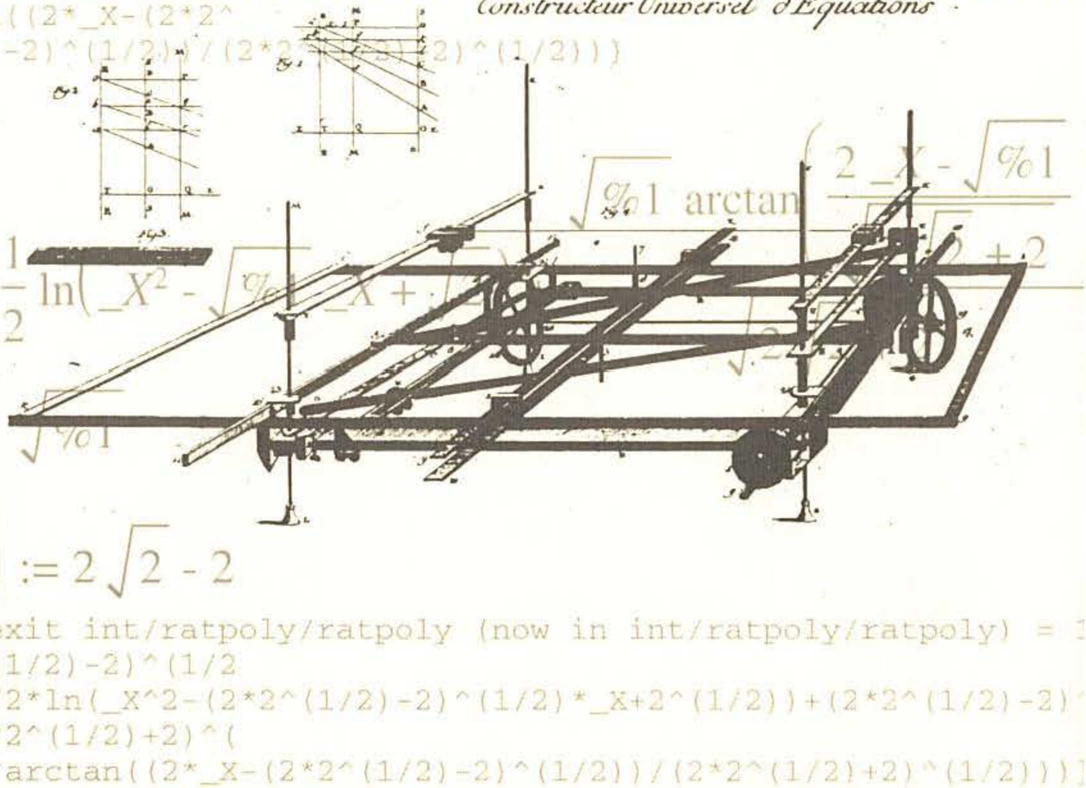
VAKANTIECURSUS 1994

COMPUTERALGEBRA

Constructeur Universel d'Equations



STICHTING MATHEMATISCH CENTRUM

Op de voorkant:
Een zogenaamde "vergelijkingen machine" uit de encyclopedie van Diderot en d'Alembert (1751-1772) tegen de achtergrond van computer output van een computeralgebra programma.

Vakantiecursus 1994

voor leraren in de exacte vakken VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden

De vakantiecursus die de Stichting Mathematisch Centrum in 1994 organiseert heeft als thema:

Computeralgebra

Het zal ook dit jaar een tweedaagse cursus zijn, die zowel in Eindhoven als in Amsterdam zal plaatsvinden. De cursus te Eindhoven wordt gehouden op donderdag 18 en vrijdag 19 augustus in het Rekencentrum van de Technische Universiteit, Den Dolech 2 te Eindhoven. In Eindhoven is er de gelegenheid om in de kantine te lunchen. De hieraan verbonden kosten dienen ter plaatse te worden voldaan.

De cursus te Amsterdam wordt gehouden op vrijdag 2 en zaterdag 3 september in het CWI, Kruislaan 413 te Amsterdam. Op vrijdag bestaat de mogelijkheid een warme maaltijd te gebruiken (f 20.-), terwijl op zaterdag de mogelijkheid bestaat te lunchen (f 15.-). Deze kosten dienen tezamen met het inschrijfgeld te worden voldaan.

Aanmelding voor deelname aan de cursus kan geschieden door het aanmeldingsformulier achterin deze brochure in te vullen en vóór 15 augustus op te sturen.

Ten geleide

Het onderwerp van de vacantiecursus 1994 lijkt een jonge loot aan de boom der kennis (van de wiskunde). Computeralgebra (ook bekend onder vele andere namen als algebraic manipulation, symbolic computation, computational mathematics etc. en hierna af te korten als CA) is als zodanig ontstaan in het begin van de zestiger jaren van onze eeuw toen Slagle het programma SAINT (Symbolic Automatic INTegration) schreef en heeft zich nadien in hoog tempo tot grote hoogte ontwikkeld.*

Na de ontwikkeling van een puur arithmetisch opererende computer lag het voor de hand dat men omzag naar de constructie van een machine die niet alleen numerieke problemen aankon, maar ook met letters, met symbolen kon opereren. Deze gedachte was echter reeds oud. Leibniz (1646-1716) die zelf al een eenvoudige rekenmachine costrueerde (omdat hij vond "dat voorname mensen niet het werk van slaven moesten doen"!) droomde al van een algoritmische taal, een "lingua characteristica" waarin alle wiskundige manipulaties konden worden uitgedrukt, een soort computeralgebra avant la lettre dus.

Hiermee is tevens een wezenlijk kenmerk genoemd van CA: het algoritmische karakter en de afwezigheid van ad hoc methoden zoals we straks duidelijk zullen zien bij de integratietheorie.

