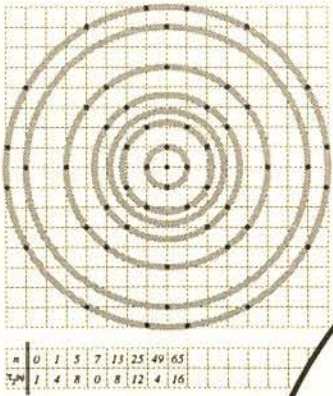
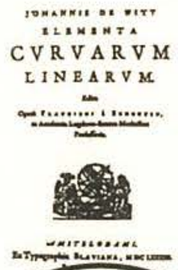
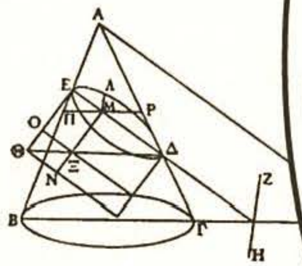
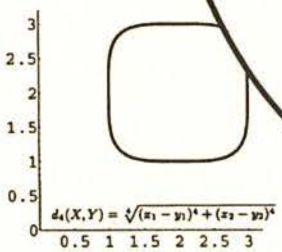


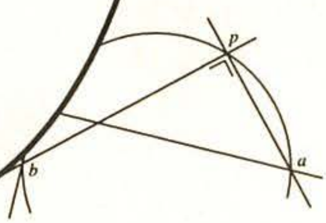


Vakantiecursus 1995

KEGELSNEDEN EN KWADRATISCHE VORMEN







SMC

Stichting Mathematisch Centrum

Een kegelbaanhouder in Tholen,
Geprest door de prijs van de kolen,
Sneed zijn kegels kapot
En keek vol genot
Naar zijn kacheltje vol hyperbolen.

O. Bottema (1901-1992)

Vakantiecursus 1995

voor leraren in de exacte vakken VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden

De vakantiecursus die de Stichting Mathematisch Centrum in 1995 organiseert heeft als thema:

Kegelsneden en kwadratische vormen

Ook dit jaar betreft het een tweedaagse cursus, die zowel in Eindhoven als in Amsterdam wordt gehouden en wel op

donderdag 17 augustus en vrijdag 18 augustus 1995 in Eindhoven
in het rekencentrum van de Technische Universiteit Eindhoven, Den Dolech 2 te Eindhoven.
Hier is gelegenheid voor een gemeenschappelijke lunch op ieder van de cursusdagen.
Indien men aan een of meer lunches wenst deel te nemen, dient men de hieraan verbonden kosten (f 15,= per lunch) tezamen met het inschrijfgeld te voldoen.

en op

vrijdag 1 september en zaterdag 2 september 1995 in Amsterdam

in het CWI, Kruislaan 413 te Amsterdam.
Op vrijdag bestaat daar de mogelijkheid gemeenschappelijk een warme maaltijd te gebruiken (f 20,=), terwijl op zaterdag de mogelijkheid bestaat gemeenschappelijk te lunchen (f 15,=). Indien men aan een of beide maaltijden wenst deel te nemen, dient men de hieraan verbonden kosten tezamen met het inschrijfgeld te voldoen.

Aanmelding voor deelname aan de cursus kan geschieden door het aanmeldingsformulier achterin deze brochure in te vullen en vóór 15 augustus 1995 op te sturen aan het CWI.

NB. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit.
Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar.
Degene die daarop prijs stelt, gelieve dit bij aanmelding te vermelden.

Ten geleide

Waar in de cursus 1994 een onderwerp aan de orde gesteld werd dat jong en in volle ontwikkeling is - de Computer Algebra -een onderwerp ook dat nog zijn entrée op de scholen moet maken, staat thans, bij de cursus 1995, een onderwerp centraal dat niet alleen een langdurige binding met het onderwijs heeft, maar dat ook gerekend kan worden tot de oudste gebieden van de wiskunde en dat zijn "roots" heeft in de Griekse Oudheid.

Traditioneel wordt de ontdekking van de ons bekende kegelsneden toegeschreven aan Menaechmus (ca. 350 v. Chr.). Typisch voor zijn methode was dat hij een kegel steeds sneed met een vlak dat loodrecht staat op een beschrijvende. De verschillende soorten kegelsneden ontstaan dan door de tophoek recht, stomp of scherp te nemen. Van zijn geschriften op dit gebied is niets bewaard gebleven, evenmin als van het werk van Aristaeus (eveneens midden vierde eeuw v. Chr.). Ook 'onze' Euclides (ca. 300 v. Chr.) zou, voortbouwend op Aristaeus, een werk '*κωνικά*' (konika) geschreven hebben dat verloren is gegaan.
Veel daarvan is echter opgenomen in het werk van Apollonius van Perga (circa 250 v. Chr.), die op zijn eigen, buitengewoon scherpzinnige wijze de kegelsneden invoerde en hun de bekende namen meegaf.

Met deze ontwikkelingen in de klassieke Oudheid, met name de constructie van kegelsneden bij Apollonius, zet de vakantiecursus 1995 in; zij vormen het onderwerp van de lezing van *Dr. J.P. Hogendijk.*

De volgende lezing, die van *Prof. Grootendorst,* verplaatst ons naar de 17e eeuw, de eeuw waarin Fermat (1601-1665), Descartes (1596-1650), Wallis (1616-1703) en Johan de Witt (1625-1672) de grondslagen legden voor wat wij thans analytische meetkunde noemen.
In deze eeuw doken ook voor het eerst de kwadratische vormen op en wel bij het beschrijven van kegelsneden door middel van de x- en y- coördinaten van de punten daarop. Deze vormen zullen in deze cursus een belangrijke rol spelen, een titelrol zelfs.
De zoëven genoemde lezing is voor een groot deel gewijd aan het tweedelige werk van Johan de Witt. In het eerste deel daarvan zet deze zich af tegen de constructies van Apollonius en stelt daar zijn eigen methode tegenover. In het tweede deel introduceert hij de voorstelling van kegelsneden door middel van kwadratische vergelijkingen.

