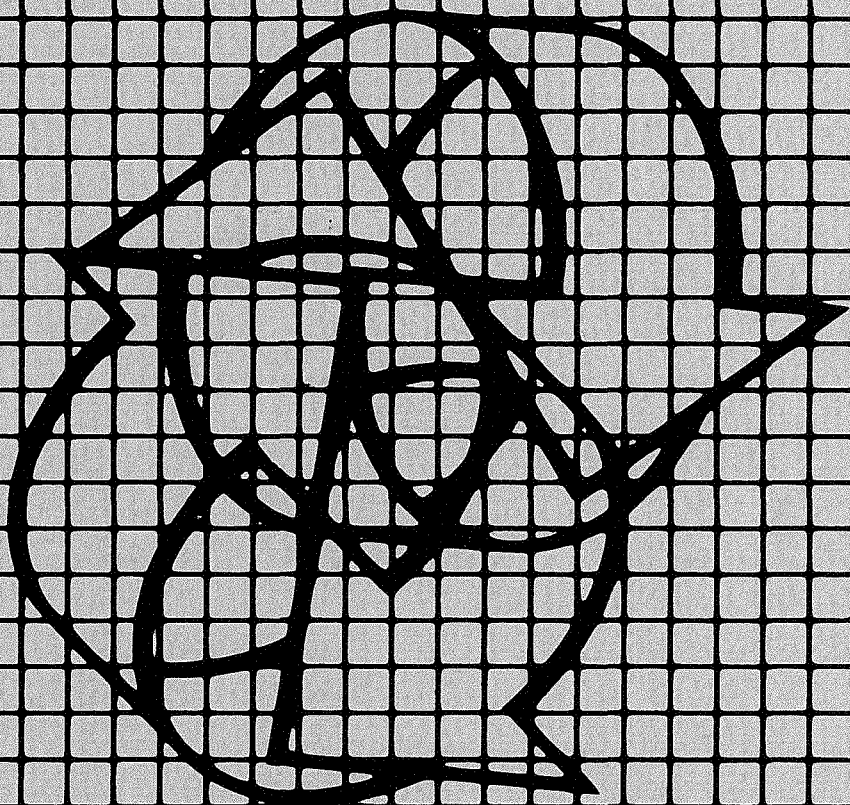
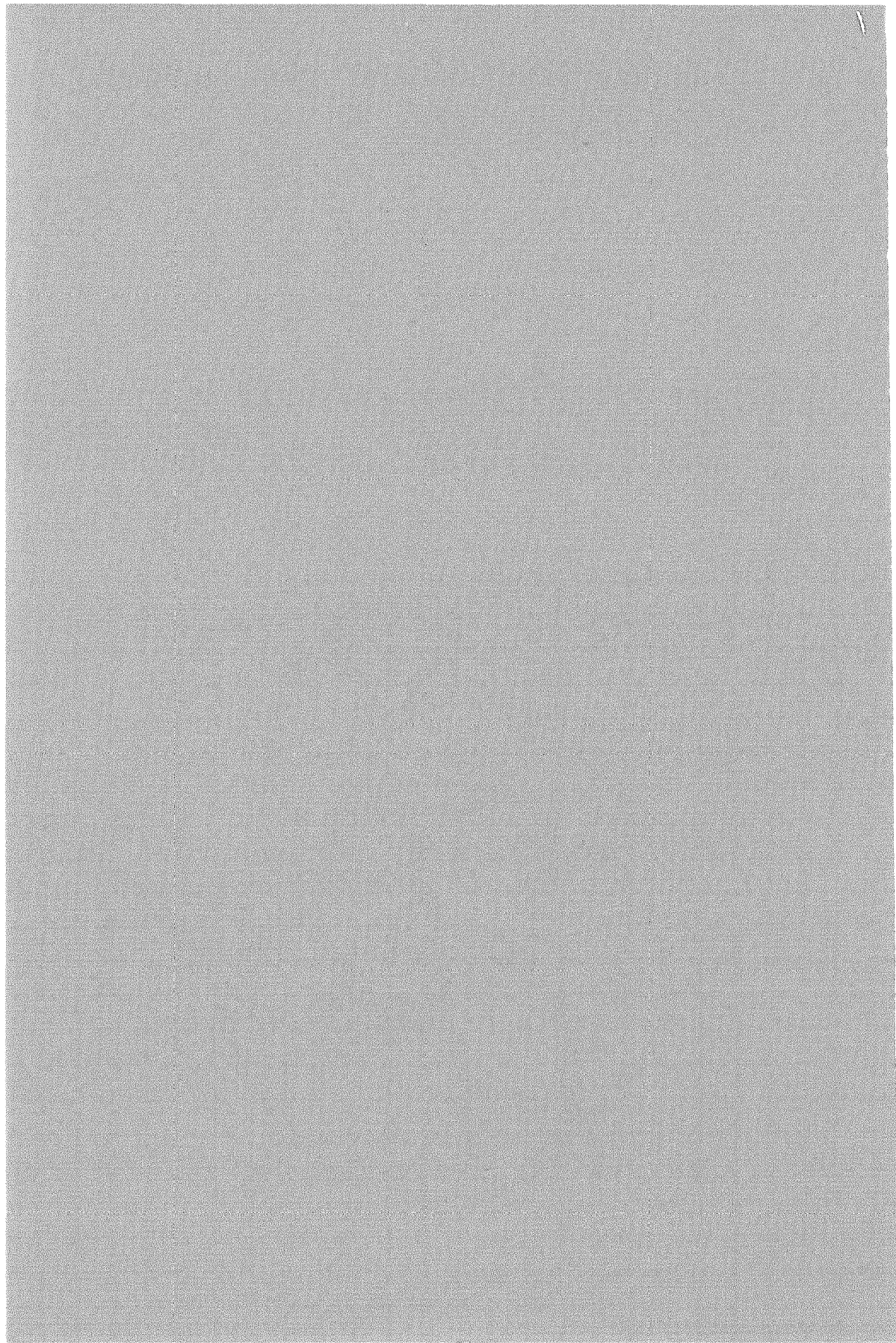