In deze cursus zal niet het programmeren centraal staan maar vooral de mathematische aspecten zullen ruimschoots aan de orde komen.

Uiteraard zal er echter eerst een overzicht gegeven worden van een aantal gangbare systemen waarvan enkele bekend zullen zijn (Maple, Derive, Mathematica). Deze taak is

*Voor een beknopt historisch overzicht zij verwezen naar:
1. J.H. Davenport, Y. Siret, E. Tournier; Computer Algebra, Academic Press, 1988.
2. K.O. Geddes, S.R. Czapor, G. Labahn; Algorithms for Computer Algebra, Kluwer Academic Publishers, 1992.

toebedeeld aan *Dr. van Gastel.*
Aan de hand van een tweetal eenvoudige voorbeelden zal *Prof. Simons* demonstreren dat men bij het oplossen van problemen via CA vaak een andere wiskundige aanpak verkiest dan zonder CA.
De lezing van *Dr. Atzema* illustreert de hulp die CA kan bieden bij het oplossen van problemen die in principe oplosbaar zijn, maar waarvan de daadwerkelijke oplossing practisch onuitvoerbaar is - nog afgezien van de kans op rekenfouten! Het gaat hierbij om het bepalen van de zg. kaustische krommen, welk probleem te herleiden is tot eliminatie, een gebied waarop de CA uitermate vruchtbaar is gebleken.
En passant zij hierbij nog gewezen op twee andere - in principe - opgeloste problemen waarvan de effectieve oplossing in vele gevallen practisch onmogelijk is: het bepalen van de GGD van twee polynomen met behulp van de Euclidische algoritme en het ontbinden van een polynoom.
Wat dit laatste betreft: er zijn voorbeelden van polynomen van de graad 63 - met 61 termen - en van de graad 146 - met 139 termen - waarvan de factorisatie met behulp van CA resp. 4 en 27 sec. kostte!
Op het uitvoeren van eliminatie gaat *Dr. Martens* nader in aan de hand van polynomiaalvergelijkingen en ook hier zal blijken dat men met CA de problemen vaak anders aanpakt dan "met de blote hand".
Het meetkundige aspect van CA komt aan de orde in de lezing van *Prof. Van der Blij.* Hierbij gaat het eerst om een speels probleem: het formeren van een ruimtekromme, opgebouwd uit "elleboogjes" die aan bepaalde eisen voldoet, waarbij ook hier weer de practische uitvoering in oude stijl spaak loopt.
Daarnaast is er een puur planimetrisch probleem dat verduidelijkt wordt met "computer graphics".
In het voorafgaande zijn al enkele belangrijke gebieden genoemd waarop CA voortreffelijke hulp kan bieden, maar er zijn er meer; één daarvan is het bepalen van primitieven en het beantwoorden van de vraag of een gegeven functie wel een primitieve "heeft" en vooral ook wat men daaronder moet verstaan. Het bepalen van primitieven kan wellicht de indruk geven van het toepassen van een stel - vrij willekeurige - "trucs", deftiger gezegd, van een heuristische werkwijze. Er bestaat echter een systematische theorie hiervoor en deze ligt ten grondslag aan de manier waarop de CA op dit punt te werk gaat. De basis voor deze theorie werd al gelegd in 1834 door Joseph Liouville (1809-1882) en deze culmineerde in het zg. Risch-algoritme (1969,1976).
Dit is het onderwerp van de voordracht van *Prof. Grootendorst.*

Traditiegetrouw is ook plaats ingeruimd voor zelfwerkzaamheid van de deelnemers. Niet in die zin dat zij achter een computerscherm worden geplaatst, maar wel in de zin dat hun bepaalde problemen worden voorgelegd waarvan zij een exacte oplossing moeten aangeven, daarbij tot de conclusie komend dat een effectief resultaat moeilijk is aan te geven. Daarna helpt CA hen verder.

In de loop van de geschiedenis is steeds weer gebleken dat iedere poging om geestelijke processen te ondersteunen, te vergemakkelijken of te versnellen d.m.v. hulpmiddelen van welke aard dan ook, altijd wel in bepaalde kringen op verzet stuitte.
Het oudste mij bekende voorbeeld ontleen ik aan de Phaedrus (274c) van Plato (427-347). Hier is de Egyptische koning Thamos in gesprek met de god Theuth, die de mensheid de getallen en de letters geschonken heeft. Wanneer Thamos te spreken komt over deze letters, heeft hij daarover een vernietigend oordeel en vaart aldus uit tegen Theuth: "U

hebt als vader van de letters uit voorliefde het tegendeel beweerd van wat het effect is. Want deze uitvinding zal bij de leerling eerder vergeetachtigheid bewerkstelligen, daar hij zijn geheugen verwaarloost omdat dit - in vertrouwen op het schrift - zich de dingen zal herinneren van buitenaf door middel van vreemde tekens, niet echter van binnenuit en direct".
Zo is er kritiek geweest op de boekdrukkunst, de schrijfmachine, de tekstverwerker, de zakrekenmachine, de computer etc. Naar mijn mening ten onrechte en misschien ook wel omdat velen zich daardoor iets ontnomen achtten en zich bedreigd voelden.
Toch blijft er een vraag over die van het grootste belang is: wat blijft er over voor docent en leerling? Of, beter geformuleerd: hoe wijzigen zich onze taken en hoe moeten wij hierop inspelen? Is hier inderdaad sprake van een "paard van Troje"?
Op deze fundamentele vraag zal *drs. Drijvers* ingaan en dan is de kring van de vacantiecursus op de juiste manier gesloten: eerst de introductie van een voor velen nieuw onderwerp, vervolgens belichting van de achtergronden daarvan, met interessante toepassingen en tenslotte de betekenis van het geheel voor de dagelijkse practijk van het onderwijs.
Het besluit van dit Ten Geleide kan niet anders zijn dan in voorgaande jaren: de voorbereidingscommissie hoopt op een grote opkomst, zowel van de "oude getrouwen" alsook van vele - even enthousiaste - nieuwelingen en wenst allen-deelnemers en sprekers - van harte twee boeiende dagen toe.