De volgende voordracht, die van *Prof. Aarts,* behandelt een generalisatie van de kegelsneden in de vorm van kwadrieken van dimensie twee en hoger.
Hierbij beperkt de spreker zich niet tot de Euclidische ruimte, maar gaat -na zorgvuldige voorbereiding- over op projectieve ruimten en komt dan op verrassende wijze tot de beantwoording van de vraag hoeveel rechten elk van een gegeven viertal kruisende rechten snijden.

De vierde voordracht, die van *Dr. van Asch,* is geheel gewijd aan kwadratische vormen en wel aan een aantal toepassingen daarvan: de zeer praktische methode van de kleinste kwadraten, maar ook een meer abstracte toepassing als het introduceren van andere metrieken dan de "standaardmetriek", via kwadratische vormen en als derde toepassing de problemen van de metriek op de bol.

Reeds in de Griekse Oudheid was de vraag naar de mogelijkheid om een kromme daadwerkelijk te construeren een zeer belangrijke en ook in de 17e eeuw stond dit probleem van de construeerbaarheid sterk in de belangstelling, met name bij Descartes.
Op praktische en eigentijdse wijze gaat *Dr.ir. Van Overveld* hierop in.

Aan de hand van veel illustraties met behulp van de computer toont hij aan hoe men d.m.v. zogenaamde discrete procedurele methoden (dit wordt zorgvuldig uitgelegd) in een eindig aantal stappen een redelijk beeld van een kromme kan ontwerpen, maar ook wijst hij erop dat zich hier complicaties kunnen voordoen.

In dit verband zij vermeld dat het gebruikelijke "uurtje zelfwerkzaamheid" dat zich in de laatste jaren een vaste plaats heeft verworven in de vakantiecursus, dit jaar vervangen is door drie kwartier computerdemonstratie waarin *Dr.ir. Van Overveld* veel van wat de sprekers in hun voordrachten hebben behandeld d.m.v. computer graphics in "geanimeerde" vorm zal vertonen.

Kwadratische vormen hebben sinds Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813) en Gauss (1777 -1855) hun plaats gevonden in de getallentheorie en het is dan ook niet verwonderlijk dat aan dit aspect van kwadratische vormen twee voordrachten zijn gewijd.

Dr. Stevenhagen zal spreken over de bijdrage die Gauss op dit gebied heeft geleverd: equivalentie van kwadratische vormen, de bijbehorende equivalentie-klassen en roosters.

Prof. van der Blij gaat uit van het splitsen van een natuurlijk getal in een som van twee kwadraten van gehele getallen. Deze situatie wordt daarna gegeneraliseerd en deze weg zal leiden tot dieper liggende resultaten waarbij de belangrijke rol van de kwadratische vormen voor de getallentheorie duidelijk wordt getoond.

Hiermee is dan in grote lijnen de inhoud van de cursus geschetst en men ziet dat dit klassieke onderwerp veel facetten vertoont en naar veel kanten kan worden uitgebouwd. Daarmee voldoet het naar de mening van de organisatoren goed aan de eisen die men bij een vakantiecursus stelt: het is een gevarieerd onderwerp dat aanleiding kan geven tot verdere studie en dat ook voldoende materiaal bevat dat in de klas aan de orde gesteld kan worden en daar ongetwijfeld de belangstelling zal trekken. Van harte hopen de organisatoren dat deze cursus goed bezocht zal worden en dat de cursisten twee genoeglijke dagen zullen beleven.

A.W. Grootendorst

Programma Eindhoven
17 en 18 augustus 1995

Donderdag 17 augustus

10.00-11.00	Ontvangst, koffie
11.00-11.05	Opening
11.05-11.50	De "Kegelsneden" van Apollonius van Perga, J.P. Hogendijk, RU Utrecht
11.50-12.15	Pauze
12.15-13.00	De "Kegelsneden" bij Johan de Witt, A.W. Grootendorst, TU Delft
13.00-14.00	Lunch
14.00-14.45	Kwadrieken, van dimensie twee en hoger, J.M. Aarts, TU Delft
14.45-15.15	Pauze
15.15-16.00	Kwadratische vormen en metriek, A.G. van Asch, TU Eindhoven

Vrijdag 18 augustus

10.00-10.45	Roosters en Kwadratische vormen, P. Stevenhagen, Universiteit van Amsterdam
10.45-11.15	Pauze
11.15-12.00	"Gedeelde Vreugde is dubbele Vreugde", of: Krommen, voortgebracht door recursieve procedures, C.W.A.M van Overveld, TU Eindhoven
12.00-13.00	Lunch
13.00-13.45	Computerdemonstraties
13.45-14.15	Pauze
14.15-15.00	Sommen van Kwadraten, F. van der Blij, RU Utrecht
15.00-15.05	Sluiting

Programma Amsterdam
1 en 2 september 1995

Vrijdag 1 september

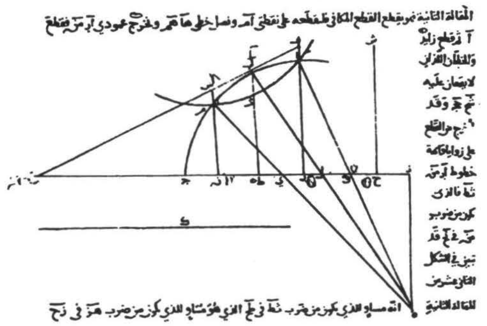
15.00-15.30	Ontvangst, koffie
15.30-15.35	Opening
15.35-16.20	De "Kegelsneden" van Apollonius van Perga, J.P. Hogendijk, RU Utrecht
16.20-16.45	Pauze
16.45-17.30	De "Kegelsneden" bij Johan de Witt, A.W. Grootendorst, TU Delft
17.30-18.30	Warme maaltijd
18.30-19.15	Kwadrieken, van dimensie twee en hoger, J.M. Aarts, TU Delft
19.15-19.45	Pauze
19.45-20.30	Kwadratische vormen en metriek, A.G. van Asch, TU Eindhoven

