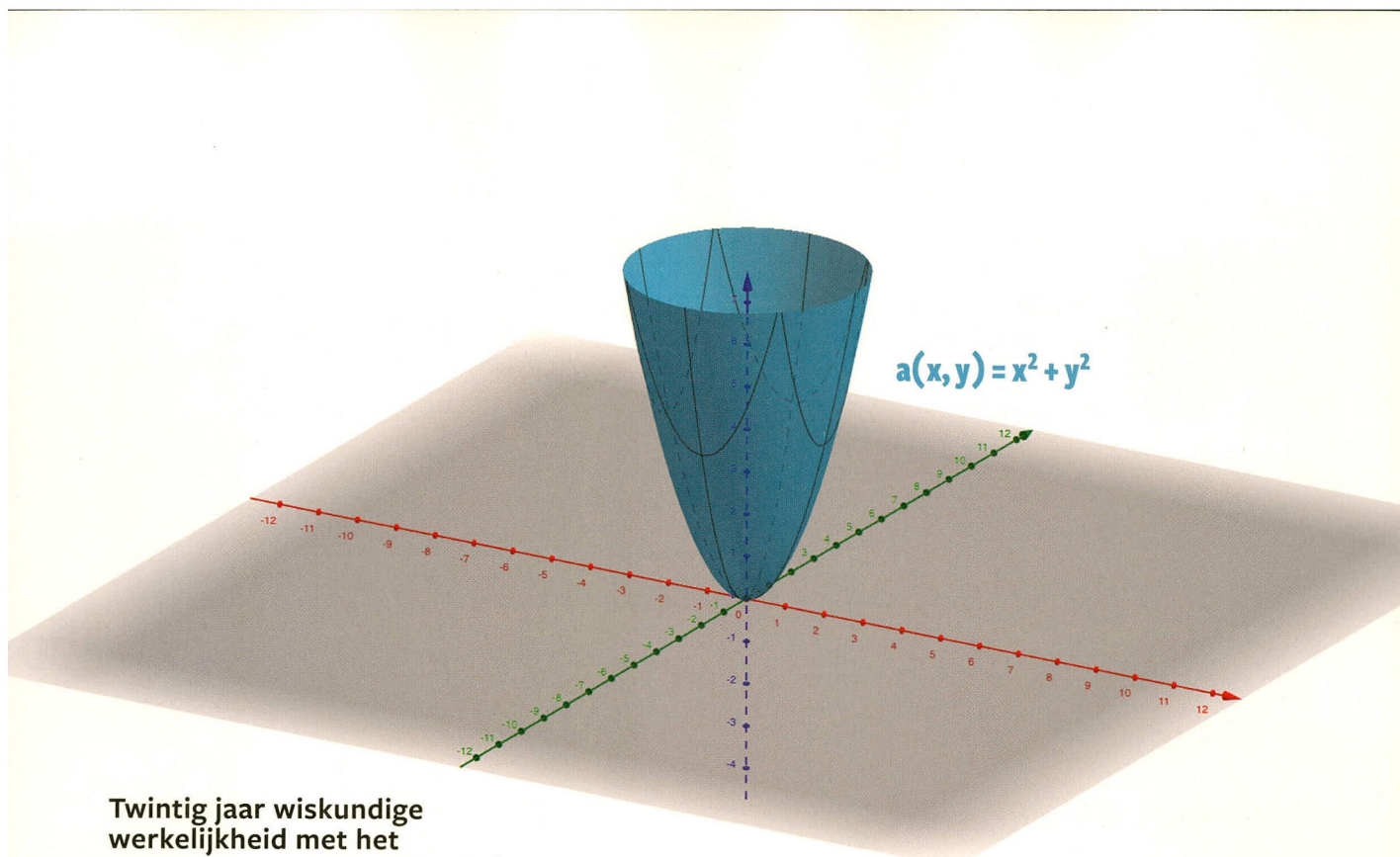




Twintig jaar wiskundige
werkelijkheid met het
computerprogramma GeoGebra

Abstractie in de dagelijkse wereld

Het gratis computerprogramma GeoGebra viert volgend jaar zijn twintigste verjaardag. *Eos* vroeg zes experts naar hun favoriete GeoGebra-tekening.