A.W. Grootendorst

Programma Eindhoven
18 en 19 augustus 1994

Donderdag 18 augustus

10.00-11.00	Ontvangst, koffie
11.00-11.05	Opening
11.05-11.45	Computer algebra systemen in de loop der tijd L. van Gastel, CAN Expertise Centrum, Amsterdam
11.45-12.15	Pauze
12.15-13.00	Gebruik van computeralgebra: twee voorbeelden F.H. Simons, TU Eindhoven
13.00-14.00	Lunch
14.00-14.45	Over de berekening van brandkrommen E.J. Atzema, CAN/RIACA, Amsterdam
14.45-15.15	Pauze
15.15-16.00	Achter de computeralgebra: het oplossen van polynoomvergelijkingen F.J.L. Martens, TU Eindhoven

Vrijdag 19 augustus

10.00-10.45	Rekenen met ellebogen; Computeralgebra in dienst van de meetkunde F. van der Blij, Bilthoven
10.45-11.15	Pauze
11.15-12.00	Prakticum onder leiding van E.J. Atzema, F.J.L. Martens, F.H. Simons
12.00-13.00	Lunch
13.00-13.45	Primitiveren door middel van elementaire functies A.W. Grootendorst, TU Delft
13.45-14.15	Pauze
14.15-15.00	Het paard van Troje; Computeralgebra in het voortgezet onderwijs P. Drijvers, Utrecht
15.00-15.05	Sluiting

Programma Amsterdam
2 en 3 september 1994

Vrijdag 2 september

15.00-15.30	Ontvangst, koffie
15.30-15.35	Opening
15.35-16.20	Computeralgebra-systemen in perspectief L. van Gastel, CAN Expertise Centrum, Amsterdam
16.20-16.45	Pauze
16.45-17.30	Gebruik van computeralgebra: twee voorbeelden F.H. Simons, TU Eindhoven
17.30-18.30	Warme maaltijd
18.30-19.15	Over de berekening van brandkrommen E.J. Atzema, CAN/RIACA, Amsterdam
19.15-19.45	Pauze
19.45-20.30	Achter de computeralgebra: het oplossen van polynoom vergelijkingen F.J.L. Martens, TU Eindhoven

Zaterdag 3 september

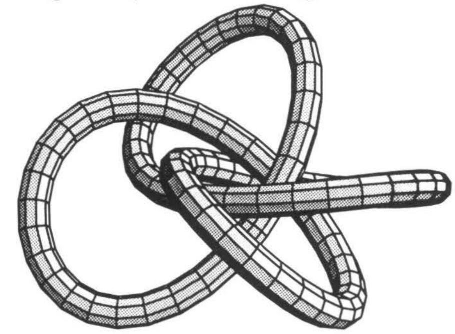
10.00-10.45	Rekenen met ellebogen; Computeralgebra in dienst van de meetkunde F. van der Blij, Bilthoven
10.45-11.15	Pauze
11.15-12.00	Prakticum onderleiding van E.J. Atzema, F.J.L. Martens, F.H. Simons
12.00-13.00	Lunch
13.00-13.45	Primitiveren door middel van elementaire functies A.W. Grootendorst, TU Delft
13.45-14.15	Pauze
14.15-15.00	Het paard van Troje; Computeralgebra in het voortgezet onderwijs P. Drijvers, Nijmegen
15.00-15.05	Sluiting

Computeralgebra-systemen in perspectief

Leendert van Gastel

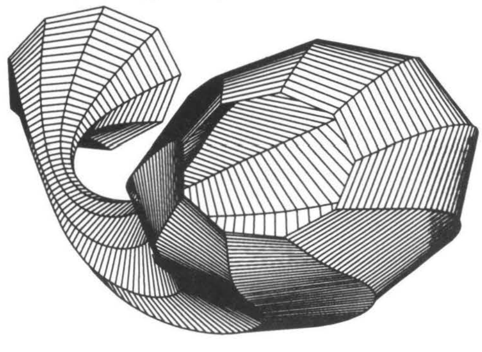
Een voordracht gewijd aan de wereld van computeralgebra-systemen. Het ligt niet in de bedoeling om een uitputtende beschrijving van een lijst systemen te bespreken, maar om naar deze wereld te kijken vanuit een aantal gezichtspunten. Hier volgen een aantal vragen die hierbij een rol zullen spelen.

Overeenkomsten en verschillen
Als je de folders leest van de verschillende computeralgebra-systemen dan lijken ze allemaal hetzelfde te kunnen (alleen beter dan de andere). Waar zitten de verschillen, waar zitten de overeenkomsten? Wat is de rol vam wiskundige algoritmen en van software-ontwerp hierin?



Levenscyclus
"Als ik toen wist wat ik nu weet, had ik het anders gedaan." Veel van de succesvolle systemen van nu zijn op die manier ontstaan; zij hebben een voorganger gehad: *Mathematica* ← SMP, DERIVE ← muMATH, MAGMA ← Cayley. Elk softwarepakket kent een levenscyclus, hoe ziet die er voor computeralgebra-systemen uit?