Zaterdag 2 september

10.00-10.45	Roosters en Kwadratische vormen, P. Stevenhagen, Universiteit van Amsterdam
10.45-11.15	Pauze
11.15-12.00	"Gedeelde Vreugde is dubbele Vreugde", of: Krommen, voortgebracht door recursieve procedures, C.W.A.M van Overveld, TU Eindhoven
12.00-13.00	Lunch
13.00-13.45	Computerdemonstraties
13.45-14.15	Pauze
14.15-15.00	Sommen van Kwadraten, F. van der Blij, RU Utrecht
15.00-15.05	Sluiting

De "Kegelsneden" van Apollonius van Perga

Jan Hogendijk

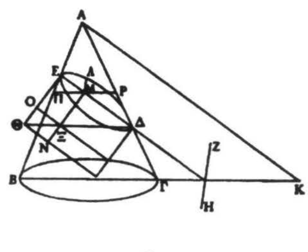


Vanaf ca. 350 voor Christus hebben Griekse wiskundigen zich met kegelsneden beziggehouden. Over de eerste 150 jaar is niet veel bekend, doordat praktisch alles wat in die begintijd geschreven werd is achterhaald door Apollonius van Perga. Deze schreef omstreeks 200 voor Christus de *Kegelsneden* (Grieks: *κωνικά*, Latijn: *Conica*), een groot werk in 8 'boeken', waarvan de eerste vier bewaard zijn in het Grieks en de boeken 5-7 in één middeleeuwse Arabische vertaling. Dit werk is één van de hoogtepunten van de Griekse wiskunde. De enorme invloed van Apollonius blijkt o.a. uit het feit dat de benamingen ellips, parabool, hyperbool, die hij heeft ingevoerd, nog steeds worden gebruikt.

We zullen op een luchtige manier, en zonder veel bewijzen, een indruk proberen te geven van de structuur en de inhoud van de *Conica*. Aan de orde zullen in elk geval komen:

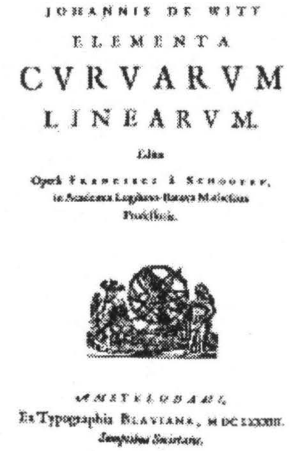
- Apollonius' nieuwe opzet van de theorie: kegels, middellijnen en ordinaten,
- De oorsprong van de benamingen ellips, parabool en hyperbool,
- Iets over de motivatie van de *Conica*: het beroemde probleem van de *locus* van drie en vier lijnen,
- De 'zware stellingen' over normalen in Boek 5.

De *Conica* staat vol met prachtige meetkundige stellingen, maar is in een voor ons zeer moeilijk toegankelijke stijl geschreven. Hiervan zullen enkele afschrikwekkende voorbeelden worden gegeven. Daarna zal het wel geen verbazing meer wekken dat de *Conica* nog maar door een enkeling werd begrepen, nadat de bloeiperiode van de Griekse wiskunde omstreeks 300 na Christus was afgelopen. Boek 8 is verloren gegaan (samen met veel andere geavanceerde Griekse wiskundige teksten), en ook het lot van de boeken 5-7 heeft aan een zijden draad gehangen.



De "Kegelsneden" bij Johan de Witt

A.W. Grootendorst



JOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CVRVARVM
LINEARVM.

In de voordracht van Dr. Hogendijk zijn de kegelsneden ingevoerd op een wijze die de naam al doet vermoeden: als doorsnede van een kegel met een plat vlak.
Tegen deze wijze van voortbrengen is bezwaar gemaakt door de bekende Raadpensionaris Johan de Witt (1625-1672). In een brief aan Frans van Schooten Jr. (1615 - 1660) spreekt hij duidelijk hierover zijn misnoegen uit: 'Toen ik echter de grondbeginselen van de overige vlakke krommen ... nauwkeuriger had bestudeerd, achtte ik het volslagen tegen de natuurlijke orde in te gaan dat men de oorsprong van deze krommen zoekt in ruimtelijke lichamen'.

In de oudheid noemde men deze krommen 'τόποι πρὸσ επιφανειαισ' (krommen op oppervlakken) of 'loci solidi' (ruimtelijke plaatsen), hetgeen duidelijke taal spreekt.

Johan de Witt wijdt een heel werk aan zijn methode van voortbrengen: de "Elementa Curvarum Linearum", Liber Primus en Liber Secundus. Dit vormt weer een onderdeel van een tweedelig werk, samengesteld door Frans van Schooten Jr. en is opgenomen in het tweede deel daarvan. Dit werk van van Schooten is in eerste instantie een vertaling in het Latijn van de 'Géométrie' van Descartes die in 1637 verscheen in het Frans. Om dit boek beter toegankelijk te maken vertaalde van Schooten Jr. het in het Latijn, maar voegde daaraan ook een commentaar en een groot aantal hoofdstukken (en zelfs een geheel boek) toe.

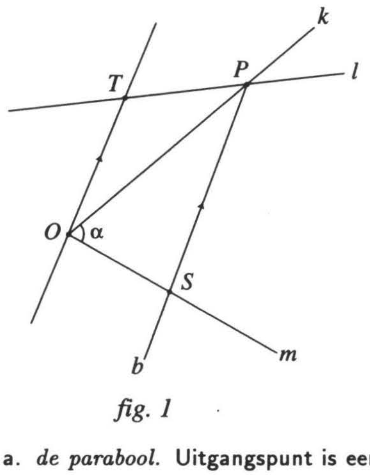


fig. 1

Het betreft hier niet alleen zijn eigen commentaar op de Géométrie en andere toevoegingen van zijn eigen hand, maar ook stukken van zijn tijdgenoten Hudde, Van Heuraet en Florimundus de Beaune.
Waar het nu in deze cursus om gaat is het toegevoegde werk van Johan de Witt, de genoemde 'Elementa Curvarum Linearum' bestaande uit twee boeken, waarvan het eerste in deze voordracht centraal staat. Daarin worden louter verbaal, zonder enige formule de parabool, hyperbool en ellips ingevoerd. Kort gezegd betreft het de volgende voortbrengingswijzen:

a. *de parabool.* Uitgangspunt is een rechte l (de richtlijn), een punt O (de pool), een rechte door O die l in T snijdt en tenslotte een hoek α met hoekpunt O en benen k en m.
De kromme in kwestie wordt als volgt beschreven: men laat het snijpunt P van k

met l langs de richtlijn l lopen; hierbij zal dan de hoek α om het punt O wentelen. In elke stand van P trekt men door P een lijn b (de beschrijvende) evenwijdig met de vaste rechte OT. Het gaat nu om de baan van het snijpunt S van b met het variabele been m (het werkbeen) van de hoek α als P de richtlijn l doorloopt. Figuur 1 geeft de situatie weer.