Dynamische meetkundige systemen waarbij je de punten en lijnen van wiskundige tekeningen kunt laten bewegen op het scherm, zonder de tekeningen telkens te herbeginnen. Van zulke software droomden vele studenten en docenten al jaren. Het was wachten op de Oostenrijker Markus Hohenwarter die de wiskundige kracht van Computer Algebra Systems benutte om het programma GeoGebra te ontwikkelen in 2001. De masterstudent wiskunde en informatica aan de Universiteit van Salzburg ging voort met de ontwikkeling van GeoGebra aan de Florida State en Florida Atlantic University, maar de software was en is nog altijd gratis.

GeoGebra werd volop gedeeld op het internet waardoor al snel een grote open source community ontstond. Samen met Hohenwarter richtte de Hongaar Zsolt Lavicza aan de School of Education van de Johannes Kepler Universiteit in het Oostenrijkse Linz het International GeoGebra Institute op. Dat ondersteunt docenten, studenten, software-ontwikkelaars en onderzoekers in het gebruik, de ontwikkeling en de vertaling van GeoGebra-projecten.

Aanvankelijk was er enig scepticisme van diehard wiskundigen, die bleven zweren bij hun eigen geliefde

computerprogramma. Zo is er Mathematica, ontwikkeld door Stephen Wolfram (Illinois, VS), dat over een batterij aan krachtige wiskundige formules beschikt. Of Maple, van de firma Waterloo Maple (Ontario, Canada), dat computeralgebra op een hoger niveau tilt. Voor het onderwijs is het doorslaggevend dat het educatief materiaal gratis op het GeoGebra-platform beschikbaar is. Er zijn workshops en projecten zodat het een veelzijdig hulpmiddel werd dat ook gebruikt wordt in veel STEM-vakken (Science, Technology, Engineering, Mathematics). De GeoGebra-gemeenschap strekt zich uit van de kleuterschool tot de universiteit en telt meer dan 100 miljoen gebruikers.

Met meer dan twee miljoen openbaar beschikbare bronnen ontwikkelt GeoGebra zich nog in vele nieuwe richtingen, zoals augmented reality, 3D-printing, online oefeningen-systemen en virtuele lessen. Het is geïntegreerd in honderden leerboeken en online leeromgevingen over de hele wereld. Sinds kort ontdekt ook de STEAM-gemeenschap (STEM + Art) het potentieel om wiskundige kunst te creëren. Breekt hiermee de wiskunde door in de kunstopleidingen?



**Dirk
Huylebrouck**

is verbonden aan de Faculteit Architectuur van de KU Leuven. Hij schreef onder meer *België + Wiskunde* en *Wiskunst*.



Zsolt Lavicza

University of Cambridge
Linz School of Education
Johannes Kepler University
Linz, Oostenrijk



WISKUNDIGE AUGMENTED REALITY

Wat zien we op uw favoriete GeoGebra-afbeelding?

‘Deze afbeelding maakten we samen met Ben Haas, een Luxemburgse promovendus aan de Linz School of Education. Ze stelt de bouw voor van een klein houten huisje met een zandbak in augmented reality. De GeoGebra 3D-Calculator laat toe de verschillende vormen te identificeren om de objecten te bouwen. Ze werd opgebouwd op een iPad en geverifieerd met de augmented reality-functie. Voor de juiste constructie moeten de eigenschappen van de vormen bekend zijn, de lijnsegmenten worden berekend en de constructies worden gemoduleerd.’

Waarom illustreert deze afbeelding voor u een deel van de wiskunde?