Stochastische processen



Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science





Stochastische processen

In vele problemen speelt onzekerheid een wezenlijke rol. De studie van wetmatigheden in onzekerheid, de waarschijnlijkheidsrekening, is daarom sinds de vijftiger jaren een belangrijke plaats gaan innemen in de wiskunde, enerzijds door de studie daarvan als zelfstandig onderwerp, anderzijds door een steeds ruimere verbreiding van de toepassing der kansrekening in andere vakgebieden in en buiten de wiskunde.

De kansrekening bestudeert een veelheid van kansmodellen en de statistiek ontwikkelt technieken voor selectie uit deze kansmodellen aan de hand van data. De twee vakgebieden zijn dus vanaf hun prille begin nauw verbonden geweest, waarbij in eerste instantie de statistiek dichter bij de toepassingen staat. De kansrekening wordt verder op het CWI op dit ogenblik ook toegepast bij de studie van wachtrijen in netwerken, bij de biomathemata, en bij de systeemtheorie. In al deze toepassingen gaat het om *stochastische processen*, dat wil zeggen om processen die onder de invloed van toeval zich in de tijd ontwikkelen.

Hieronder zullen we eerst moderne ontwikkelingen in de kansrekening schetsen. Daarna wordt deze schets nauwkeuriger uitgewerkt en worden mogelijke toekomstige ontwikkelingen aangegeven.

De meer klassieke kansrekening hield zich de afgelopen decennia bezig met de studie van een proces ξ_t van toevalsvariabelen, die in de tijd t veranderen. Daarenboven is vooral aandacht gegeven aan processen die de Markoveigenschap bezitten; dat wil zeggen op een gegeven tijdstip t is alleen de huidige toestand van het proces, dus de waarde van ξ_t , van invloed op de toekomstige ontwikkeling van het proces; het echte verleden (alle waarden van ξ_s voor $s < t$) is verder irrelevant. Een voorbeeld: beschouw het aantal ξ_t van wachtenden bij een (deterministisch) stoplicht op tijdstip t . Als men dit aantal ten tijde t (het heden) kent, dan doet het er verder niet meer toe voor de ontwikkeling in de toekomst van dit aantal hoe het aantal in het verleden tot stand kwam.