Het zal blijken dat deze baan een parabool is indien de hoek α gelijk is aan de hoek tusscn OT en l. Indien beide laatstgenoemde hoeken verschillend zijn, dan is de baan een hyperbool.

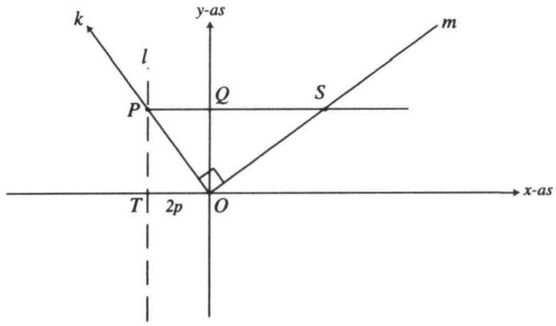
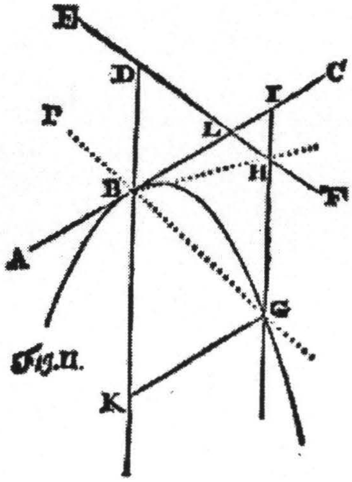
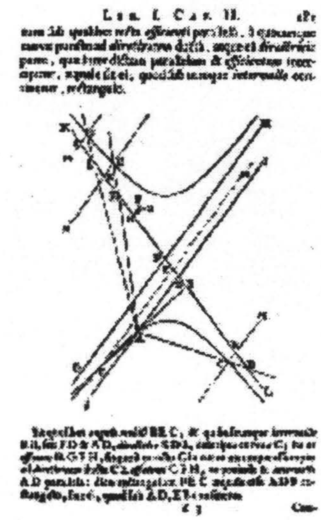


fig 2

Een eenvoudig voorbeeld van het parabool-geval ziet men in fig. 2. Hierin is POS een rechthoekige driehoek, OT = 2p. Uit de bekende eigenschap van de rechthoekige driehoek dat $OQ^2 = PQ.QS$, volgt dan dat S de parabool $y^2 = 2px$ beschrijft als P de lijn $x = -2p$ doorloopt. En passant zij opgemerkt dat dit een eenvoudige manier geeft om met behulp van een tekendriehoek op gelinieerd papier een parabool punt voor punt tekenen.





b. *de hyperbool.* De sub a genoemde wijze van voortbrengen van een hyperbool staat bij Jan de Witt niet centraal.

Voor hem is de belangrijkste wijze van voortbrengen van een hyperbool één die duaal staat tegenover de sub a genoemde methode. Daar ging het om een schuivende lijn (b) en een draaiende hoek (α), nu zal het gaan om een schuivende hoek en een draaiende lijn. Figuur 3 licht dit toe.

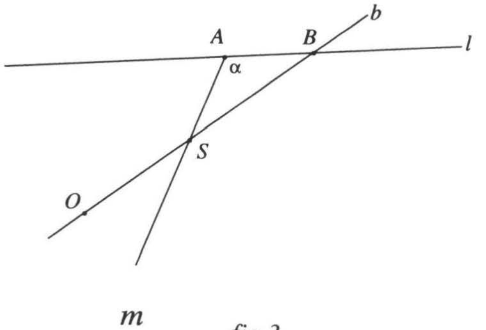


fig 3

Ook hier gaat hij uit van een rechte l (de richtlijn) en een punt O (de pool). Op l ligt het been AB van een hoek α. AB heeft een vaste lengte; het andere been (m) wordt het werkbeen genoemd. Nu ontstaat de bewuste kromme op de volgende wijze: door O en B trekt men de lijn b (de beschrijvende). Het gaat nu om de baan die beschreven wordt door het snijpunt S van het been m van de hoek α met de lijn b als deze laatste om O draait en daarbij het punt B en dus ook de hoek α met zich meesleept. Het zal blijken dat deze baan een hyperbool is.

c. *de ellips.* De wijze waarop Johan de Witt een ellips voortbrengt is thans algemeen bekend (zie fig. 4 en 5). Hij gaat uit van een (niet noodzakelijk rechte) hoek α. Het lijnstuk AB (met vaste lengte) verplaatst zich zodanig dat A steeds ligt op het ene been van α en B op het andere. Op AB (maar niet noodzakelijk *tussen* A en B) ligt het punt S.

Nu blijkt dat de baan van S een ellips is indien AB de geschetste beweging uitvoert.

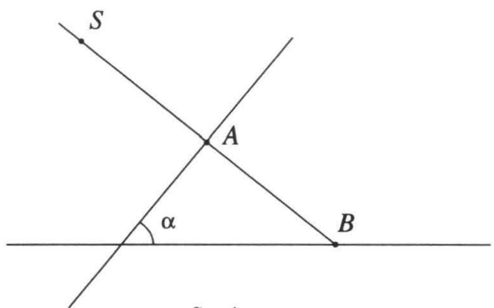
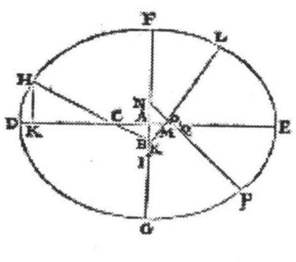
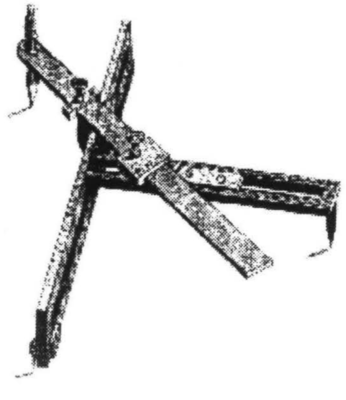


fig 4





Uit 1748 dateert het apparaat dat in fig. 6 is afgebeeld en dat dient voor het tekenen van een ellips op grond van deze definitie; het gebruik hiervan spreekt voor zichzelf.