‘Ze illustreert de toepassing van de theorie van de Hongaarse wiskundige Zoltan Paul Dienes (1916-2014) die het gebruik van manipulatieve middelen benadrukte om te leiden tot abstractie. Je manipuleert coördinaten, lijnsegmenten, vormen en hun schaal, eerst in een concrete setting, dan abstract, om vervolgens terug te keren naar het concrete.’

Wat betekent zo’n afbeelding voor u persoonlijk?

‘Ze toont dat de wiskunde niet buiten het leven staat, maar er middenin. Ze laat toe onze omgeving te veranderen en vorm te geven. Je leert wiskundige vaardigheden en kennis toepassen op de leef-omgeving. Je wordt een maker en doener van de wiskunde, en niet alleen een bewonderaar ervan.’

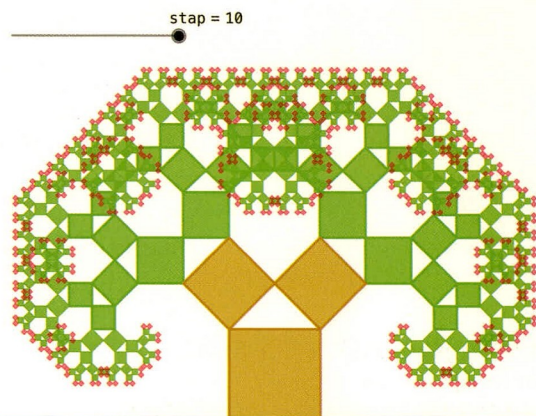
Hoe kijkt u terug op GeoGebra in de vele jaren dat u het gebruikte?

‘Het was fantastisch om de evolutie in het wiskundeonderwijs vanop de eerste rij mee te maken. Velen denken dat de wiskunde en het onderwijs ervan een onveranderlijk gegeven zijn, waarin je sinds mensenheugenis dezelfde formules moet opdreunen. Niets is minder waar, dat toonde GeoGebra. De toekomst is veelbelovend: augmented reality en *modeling* zullen we nog meer integreren, zelfs in het basisonderwijs.’



Els Coussement

Docent wiskunde in de educatieve
bachelor secundair onderwijs
Arteveldehogeschool Gent



PYTHAGORASBOOM

Wat zien we op uw favoriete GeoGebra-afbeelding?

‘Ze stelt een fractaal voor, bedacht rond 1942 door de Nederlandse wiskundeleraar Albert E. Bosman (1891-1961). Je start met een vierkant als stam voor de boom. Daarop plaats je twee kleinere vierkanten onder een hoek van 45 graden. Dezelfde procedure voer je daarna steeds opnieuw uit bij de nieuwe vierkanten. Na tien stappen, zoals op deze tekening, lijkt het resultaat al erg op een dwarsdoorsnede van een broccoli. Misschien had ze beter de Pythagorasbroccoli geheten?’

Waarom illustreert deze afbeelding voor u een deel van de wiskunde?

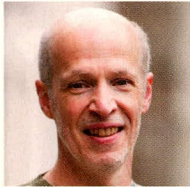
‘Fractalen prikkelen de nieuwsgierigheid. Bovendien heeft deze fractaal een rechtstreekse link met de stelling van Pythagoras, de meetkundige stelling die zowat iedereen kent.’

Wat betekent zo’n afbeelding voor u persoonlijk?

‘Deze zogenaamde ‘GeoGebra-applet’ toont mooi dat we veel meer mogelijkheden hebben dan vroeger om het wiskundeonderwijs aanschouwelijk te maken. De ‘slider’ (het latje linksboven) laat ook toe interactief bezig te zijn: verschuif hem naar links of rechts, en je krijgt minder of meer broccoli.’