Commercie en wetenschap
In 1988 werd *Mathematica* op de markt geïntroduceerd. De brede en intensieve marketingaanpak waarmee dit gepaard ging maakte op slag dat de commercie in computeralgebra zijn intrede had gedaan. Computeralgebra-systemen vormden vanaf dat moment geen niche meer in de wiskundesoftware-markt, zij begonnen zelfs te groeien naar een centrale positie in die markt.



Waarom was de markt rijp voor zo'n aanpak? Wat zijn de reacties geweest van de makers van andere systemen?

Het spectrum van computeralgebra-systemen
Van *DERIVE*, *Maple* en *Mathematica* hebben we allemaal wel eens gehoord. Welke systemen zijn er nog meer. Voor welke toepassingsgebieden? Hoe kom ik hier meer van te weten?

Gebruik van computeralgebra: twee voorbeelden

Fred Simons

Computeralgebra is op alle niveau's zowel voor wiskundigen als voor gebruikers van wiskunde een buitengewoon krachtig hulpmiddel. Alleen vereist het werken met zo'n pakket enig inzicht in zowel wiskunde als de mogelijkheden en onmogelijkheden van het pakket. Vaak is de wijze van aanpakken ook verschillend, vergeleken met wat we zouden doen als we geen computeralgebra tot onze beschikking zouden hebben. Ik zal dat aan de hand van twee voorbeelden laten zien.

Het eerste voorbeeld is een bekend meetkundeprobleem, zie figuur 1.

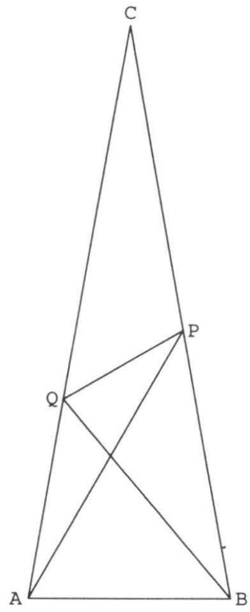
Opgave. De driehoek ABC is gelijkbenig met een tophoek C van 20°. Op BC kiezen we P zo dat $\angle PAB = 60^\circ$ en op AC kiezen we Q zo dat $\angle QBA = 50^\circ$. Bepaal $\angle QPC$.

Dit probleem heeft een heel elegante elementaire meetkundige oplossing, maar die is niet eenvoudig te vinden. Met computeralgebra kunnen we vrij eenvoudig vermoeden wat de numerieke waarde van de oplossing zal zijn en vervolgens inderdaad aantonen dat dat vermoeden juist is. Alleen is de manier waarop we dat doen wat overdonderend en zullen sommigen misschien niet eens overtuigd zijn. Hoe betrouwbaar is de computer als hij exact rekent?

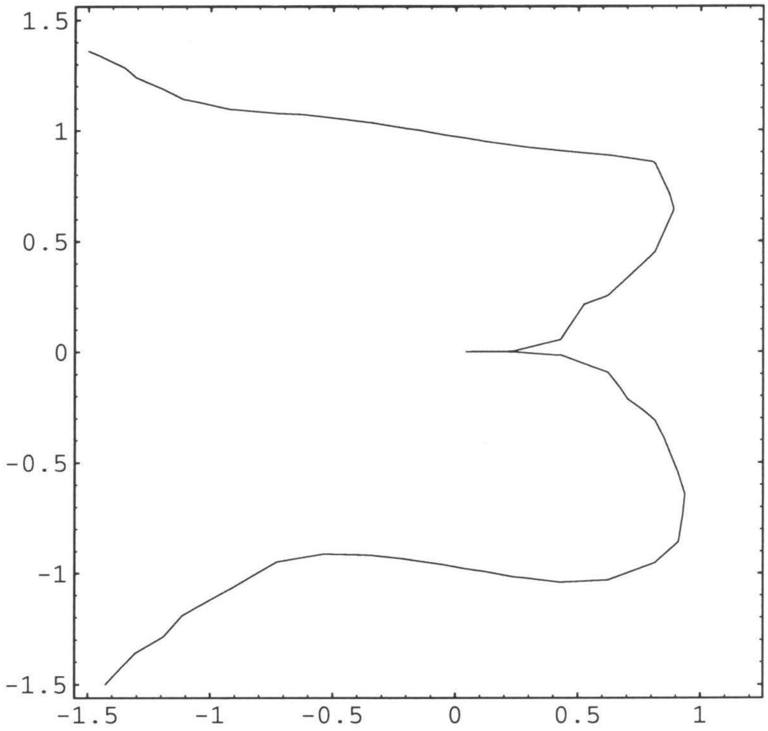
Het tweede probleem heeft te maken met impliciet gedefiniëerde functies. We beschouwen een kromme bepaald door een vergelijking $f(x,y) = 0$. Met behulp van een computerprogramma kunnen we in de regel een aardig idee krijgen hoe zo'n kromme er uitziet. Zo vinden we figuur 2 als schets van de kromme bepaald door de vergelijking

$$x^5 - x^3y + 3y^4 - 3y^2 + xy = 0.$$

Deze schets is inderdaad nogal ruw; in de oorsprong is geen keerpunt, zoals de figuur suggereert, maar een dubbelpunt met raaklijnen $y = 0$ en $y = x/3$, zoals we direct uit de formule afleiden.



Figuur 1



Figuur 2

De kromme gaat door het punt (0, 1) en in de buurt van dat punt definiëert de kromme een functie $y(x)$. Hoe vinden we het Taylor polynoom van deze functie bij $x = 0$? Met de hand doen we dat met impliciet differentiëren, maar met de computer is dat nogal onhandig. Daar werkt de methode van Newton-Raphson, welbekend voor het oplossen van numerieke vergelijkingen, veel handiger. Deze methode zal dan ook in de voordracht uitvoerig aan de orde komen.