Na deze inleidende opmerkingen rijzen natuurlijk veel vragen. Hoe legde de Witt het verband met de reeds bekende ("echte") kegelsneden? Welke eigenschappen kon hij met zijn definities afleiden? Hierbij zij opgemerkt dat hij in zijn eerste boek, dat geheel synthetisch is, van geen formule gebruik maakt; het is dus louter verbaal. Ook komt het begrip brandpunt niet voor!

In zijn Liber Secundus verzet hij de bakens volledig en gaat hij te werk met een coördinatenstelsel, met algebraische vergelijkingen en komt zelfs tot een classificatie van tweede-graadskrommen! Ook hieraan zal in de voordracht aandacht geschonken worden.

KWADRIEKEN

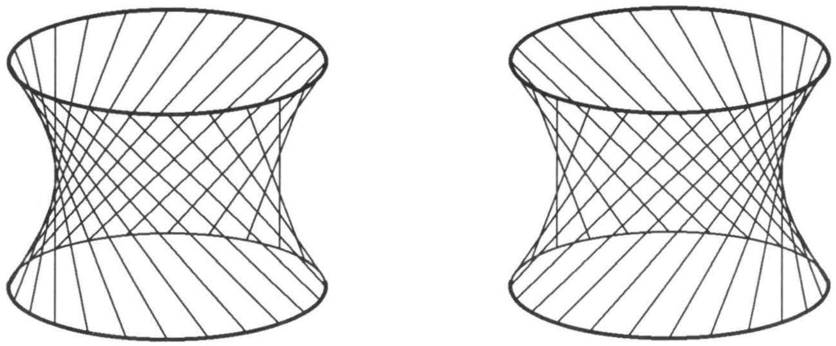
van dimensie twee en hoger

J.M. Aarts

We beginnen met een studie van het halsvlak in $\mathbb{R}^3$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Op het halsvlak liggen twee stelsels van rechte lijnen, zoals aangegeven in de figuur. Door ieder punt van het halsvlak gaat precies één lijn uit elk van de stelsels.



FIGUUR 1: Twee stelsels lijnen op het halsvlak

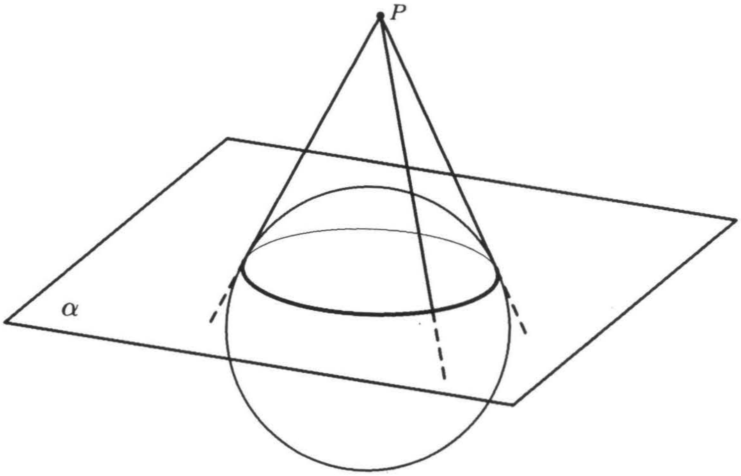
Twee lijnen uit eenzelfde stelsel kruisen elkaar en twee lijnen uit verschillende stelsels snijden elkaar.
Ons verhaal gaat over kwadrieken in de drie-dimensionale projectieve ruimte $\mathbb{P}^3$ en over een speciale (hyper) kwadriek in de vijf-dimensionale ruimte $\mathbb{P}^5$. De stelsels van lijnen op het halsvlak zijn daarbij het Leitmotiv.
De $\mathbb{P}^3$ wordt ingevoerd door aan de $\mathbb{R}^3$ *oneigenlijke punten* (richtingen) toe te voegen en over te gaan op *homogene coördinaten*, waarmee zowel de punten van $\mathbb{R}^3$ als de oneigenlijke punten kunnen worden beschreven. Op homogene coördinaten wordt de vergelijking van het halsvlak (1)

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = x_0^2. \tag{2}$$

De ellipsöide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ krijgt op homogene coördinaten de vergelijking

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = x_0^2. \tag{3}$$

Eerst bekijken we *poolverwantschap* t.o.v. een kwadriek. Die speelt een rol bij de projectieve klassificatie van de kwadrieken. Naast kegels en ontaarde kwadrieken zijn er twee projectief verschillende kwadrieken, namelijk (2) en (3). Dat deze kwadrieken inderdaad verschillend zijn volgt uit het feit dat op de kwadriek (2) stelsels rechte lijnen liggen, terwijl dit bij de kwadriek (3) niet het geval is. Merk op dat bij kegelsneden de klassificatie geheel anders van aard is: twee niet-ontaarde kegelsneden zijn altijd projectief equivalent, d.w.z. er is een projectieve transformatie die de een in de ander overvoert.



FIGUUR 2: α is het poolvlak van P; ieder punt van α is poolverwant met P t.o.v. de bol.