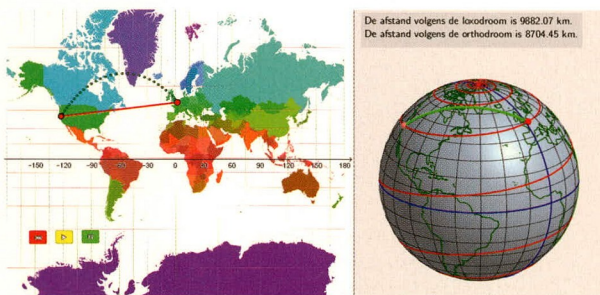
Hoe kijkt u terug op GeoGebra in de vele jaren dat u het al gebruikte?

‘Ik deed mijn eerste stappen in GeoGebra in 2006, maar toen gebruikte ik het programma alleen als tekenprogramma. Gaandeweg ontdekte ik de dynamische functionaliteiten van GeoGebra. Je kan tonen welke veranderingen een parameter teweegbrengt. GeoGebra is niet meer weg te denken uit het hedendaagse wiskundeonderwijs.’



Chris Cambré

Ingenieur-architect
Auteur van didactisch materiaal voor
GeoGebra
Webbeheerder wiskunde-interactief.be



DE KORTSTE WEG OP AARDE

Wat zien we op uw favoriete GeoGebra-afbeelding?

‘Ze illustreert waarom we in een vliegtuig vaak een andere route volgen dan de route die we zelf zouden voorstellen als je kijkt naar een gebruikelijke Mercatorkaart. Met GeoGebra kunnen we eenvoudig zelf de kortste weg vinden: het is een cirkel die door het middelpunt van de aarde loopt. Op de tekening zien we dat de kortste weg van Brussel naar Los Angeles niet volgens de rode rechte lijn op de Mercatorkaart loopt, maar volgens de groene grote cirkel. Het programma berekent meteen ook hun lengte: 9.895 kilometer in het eerste geval, 8.681 kilometer in het tweede.’

Waarom illustreert deze afbeelding voor u een deel van de wiskunde?

‘Zeevaarders kregen dankzij de wiskunde een fantastisch instrument om zich te oriënteren. De voorstelling van een bol op een plat vlak met behoud van hoeken en afstanden is onmogelijk. De zoektocht naar modellen voor de werkelijkheid, het leren lezen van die voorstellingen en de aanwending van de technische mogelijkheden illustreren waarvoor een deel van de wiskunde staat.’

Wat betekent zo'n afbeelding voor u persoonlijk?

‘Acht jaar geleden zag ik dat GeoGebra veel potentie had en ik wou meeschrijven aan zijn geschiedenis. Ik maak nu volop *applets* voor het onderwijs, soms inspelend op vragen van binnen of van buiten het wiskundeonderwijs. De voorgestelde tekening diende voor een masterproef aan de Hogere Zeevaartschool in Antwerpen. Ze toont hoe GeoGebra een gamechanger kan zijn om vakgebieden te overbruggen.’

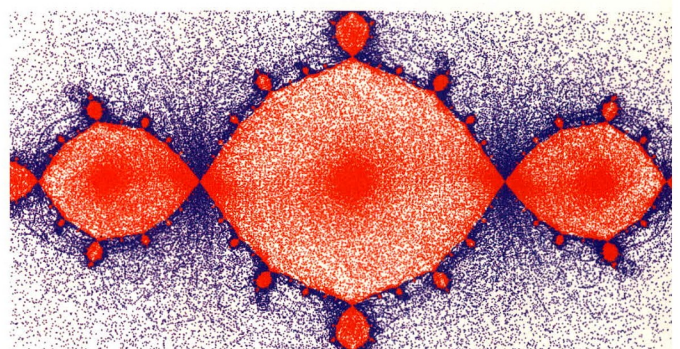
Hoe kijkt u terug op GeoGebra in de vele jaren dat u het gebruikte?

‘GeoGebra is uniek omdat de ontwerpers ervan niet gewoon hun software lanceerden, maar een allesomvattend project waarbij veel allerlei materiaal naar keuze kunnen vinden en delen, en elkaar ook op weg kunnen zetten. GeoGebra voelde steeds goed de nieuwe technologische evoluties aan en integreerde die onmiddellijk.’