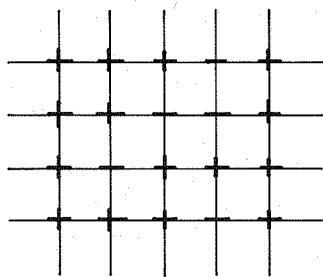
Deze klasse van processen, de Markov-processen, was echter in bepaalde opzichten betrekkelijk beperkt. In recente jaren is daarin veel veranderd, met name door invloed uit andere vakgebieden:

- (1) De statistische mechanica wierp problemen op ten aanzien van de ruimtelijke interactie van stochastische processen, met name van meerdimensionale oneindige roosters van stochastische variabelen.
- (2) In de theorie der dynamische systemen, met name in de ergodentheorie, zijn stationaire processen met nieuwe en veel rijkere typen afhankelijkheidsstructuur ontdekt dan de Markov- en de Gauss-processen die tot dan toe voornamelijk bestudeerd werden.
- (3) In meer klassieke richting is de ontwikkeling echter ook voortgegaan, zoals in de stochastische integratie. Deze wordt toegepast in systeemtheorie en in de theorie der diffusies. Ook andere toepassingen, zoals stochastische optimalisering, zijn tot bloei gekomen.

Bovenstaande punten worden nu nader uitgewerkt en mogelijke toekomstige ontwikkelingen worden aangeduid.

1. *Ruimtelijke interactie van stochastische processen*

Zoals boven werd opgemerkt, betrof veel van de kansrekening processen ξ_t , geïndiceerd door de tijd, dus door een eendimensionale onafhankelijke parameter. Pas recent worden belangrijke studies gewijd aan een meerdimensionaal rooster van stochastische variabelen, dit onder invloed onder meer van de statistische mechanica. Dit betekent een wezenlijke uitbreiding van de zojuist geschetste situatie. Eigenschappen van een bekend model in deze richting, het Isingmodel, kunnen als volgt worden geschetst. Op de punten van een uitgebreide rooster bevinden zich deeltjes met spin + of spin -, ofwel met twee mogelijke magnetisatierichtingen. De spin stelt zich in afhankelijk van zijn naaste burens én afhankelijk van het toeval. Deze laatste factor wint het bij hoge temperatuur: er is daar één stochastisch model. Beneden een bepaalde kritische temperatuur zijn er twee mogelijke modellen. Het ene komt tot stand als er een uitwendig magnetisch veld in de + richting wordt aangelegd en het andere als dit veld in de - richting wordt aangelegd.



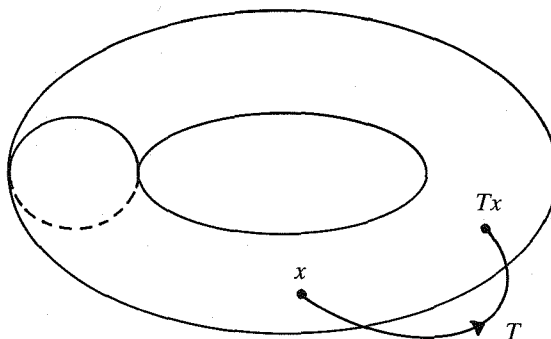
Een voorbeeld van een + richting veld.

Laten we ook noemen dat men een kritische parameterwaarde ook in andere problemen aantreft, zoals in een verkeersstroom waar boven een bepaalde verkeersintensiteit filevorming optreedt. Echter in zo'n eendimensionaal model is er veelal slechts één stationair kansmodel bij vaste parameterwaarde.

De Markoveigenschap is ééndimensionaal goed begrepen. Zijn meerdimensionaal analogon, het Markovveld, waarvan het Isingmodel een speciaal voorbeeld is, is een veel rijker onderwerp. Over de verschillende typen interactie in een spinmodel is nog veel onbekend. Hoewel dergelijke problematiek voor het eerst grondig bestudeerd is in de statistische mechanica zijn er buiten dat terrein ook veel toepassingsmogelijkheden. De interpretatie $+/-$ kan ook gegeven worden aan het gezond/ziek zijn van cellen of aan het wel/niet aanwezig zijn van een bepaalde eigenschap. Men wil tevens nog een dimensie toevoegen door de tijdsontwikkeling te bestuderen van zo'n spinflipsysteem, met bijvoorbeeld biologische interpretatie "verspreiding van ziekte". Zo is vorm en vormverandering van $+/-$ configuraties van belang. Samenvattend kan gezegd worden dat dit gebied een aantal wezenlijke nieuwe vraagstellingen opwerpt.