Het laatste deel van de lezing zal gaan over *Plücker-coördinaten*. Aan iedere rechte lijn in $\mathbb{P}^3$ worden zes homogene coördinaten toegevoegd, de Plücker-coördinaten. Via deze coördinaten wordt een bijectie verkregen tussen de verzameling van alle lijnen in de $\mathbb{P}^3$ en een (hyper)kwadriek Q in $\mathbb{P}^5$. Er zijn vele interessante relaties tussen eigenschappen betreffende lijnen in $\mathbb{P}^3$ en eigenschappen van de kwadriek Q. Zo geldt, bijvoorbeeld, dat twee lijnen in $\mathbb{P}^3$ elkaar snijden dan en slechts dan als de corresponderende punten op Q poolverwant zijn ten opzichte van Q. We zullen laten zien dat elk van de stelsels van rechte lijnen op het halsvlak correspondeert met een kegelsnede op Q. Tenslotte wenden we de verworven kennis aan om antwoord te geven op de vraag: gegeven vier kruisende lijnen in de ruimte, hoeveel lijnen zijn er die elk van de gegeven lijnen snijdt?

Kwadratische vormen en metriek

A.G. van Asch

Een drietal verschillende onderwerpen zullen in dit verband bekeken worden.

1. Op welk moment zullen vrouwen op de marathon net zo snel lopen als mannen? Op grond van de ontwikkeling van de wereldrecords en met behulp van de kleinste-kwadratenmethode kunnen we hier voorspellingen over doen. Een rechte lijn $y = ax+b$ die zo goed mogelijk past bij een n-tal punten (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$ kan bepaald worden door minimaliseren van

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2.$$

Een alternatieve aanpak kan gegeven worden door het probleem te schrijven in termen van matrix-vermenigvuldigingen. Hier zullen we ook kort het gebruik van de computer ter sprake brengen.

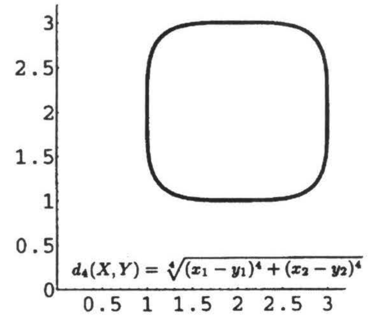
2. De standaard-metriek in $\mathbb{R}^n$ wordt gegeven door

$$d(X,Y)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2.$$

Hoe gaat de meetkunde eruit zien als we in plaats hiervan de afstandsfunktie

$$d_{2k}(X,Y)^{2k} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^{2k}$$

beschouwen?
In $\mathbb{R}^2$ wordt een aantal voorbeelden met $d_4(X,Y) = \sqrt[4]{(x_1 - y_1)^4 + (x_2 - y_2)^4}$ uitgewerkt. Zo ziet bijvoorbeeld een cirkel met middelpunt (2, 2) en straal 1 er als volgt uit



3. Wij leven op een bol, die er lokaal (min of meer) plat uitziet. Afstanden moeten we meten over het boloppervlak. Hoe komen we tot een geschikte keuze voor een koördinatenstelsel op het boloppervlak en hoe ziet dan de afstandsfunktie eruit?

Roosters en kwadratische vormen

Peter Stevenhagen

Het is reeds lang bekend dat sommen van twee kwadraten de eigenschap hebben dat ze 'behouden blijven onder vermenigvuldiging': vermenigvuldigt men twee getallen die elk een som van twee kwadraten zijn, dan is het produkt ook een som van twee kwadraten. Deze opmerking gaat men gemakkelijk na aan de hand van de algemene formule

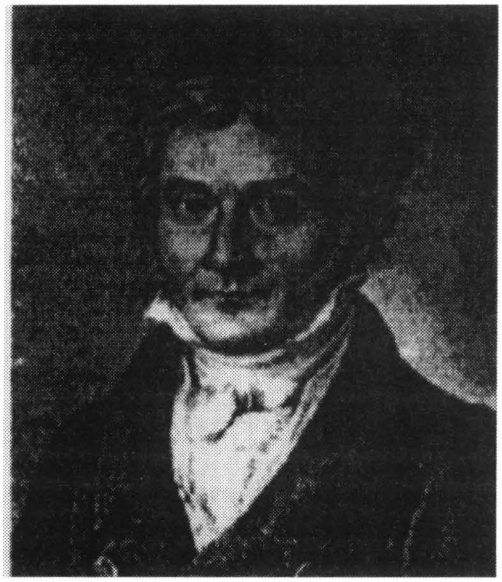
$$(p^2+q^2)(r^2+s^2)=(pr-qs)^2+(ps+qr)^2.$$

Soortgelijke formules kan men na enig proberen ook opschrijven voor getallen die van de vorm x^2+ny^2 zijn voor een willekeurig geheel getal n.

De situatie wordt al snel minder duidelijk wanneer men willekeurige binaire kwadratische vormen $ax^2+bxy+cy^2$ met vast gekozen gehele coefficienten a, b en c beschouwt. Zo zien we bijvoorbeeld uit de iets ingewikkelder identiteit

$$(2p^2+2pq+3q^2)(2r^2+2rs+3s^2)=(2pr+qr+ps+3qs)^2+5(ps-qr)^2$$

dat we voor het produkt een andere kwadratische vorm kunnen krijgen. De situatie werd opgehelderd door C. F. Gauss in de Disquisitiones Arithmeticae (1801). Zijn theorie van *equivalentie* van kwadratische vormen heeft lang als bijzonder ingewikkeld gegolden.



Ik wil in mijn voordracht aangeven hoe men de compositie van kwadratische vormen, waarvan de boven gegeven formules voorbeelden zijn, aanschouwelijk kan maken door *roosters* in het complexe vlak in plaats van vormen te vermenigvuldigen. De theorie van de klassegroepen van Gauss vertaalt zich dan in een theorie van gelijkvormigheidsklassen van roosters bij een vaste grondring.

Van bijzondere charme is het *klassegetal-1-probleem* dat we dan in navolging van Gauss kunnen formuleren, en dat pas in de jaren zestig is opgelost. Het hangt samen met diverse getaltheoretische wonderen. Men kan hierbij denken aan de benadering tot op 12 decimalen van

$$e^{\pi\sqrt{163}}=262537412640768743.999999999999$$

(een observatie van Hermite) of aan het beroemde *polynoom van Euler* $f(x) = x^2 + x + 41$, dat de bijzondere eigenschap heeft dat $f(x)$ priem is voor de 80 opeenvolgende waarden $x = -40, -39, \ldots -1, 0, 1, 2, \ldots 39$ van x. Vanuit hoger standpunt blijken deze wonderen 'hetzelfde' te zijn.