Kees Temme

Docent wiskunde
Gemeentelijk Gymnasium van Hilversum
Ontwerper van de webklas Het
Mandelbrotmysterie



BASILIEK

Wat zien we op uw favoriete GeoGebra-afbeelding?

‘Het bijna pointillistische schilderij in rood en blauw stelt een Juliaverzameling voor. Ze lijkt een beetje op de San Marcobasiliek in Venetië, weerspiegeld in het water. De rode stippen in de afbeelding vormen de gevulde Juliaverzameling. De figuur is niet af, er zijn nog veel plaatsen rood en blauw te kleuren. Je verkrijgt ze door een willekeurig complex getal te kwadrateren en er een af te trekken, de uitkomst opnieuw te kwadrateren en er een af te trekken, en dan de uitkomst opnieuw te kwadrateren en er een af te trekken, enzovoort. Als na een aantal rekenstappen het tussenantwoord minder dan een vastgelegde grens is, kleur je de startwaarde rood, anders blauw.’

Waarom illustreert deze afbeelding voor u een deel van de wiskunde?

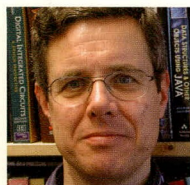
‘Het verkregen GeoGebra-beeld is rommeliger dan de strak geprogrammeerde plaatjes die je doorgaans van dit soort verzamelingen ziet, maar het is wel meer toegankelijk om dergelijke stoere wiskunde te illustreren.’

Wat betekent zo'n afbeelding voor u persoonlijk?

‘Ik zag ooit een afbeelding van een Mandelbrotverzameling, en begon een speurtocht door de zogenaamde complexe dynamica, met GeoGebra als trouwe metgezel.’

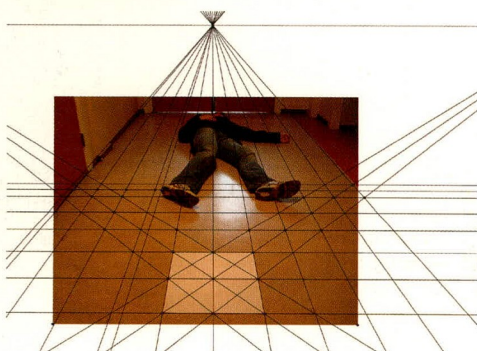
Hoe kijkt u terug op GeoGebra in de vele jaren dat u het gebruikte?

‘De wiskundige Alexander Schrijver (°1948) van het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam zei eens: ‘Wiskunde is als zuurstof. Als ze er is, merk je het niet. Als ze er niet is, merk je dat je niet zonder kan.’ Voor mij heeft GeoGebra inmiddels ook deze status van onnadrukkelijke maar onmisbare aanwezigheid.’



André Heck

Hoofddocent wiskunde en onderzoeker
in bètadidactiek
Korteweg-de Vries Instituut voor
Wiskunde
Universiteit van Amsterdam



WISKUNDIGE CSI

Wat zien we op uw favoriete GeoGebra-afbeelding?

'Leerlingen van GSG Schagen hebben deze afbeelding gemaakt in 2008. Hun foto toont een plaats delict van een in scène gezet misdrijf: een lijk in een gang. Ze legden er een perspectiefvierkant neer waarvan de werkelijke afmeting bekend is. Zo kan je de afstand tussen de hiel van het rechterbeen van het slachtoffer en de deur bepalen, hoewel je die achteraf niet meer met een liniaal kan meten. Door de uitbreiding en verfijning van het perspectiefvierkant tot de betegeling van een groter vloeroppervlak zijn nauwkeurige afstands-metingen op de foto mogelijk. De meetkundige aanpak blijkt uit de lijnen die de verdwijnpunten en de horizon bepalen.'

Waarom illustreert deze afbeelding voor u een deel van de wiskunde?