Over de berekening van brandkrommen

Eisso Atzema

Veel mensen zullen zich wel eens verbaasd hebben over de merkwaardige krommen die te zien zijn wanneer zonlicht in bijvoorbeeld een theekopje weerkaatst wordt. De meer wiskundigen onder ons zullen zich ook wel eens hebben afgevraagd wat dit nu precies voor krommen zijn en hoe zij zouden kunnen worden berekend. Het zal zeker ook nauwelijks verwondering wekken dat dit probleem al reeds lang geleden aangepakt en opgelost is.

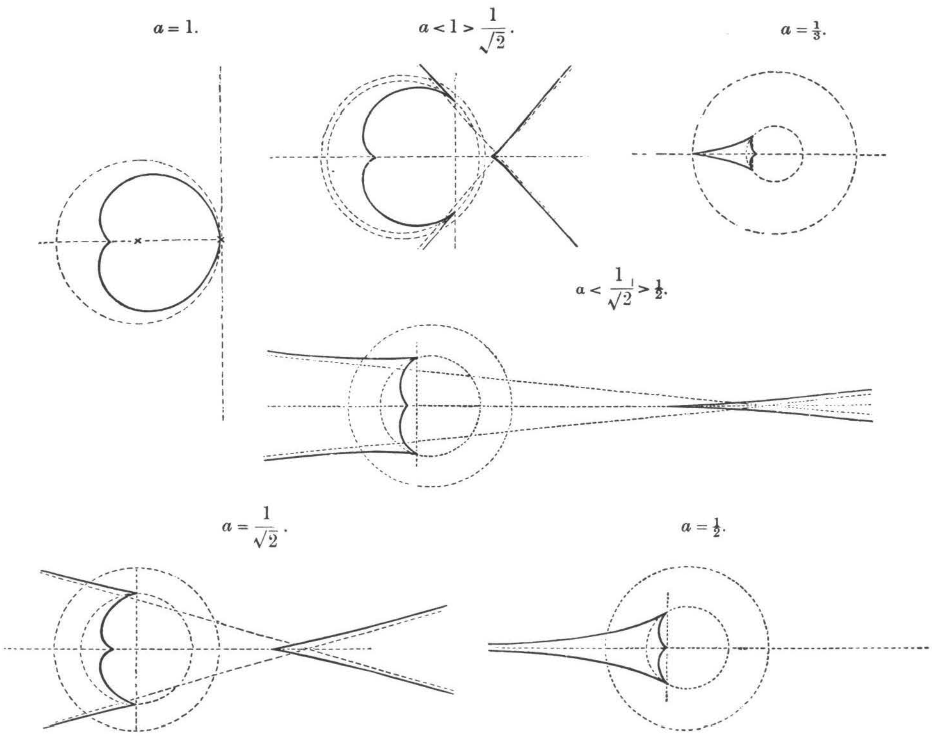
In de klassieke wiskundige litteratuur staan de krommen die soms in een theekopje te zien zijn bekend als caustische krommen of —meer Nederlands— brandkrommen. Wiskundig gezien gaat het hier om krommen die ontstaan als zgn "omhullenden" van een één-dimensionale familie van rechte lijnen in het platte vlak. Dergelijke omhullenden zouden gedefinieerd kunnen worden als de randen van het gebied dat door de familie van rechte lijnen bedekt wordt. In het geval van de brandkrommen zijn deze rechte lijnen dan lichtstralen zoals die lopen na weerkaatst of gebroken te zijn aan een oppervlak. In het geval van het theekopje hebben we natuurlijk te maken met lichtstralen die aan de wand van het kopje weerkaatst zijn.

In de loop der tijd zijn verscheidene methoden ontwikkeld om de vergelijkingen voor alle mogelijke brandkrommen te bepalen. Wat voor aanpak echter ook gekozen wordt, uiteindelijk reduceert het probleem van het bepalen van de vergelijking altijd tot een eliminatie probleem.

Jammer genoeg is de eliminatie waar wij ons voor gesteld zien doorgaans zo omvangrijk dat zij niet meer binnen een redelijke tijd valt uit te voeren. Slechts met behulp van zeer slinkse technieken en nog steeds vele pagina's berekeningen wist Arthur Cayley in het midden van de 19de eeuw de vergelijkingen van alle brandkrommen voor uit één punt komende lichtstralen die aan een cirkel gebroken worden, te berekenen. Dat al deze berekeningen de moeite waard waren, wordt echter wel bewezen door de illustraties bij Cayley's artikel (zie figuur op de volgende pagina).

Vandaag de dag hoeven we ons niet meer in allerlei bochten te wringen om te elimineren en kunnen we het ergste rekenwerk overlaten aan een computeralgebra pakket. Met de huidige stand van ontwikkeling van de computeralgebra, is het bij de bepaling van brandkrommen voldoende wanneer het probleem teruggebracht kan worden tot een voor de computer werkbaar eliminatie probleem.

In mijn voordracht zal ik laten zien op wat voor manier we tot zo'n eliminatie probleem kunnen komen en hoe vervolgens computeralgebra gebruikt kan worden. Aandacht zal onder andere worden geschonken aan de zgn. resultanten. Naar verwachting zullen ook de aan de brandkrommen verwante involuten en wellicht nog enige andere klassieke krommen en eventueel oppervlakken aan bod komen.



Figuur. Enige van Cayley's brandkrommen. Zie: Arthur Cayley, 'A Memoir upon Caustics,' *Philosophical Transactions of the Cambridge Mathematical Society* 147, pp. 273-312 (= *Collected Mathematical Papers* 2, pp. 336-380).

Achter de computeralgebra: het oplossen van polynoomvergelijkingen

F.J.L. Martens

Er zijn vele manieren om een stelsel lineaire vergelijkingen, bijv.