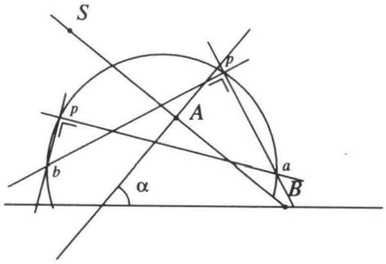
"Gedeelde vreugde is dubbele vreugde" of: krommen, voortgebracht door recursieve procedures

C.W.A.M. van Overveld

Krommen kunnen voortgebracht worden op verschillende manieren. De meest bekende manier is misschien wel door middel van een vergelijking (zoals $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$). We noemen dit een *impliciete* voorstelling omdat het nog niet direct duidelijk is hoe we punten op die kromme moeten genereren: we kunnen voor een gegeven punt (x, y) hooguit nagaan of het op de kromme ligt.

Tegenover de impliciete voorstelling staat de expliciete voorstelling (vaak in de vorm $y = f(x)$, maar ook bijvoorbeeld $x = f(t), f(t) = at^2+bt+c$; $y = g(t), g(t) = dt^2+et+f$; als t van 0 tot 1 loopt beschrijven x en y een kromme). Een expliciete voorstelling noemen we ook wel een *parametervoorstelling.* Als we voornamelijk geinteresseerd zijn in het tekenen van plaatjes zijn expliciete voorstellingen wel aantrekkelijk omdat ze direct aanleiding geven tot een recept om punten van die kromme te vinden.

In de wiskunde is ook wel gekeken naar methoden die in die zin nog operationeler zijn: voorschriften zoals 'geef de baan van de punten p waar p het snijpunt is van twee rechten die elkaar loodrecht snijden en die respectievelijk door de gegeven punten a en b gaan' (zie figuur). Als we die methoden *procedurele methoden* noemen, kunnen we nog onderscheid maken tussen continue procedurele methoden, zoals in het bovenstaande voorbeeld, en *discrete procedurele* methoden.



Bij discrete procedurele methoden geven we een recept dat bij elke keer dat het uitgevoerd wordt een eindig aantal punten voortbrengt. De hele kromme ontstaat dus pas bij het oneindig vaak uitvoeren van dat recept, maar met name bij toepassingen met computers is het noch mogelijk noch nodig om een oneindig aantal punten voort te brengen.

Inderdaad: een computer tekent zijn plaatjes op een zogenaamd *rasterscherm* dat bestaat uit een rechthoekige rangschikking van beeldpunten *(pixels)* waarvan er weliswaar veel zijn (bijvoorbeeld 1024 X768) om een redelijk nauwkeurige indruk van het plaatje te krijgen, maar desalniettemin eindig. Een heel eenvoudige discrete procedurele methode is de volgende: gegeven 2 punten p en q.

```
kromme(p,q)
begin
   als |p-q| voldoende klein
   dan teken(p) en teken(q);
   anders kromme(p,gemiddelde(p,q)) en
      kromme(gemiddelde(p,q) ,q);
end;
```

Dit is een eenvoudig voorbeeld van een zogenaamde *recursieve* procedure (een recursieve procedure is een procedure waarbij je voor de uitvoering van die procedure de procedure zelf nog een keer moet uitvoeren. En nog een keer. En nog een keer...). Zulke procedures zijn heel geschikt voor computers om uit te voeren, en het bovenstaande voorbeeld tekent bij oppervlakkige beschouwing een rechte lijn tussen p en q. Als p en q echter geheeltallige coördinaten (pixels!) hebben, blijkt er al heel wat meer aan de hand te zijn. (Zoveel zelfs dat een heel proefschrift gewijd werd aan het tekenen van dergelijke discrete lijnen (Marloes van Lierop, TUE, 1987)).

Bij de voordracht gaan we in op enkele van deze discrete procedures om krommen voort te brengen; onder andere leren we hoe een timmerman een afgeronde hoek aan een plank krijgt en we zullen zien dat gladde krommen en oneindig grillige krommen veel nabijer familie van elkaar zijn dan men op het eerste gezicht zou verwachten. Natuurlijk komen we ook kwadratische krommen tegen, en met een beetje geluk zelfs krommen van de derde graad.

Sommen van kwadraten

F. van der Blij

Welke getallen kunnen als de som van twee kwadraten van gehele getallen geschreven worden? $45 = 9 + 36$ is een voorbeeld, $65 = 1 + 64 = 16 + 49$ een ander. Het gaat om oplossingen van de vergelijking $x^2 + y^2 = n$. We noemen het aantal oplossingen $r_2(n)$, maar tellen wel zo dat $r_2(n)$ het aantal roosterpunten op de cirkel met straal $sqrt(n)$ om de oorsprong telt.

Bijvoorbeeld $r_2(25) = 12$, de oplossingen (x, y) zijn $(0, \pm 5)$, $(\pm 5, 0)$, $(\pm 3, \pm 4)$ en $(\pm 4, \pm 3)$.

Nu geldt $x^2 + y^2 = (x + iy) * (x - iy)$; als x en y geheel zijn, zijn $x + iy$ en $x - iy$ gehele getallen van Gauss. Het gaat dus over de vraag op hoeveel manieren het getal n te schrijven is als produkt van twee gehele getallen van Gauss. Voor de hand ligt nu om naar de ontbinding van n in priemfactoren te kijken.

Als p een priemgetal is dat een viervoud plus 1 is, geldt $r_2(p^k) = 4(k + 1)$; als p een priemgetal van de vorm een viervoud plus 3 is, geldt $r_2(p^{2k+1}) = 0$ en $r_2(p^{2k}) = 4$.

Verder geldt $\frac{1}{4}r_2(nm) = \frac{1}{4}r_2(n) * \frac{1}{4}r_2(m)$ als de $ggd(n, m) = 1$.

We noemen de functie $\frac{1}{4}r_2(n)$ (zwak) multiplicatief.