'Ze illustreert een toepassing van de wiskunde in forensisch onderzoek die teruggrijpt op de wiskunde van het perspectief zoals die in de renaissance ontwikkeld werd. Deze wiskunde is in computerprogramma's en op de smartphone ingebouwd zodat je digitale foto's kan bewerken en er metingen op kan doen. Projectieve meetkunde levert de broodnodige fundering van die methoden en technieken.'

Wat betekent zo'n afbeelding voor u persoonlijk?

'Ik schreef ooit het artikel 'Wiskundige CSI' in een vakblad voor wiskundeleraren, en dat werkte blijkbaar inspirerend. Wiskunde wordt spannend en leuk om te doen, want je beoefent haar het best door er actief mee bezig te zijn, waar mogelijk en noodzakelijk ondersteund door ICT-omgevingen zoals GeoGebra.'

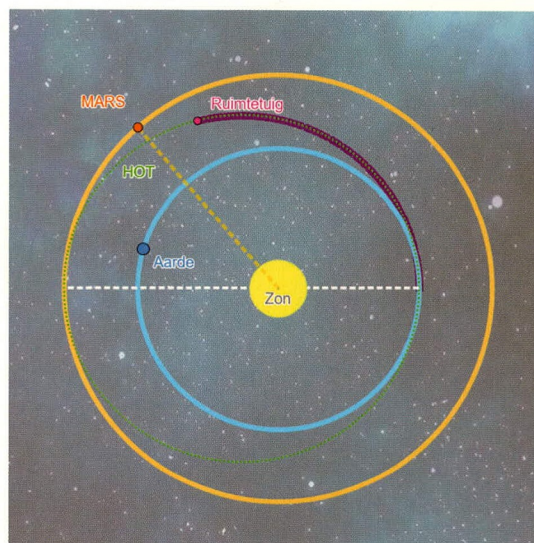
Hoe kijkt u terug op GeoGebra in de vele jaren dat u het gebruikte?

'Vanaf het begin was ik gefascineerd door de mogelijkheden van GeoGebra om de werkelijkheid binnen het wiskundeonderwijs te halen. Het was ook boeiend om de evolutie ervan mee te maken en steeds weer nieuwe mogelijkheden te ontdekken. Zo verken ik momenteel de inbedding van het systeem in een digitale leeromgeving. In één zin samengevat: 'nooit een saai moment met GeoGebra'.'



Ivan De Winne

Voorzitter Vlaamse Vereniging WiskundeLeraars VVWL.
Auteur lesmateriaal GeoGebra
Beheerder www.mathelo.net



DE HOHMANNBAAN

Wat zien we op uw favoriete GeoGebra-afbeelding?

'Deze afbeelding toont de ideale baan voor een reis van de aarde naar Mars. Slechts eens in de 26 maanden zijn de posities van de aarde en Mars optimaal om met een minimale hoeveelheid energie de eindbestemming te bereiken. De Duitser Walter Hohmann (1880-1945) berekende de route voor het eerst, in 1925.'

Waarom illustreert deze afbeelding voor u een deel van de wiskunde?

'Wiskunde en astronomie zijn van oudsher met elkaar verbonden. Bij de studie van de banen van planeten en ruimtetuigen komt de Griekse theorie van kegelsneden tot leven.'

Wat betekent zo'n afbeelding voor u persoonlijk?

'De afbeelding toont aan dat wiskunde naast haar vormende waarde ook nuttig is als ondersteuning van andere takken van de wetenschappen. Bovendien legt de afbeelding een verband met de geschiedenis van de wiskunde.'

Hoe kijkt u terug op GeoGebra in de vele jaren dat u het gebruikte?

'GeoGebra laat een interactieve aanpak van de wiskunde toe en een creatieve manier om de wiskunde te ontdekken. Dit vergroot de probleemoplossende vaardigheid, eigen aan de wiskunde. Bovendien is de GeoGebra-gebruiker lid van een wereldwijde community.' ■