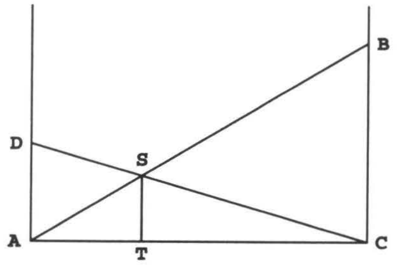
$$\begin{cases} x \; + y + z = 3 \\ 2x \qquad + z = 3 \\ x \; + 2y + z = 4 \end{cases}$$

op te lossen, maar ze komen op hetzelfde neer:
wijs een onbekende aan en werk die in de andere vergelijkingen weg. Herhaal deze stap zoveel mogelijk en bepaal vervolgens de oplossing. Bij een stelsel polynoomvergelijkingen, bijv.

$$\begin{cases} x^2 \; y - y^3 = 9 \\ x \; y^2 - x^3 = 10 \end{cases}$$

werkt dit in het algemeen niet!
In deze voordracht wordt uitgelegd hoe in de computeralgebra dergelijke stelsels worden aangepakt. Omdat computeralgebra-pakketten met polynoomvergelijkingen uit de voeten kunnen, worden vergelijkingen vaak in stelsels polynoomvergelijkingen omgezet. Als illustratie worden twee eenvoudige problemen besproken:

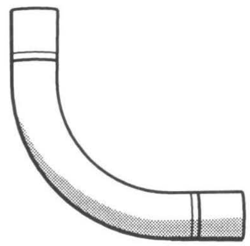
1. Bepaal alle x die voldoen aan $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 1$.
2. Twee ladders, AB en CD, met lengte 4 respectievelijk 3 meter zijn tussen twee muren geplaatst zoals aangegeven in figuur 1. De lengte van ST bedraagt 1 meter. Bepaal de afstand tussen de muren, d.w.z. de lengte van AC.

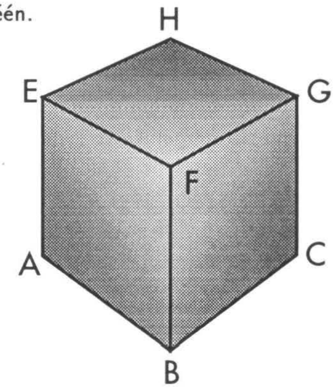


Rekenen met ellebogen
Computer Algebra in dienst van de Meetkunde

F. van der Blij

Enige tijd geleden toonde prof. J. Verhoeff mij een door hem gemaakt samenstel van zes "elleboog-stukken" van pvc buizen voor electrische leidingen. Hij had ze met kleine verbindingsstukken aan elkaar gezet tot een ruimtelijke zeshoek. Het paste en soms wiebelde het. Je ziet zo'n zeshoek in een kubus zitten; ABCGHE is er één.





Ik vroeg me af of je ook vijf ellebogen (eventueel met niet rechte hoeken) als een vijfhoek in elkaar kunt zetten.
En hoe zit het met zeven ellebogen om over acht maar niet te spreken. Voor de hand ligt om gewone analytische meetkunde van de ruimte te gebruiken, handig coördinaten in te voeren, passende vergelijkingen op te lossen enzovoorts. Er lijkt geen vuiltje aan de lucht, het zijn allemaal kwadratische vergelijkingen, niets geen probleem.

Maar helaas is het aantal vergelijkingen wat groot, voor een zeshoek even groot als het aantal onbekenden. Nu zie je direct twee verschillende ruimtelijke zeshoeken met rechte hoeken in de kubus zitten, maar het in de hand genomen model blijkt te wiebelen, en heeft dus oneindig veel oplossingen. Is er een afhankelijkheid van de kwadratische vergelijkingen?
Helaas verdrink je dan in de berekeningen en treiteren kleine slordigheden en rekenfoutjes je al heel snel.
Maar met goed gebruik van elementaire meetkundige middelen is het karwei voor zes best te klaren.
Voor zeven liep ik vast. Er was een parameter meer dan het aantal vergelijkingen. Het ding draaide soepel in de hand, maar is de baan netjes te beschrijven?
Toen riep ik de hulp in van prof. A.H.M. Levelt, en ik kreeg keurig de ene vergelijking met twee parameters, die de beweging beschrijft. Maar wel een vergelijking van de graad 36 met 289 termen. Wat betere methoden voeren tot een polynoom van de graad 32 met 144 termen, nog altijd wat veel om met de hand te doen. Maar ik zal tussen nu en eind augustus nog eens proberen eerst te denken en dan computeralgebra te bedrijven om nog aardiger resultaten te krijgen. Al was het wel heel aantrekkelijk dat de computer

mij ook een plaatje leverde, waarin de afhankelijkheid van de twee beslissende parameters grafisch wordt weer gegeven, en je met het object in de hand kunt proberen de getekende kromme te volgen.

Een andere keer definieerde ik in samenspraak met dr. A.G. van Asch voor de hoek, gevormd door twee elkaar rakende cirkels, een bisectrice. De hoek is klassiek gesproken wel nul, maar je ziet duidelijk dat er ruimte tussen de cirkelbenen zit. Bij Euclides vind je al beschouwingen over zulke hoeken. Kortom we konden zinvol een bisectrice van zo'n hoek definiëren. Natuurlijk kun je dan een driehoek van drie, elkaar twee aan twee rakende cirkels maken.
Gaan de drie bisectrices door één punt? Soms of altijd??
Zou met de computer tekenen een antwoord kunnen geven? Wellicht over het niet door één punt gaan wel, over het wel door één punt gaan natuurlijk niet. Daarvoor moet geredeneerd of gerekend worden. De berekeningen zijn ook hier elementair maar nogal gecompliceerd. Weer een mogelijkheid om computeralgebra te hulp te roepen.