2. Stationaire processen en de plaats van de Markoveigenschap

Verwacht wordt dat ontdekkingen van recente jaren in de ergodentheorie een belangrijke invloed zullen hebben op het inzicht in stationaire processen. Deze ontwikkelingen raken sterk aan de fundamenteën van de kansrekening en wel aan het onderscheid tussen "deterministisch" en "zuiver stochastisch" (oftewel "puur toeval").



Stel dat een willekeurige punt x op een oppervlak (bijvoorbeeld een torus) wordt verplaatst volgens een geschikt gekozen voorbeeld. Laten we dit voorschrift T noemen. Het punt gaat dus van x naar Tx , en dan naar T^2x (dat wil zeggen T twee maal toegepast op x), dan naar T^3x , enzovoorts. (De naam "ergodentheorie" is afkomstig van het feit dat T "werkt" op x .) De baan van x is volledig deterministisch: als x bekend is dan zijn alle $T^n x$ ook bekend. We nemen nu aan dat de beginpositie x door het

toeval bepaald is, dat wil zeggen er is op het oppervlak een kansverdeling μ die de beginpositie omschrijft. We nemen aan dat deze beginverdeling zo mooi is dat ook Tx deze kansverdeling heeft; dat wil zeggen μ is T -invariant. Men heeft nu ontdekt dat een belangrijke klasse van dergelijke dynamische systemen isomorf zijn met de zogenaamde Bernoullisystemen, de meest stochastische systemen denkbaar (denk aan zoiets als een rij onafhankelijke worpen van een dobbelsteen). Men deelt daartoe op een bijzondere wijze het oppervlak in in een aantal genummerde delen (een partitie). Zij y_n het nummer van het deel waarin $T^n x$ zit. Deze bijzondere partitie heeft de eigenschap dat de hele rij (y_n) de plaats van x eenduidig vastlegt en tevens dat als het beginpunt x volgens de kansverdeling μ wordt getrokken, de rij (y_n) niet te onderscheiden is van een Bernoullirij.

Bij de studie ondernomen in verband met dit type resultaat is veel ontdekt over de mogelijke afhankelijkheidsstructuur in stationaire processen. Bij verschillende partitiekeuzen als boven kan een verscheidenheid van typen asymptotische onafhankelijkheid optreden. Veel processen die tot dusver in de kansrekening werden bestudeerd, hadden de Markoveigenschap. In het licht van bovenstaande lijkt dit een vrij speciale, hoewel natuurlijk ook belangrijke situatie. Men stelt zich daarom de vraag wanneer een stationair proces een Markovrepresentatie heeft. Een dergelijke representatieprobleem doet zich voor in een breed spectrum van toepassingen (bijvoorbeeld bij systeemtheorie). Speciaal is men geïnteresseerd in een zo eenvoudig mogelijke representatie. Men is vanzelfsprekend ook geïnteresseerd in situaties waar een dergelijke representatie niet mogelijk is: welke effecten heeft dit op schattingen gemaakt met behulp van een (onjuiste) Markovrepresentatie?

3. *Enige klassieke onderwerpen en hun toepassingen*

Dat de waarschijnlijkheidsrekening nieuwe richtingen inslaat betekent niet dat klassieke onderwerpen hun vroegere aantrekkingskracht verloren hebben. Integendeel: er wordt vanuit de statistiek en vanuit de systeemtheorie belangrijk nieuw gebruik gemaakt van de stochastische integratie en de theorie der diffusies. Ook vanuit biologische vraagstellingen wordt vruchtbaar gebruik gemaakt van de theorie van stochastische diffusieprocessen.

november 1983

Henry Berbee