Wie weet komen er voor eind augustus nog wel meer meetkundige problemen bij mij op waarvoor ik de computeralgebra te hulp zou willen roepen.

Primitiveren door middel van elementaire functies

A.W. Grootendorst

1. In deze voordracht staat de vraag centraal (en deze zal menig leraar geïntrigeerd hebben) welke primitieven met elementaire hulpmiddelen kunnen worden berekend en welke niet. Maar wat verstaan we eigenlijk hieronder?
   Iedereen weet dat $\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2}$ maar $\int e^{x^2}dx$ en $\int \frac{\sin x}{x}dx$ "gaan" niet.
2. Een analoog probleem is de vraag welke hogeremachtsvergelijkingen we kunnen oplossen met behulp van wortelvormen uit de coëfficiënten en welke niet. Deze vraag werd beantwoord door Evariste Galois (1811-1832). De oplossing ligt in het herhaald adjungeren van wortels uit elementen van de reeds door adjunctie verkregen uitbreidingen van het grondlichaam. Het bleek daarbij dat slechts voor vergelijkingen van de graad 2,3 en 4 uitbreidingen bestaan waarin de gezochte wortels liggen.
   Hierbij verstaat men onder een uitbreiding van het lichaam K met een element t het kleinste lichaam dat K en t omvat, anders gezegd: het lichaam bestaande uit alle rationale verbindingen van alle elementen van K met t; notatie voor deze uitbreiding: $K(t)$.
3. Met de in het begin gestelde vraag hebben zich o.a. beziggehouden J. Liouville (1834), G.H. Hardy (1916), E. Risch (1969, 1976) en M. Rosenlicht (1973). De eerste twee gingen daarbij analytisch te werk, de laatste twee algebraisch. Hun methode is het onderwerp van deze voordracht.
4. Om de gedachten te bepalen denken we allereerst aan het lichaam van alle rationale functies in één reële variabele met rationale coëfficiënten ($\mathbb{R}(x)$) of dat van alle rationale functies in één complexe variabele met complexe coëfficiënten ($\mathbb{C}(z)$). Hierin is met behulp van de analyse een differentiatie gedefinieerd die de bekende

eigenschappen heeft.
Deze situatie heeft model gestaan bij de definitie van een zgn. differentiaallichaam, d.i. een commutatief lichaam K met nog iets extra's nl. een afbeelding (differentiatie genoemd) van K in zichzelf. Voor elke a in K wordt het beeld onder deze afbeelding genoteerd als a' en per definitie voldoet deze afbeelding aan de volgende eisen: $(a+b)' = a' + b'$ en $(ab)' = a'b + ab'$. De elementen van K met de eigenschap $a' = 0$ noemt men de constanten van K. Alles is ten duidelijkste geïnspireerd door de "gewone" differentiaalrekening.

5. Een natuurlijke vraag is dan: bepaal (zo mogelijk) bij gegeven a het origineel daarvan, d.w.z. los de vergelijking $y' = a$ op.
In het algemeen heeft deze vergelijking geen oplossing in K zelf en daarom gaan we K uitbreiden tot een lichaam L waarin we wel een oplossing hopen aan te treffen. Natuurlijk moet L dan zelf ook een differentiaallichaam zijn en wel zo dat de differentiatie op L, indien beperkt tot K, identiek is met die op K.
De elementen waarmee we K zullen uitbreiden onderscheiden we in drie soorten:

a. Elementen die algebraisch zijn over K, d.w.z. nulpunt zijn van een polynoom met coëfficiënten in K.

b. Exponentialen over K, d.w.z. elementen, zeg E, van een uitbreiding van K waarbij een a in K behoort z.d.d. $E' = E.a'$.
Bijv. $f(x) = e^{g(x)}$ met $g(x)$ in $\mathbb{R}(x)$, en de "gewone" e, immers $f'(x) = f(x).g'(x)$.

c. Logarithmen over K, d.w.z. elementen, zeg L, van een uitbreiding van K waarbij er in K een element a bestaat, z.d.d. dat $L' = a'/a$.
Bijv. $f(x) = ln\ g(x)$, waarbij ln de natuurlijk logarithme voorstelt, immers $f'(x) = g'(x)/g(x)$.

Indien K een differentiaallichaam is, dan verstaan we onder een elementaire uitbreiding van K een uitbreiding van K d.m.v. een eindig aantal achtereenvolgende adjuncties van algebraische elementen, exponentialen of logarithmen.

6. Nu terug naar de vraag "onder welke voorwaarden kan men bij gegeven a in K een uitbreiding L van K construeren waarin de vergelijking $y' = a$ een oplossing heeft?"
Het antwoord op deze vraag wordt gegeven door de *stelling van Liouville-Rosenlicht*:
Indien K een differentiaallichaam is met karakteristiek nul*, dan is er dan en slechts dan een elementaire uitbreiding L van K te vinden (met hetzelfde constantenlichaam als K) waarin $y' = a$ een oplossing heeft, indien a de volgende gedaante heeft:

$$a = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'$$

Hierin behoren de elementen u_i en v tot K en zijn de elementen c_i constanten van K.

7. Enkele voorbeelden van toepassingen:

*Een lichaam K heeft de karakteristiek nul, indien voor de elementen t van K geldt: uit $n.t = 0$ (met n in Z), volgt $n = 0$.

a. Voor K nemen we $\mathbb{C}(z)$ en voor a kiezen we $\frac{1}{z^2+1}$. Er geldt dan:

$$a = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\{\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\} = \frac{1}{2i}\{\frac{i}{iz+1} - \frac{i}{iz-1}\}$$

dus (afgezien van de integratie constante):

$$y = \frac{1}{2i}\, ln\, \frac{iz+1}{iz-1}$$

en dit is weer om te zetten in arctan (z).

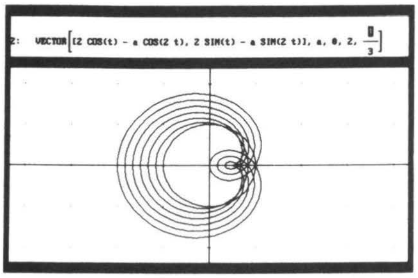
b. Het bewijs dat er geen elementaire uitbreiding van $\mathbb{C}(z)$ te vinden is waarin een primitieve van e^{z^2} ligt, zal blijken te berusten op het feit dat e^{z^2} niet algebraisch is over $\mathbb{C}(z)$ en daardoor niet te schrijven in de door Liouville-Rosenlicht vereiste gedaante.
Evenzo zijn bijv. $\int \frac{\sin z}{z}\, dz$ en $\int \frac{e^z}{z}\, dz$ te behandelen.

8. Het hierboven behandelde probleem is de grondslag waarop integratie met behulp van computeralgebra berust.

J. Liouville

Het paard van Troje
Computeralgebra in het voortgezet onderwijs

P. Drijvers



Computeralgebra is in eerste instantie niet ontwikkeld voor educatief gebruik. Pas relatief laat - toen hardware goedkoper was geworden en de software toegankelijker - realiseerde men zich dat computeralgebra systemen mogelijk ook in het onderwijs een plaats zouden kunnen krijgen. Maar daarmee begon ook meteen de discussie.

Oppervlakkig beschouwd lijkt symbolische software een geschenk voor de leerlingen. Stelt u zich eens voor: geen moeizame rekenpartijen meer, geen vervelende fouten die alles teniet doen. Het leven wordt een stuk aangenamer. Bevlogen docenten zien hun kans schoon om eindelijk eens echte wiskunde te doen: generalisaties, concepten, abstracties, probleemoplossen, modelvorming. De vraag is natuurlijk of de leerlingen daar blij mee moeten zijn: het routinewerk, waarmee ze tot voor kort de punten op de proefwerken bij elkaar sprokkelden, is ondergeschikt gemaakt aan vaardigheden van een hogere orde. De handmatige oefenfase dreigt te worden bekort zonder dat duidelijk is welke gevolgen dit heeft voor het inzicht. Het aantal uren wiskunde op de lessentabel staat onder druk omdat heel veel uit het programma de relevantie heeft verloren nu de machine 'alles kan'. Het geschenk kan zich ook tegen de ontvangers keren, zoals het paard van Troje dat door de Trojanen met open armen ontvangen werd, met alle desastreuze gevolgen van dien.

Ik geloof niet dat we met computeralgebra een paard van Troje het voortgezet onderwijs inhalen. Wel is duidelijk dat de inpassing ervan een ingrijpende en subtiele kwastie is. Het denken over de gevolgen die dit heeft voor didaktiek en inhoud van het wiskundeonderwijs staat nog maar in de kinderschoenen.

Deze voordracht zal dan ook geen pasklare antwoorden aanreiken. Wel passeert een aantal voorbeelden van het gebruik van computeralgebra in het voortgezet onderwijs de revue. De bespreking van deze voorbeelden, die betrekking hebben op leerstof van diverse leerjaren, zal leiden tot enkele beschouwingen over

- praktische aspecten
- ervaringen in het buitenland
- didaktiek van computeralgebra
- verband met andere technologie, zoals grafische rekenmachines.

Cursusgeld

Het cursusgeld bedraagt *f* 75.-, waarbij de syllabus is inbegrepen. Dit bedrag is echter exclusief de kosten van maaltijden.

Aanmelding

Door het inschrijfformulier achterin deze brochure in te vullen en op te sturen naar:

Stichting Mathematisch Centrum
T.a.v. Mevrouw M. Bruné
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

en tegelijkertijd het cursusgeld (vermeerderd met evt. kosten van maaltijden) over te boeken naar bank rek.nr. 31.35.57.977 van de Stichting Wiskunde en Informatica Conferenties te Amsterdam (gironummer van de bank is 187744) onder vermelding van uw naam en VC94.

Rabo

Plaats

Amsterdam: CWI, Kruislaan 413, zaal Z011.
Eindhoven: Rekencentrum van de Technische Universiteit Eindhoven, Den Dolech 2.

Syllabus

De syllabus zal worden uitgereikt bij aankomst op de cursus.

Informatie

Voor nadere informatie over de Vakantiecursus kunt u zich wenden tot mevrouw M. Bruné, tel. 020-5924249.

Sprekers

Dr. E. Atzema
CAN/RIACA; Kruislaan 419, 1098 VA Amsterdam, 020-560 8485.

Prof.dr. F. van der Blij
Ruijsdaellaan 6, 3723 CC Bilthoven, 030-283168.

Drs. P. Drijvers
Paddepoelseweg 9, 6532 ZG Nijmegen, 080-786923.

Dr. L. van Gastel
CAN Expertise Centrum; Kruislaan 419, 1098 VA Amsterdam, 020-560 8420.

Prof.dr. A.W. Grootendorst
Aardbeistraat 11, 2564 TM Den Haag, 070-3232936.

Dr.ir. F. Martens
TUE, Fac. Wiskunde en Informatica; Den Dolech 2, 5612 AZ Eindhoven, 040-474280.

Prof.dr. F. Simons
TUE, Fac. Wiskunde en Informatica; Den Dolech 2, 5612 AZ Eindhoven, 040-474400.