Nu gelden ook voor $r_4(n)$, het aantal manieren om een getal als de som van vier kwadraten van gehele getallen te schrijven, analoge formules. Dit zou verband kunnen houden met het feit dat ook voor gehele kwaternionen van Hamilton een rekenkunde (ontbinding in factoren enzovoorts) bestaat. Maar dat analoge formules ook voor $r_6(n)$ en tot op zekere hoogte zelfs voor $r_{2s}(n)$ voor iedere s gelden lijkt onverklaarbaar.

De achtergrond ligt echter dieper. In plaats van over sommen van kwadraten te spreken zouden we ook willekeurige kwadratische vormen met gehele coefficiënten kunnen beschouwen. Steeds zal het aantal oplossingen iets te maken hebben met multiplicatieve functies, dat wil zeggen met functies waarvoor geldt $f(nm) = f(n) * f(m)$ mits $ggd(n, m) = 1$. Concreet, als n een viervoud plus 1 is geldt:

$$r_2(n) = 4\Sigma(-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

$$r_4(n) = 8\Sigma d$$

$$r_6(n) = 12\Sigma(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2$$

$$r_8(n) = 16\Sigma d^3$$

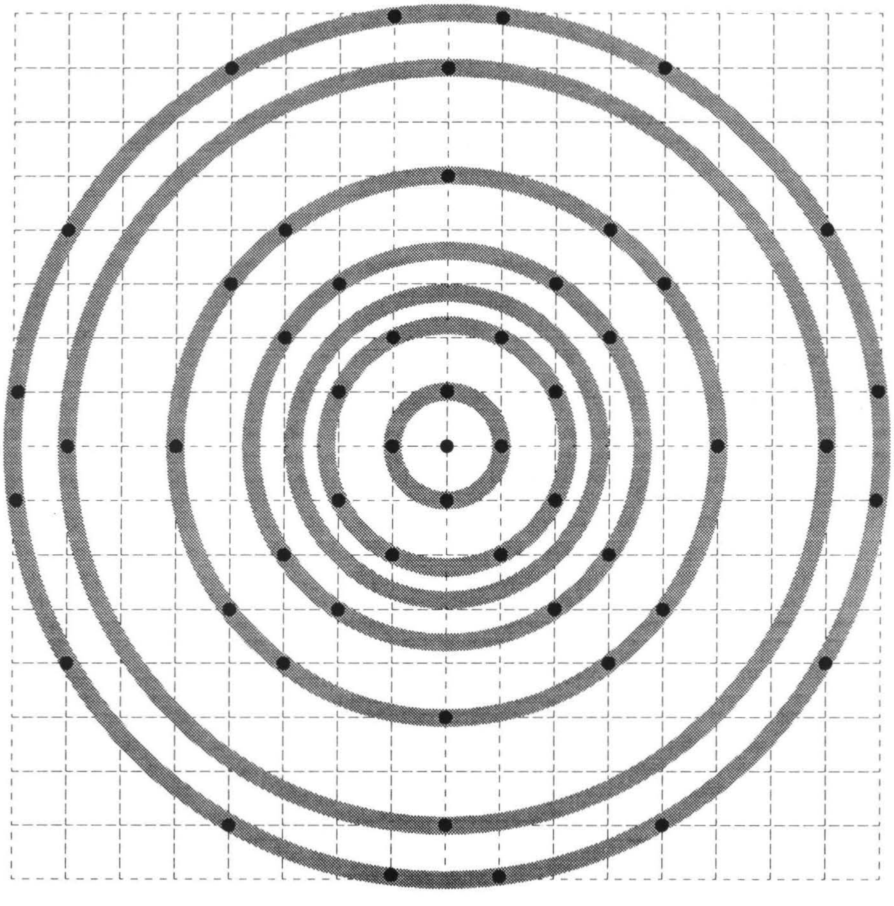
$$r_{24}(n) = \frac{16}{691}\Sigma d^{11} + \frac{33152}{691}\tau(n)$$

waarbij de sommaties steeds gaan over alle delers van het getal n; en

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n = x\{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)\ldots\}^{24}.$$

Zowel de sommen over de machten van de delers van het getal n, als de functie $\tau(n)$ van Ramanujan zijn multiplicatief.

Een deel van de verklaring van dit multiplicatieve gedrag is te vinden in onderzoekingen van H. MINKOWSKI (1884), C.L. SIEGEL (1935) en A. WEIL (1962).



n	0	1	5	7	13	25	49	65							
$\tau_2(n)$	1	4	8	0	8	12	4	16							

Cursusgeld

Het cursusgeld bedraagt *f* 75.-, waarbij de syllabus is inbegrepen. Dit bedrag is echter exclusief de kosten van maaltijden.

Aanmelding

Door het inschrijfformulier achterin deze brochure in te vullen en op te sturen naar:

Stichting Mathematisch Centrum
T.a.v. Mevrouw M. Bruné
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

en tegelijkertijd het cursusgeld (vermeerderd met evt. kosten van maaltijden) over te boeken naar bank rek.nr. 31.35.57.977 van de Stichting Wiskunde en Informatica Conferenties bij de RABObank te Amsterdam (gironumer van de bank is 187744) onder vermelding van uw naam en VC95.

Plaats

Amsterdam: CWI, Kruislaan 413, zaal Z011.
Eindhoven: Rekencentrum van de Technische Universiteit Eindhoven, Den Dolech 2.

Syllabus

De syllabus zal worden uitgereikt bij aankomst op de cursus.

Informatie

Voor nadere informatie over de Vakantiecursus kunt u zich wenden tot mevrouw M. Bruné, tel. 020-5924249.

SPREKERS

Prof. Dr. J. M. Aarts
Van Kinschotstraat 13, 2614 XJ Delft, 015-126448 wg. 015-785399/2697
e-mail: j.m.aarts@twi.tudelft.nl

Dr. A. G. van Asch
Beneden Molenweg 3D, 4112 NS Beusichem, 03453-1888, wg. 040-474280
e-mail: wsinaa@win.tue.nl

Prof. Dr. F. van der Blij
Ruysdaellaan 6, 3723 CC Bilthoven, 030-283168

Prof. Dr. A. W. Grootendorst
Aardbeistraat 11, 2564 TM Den Haag, 070-3232936

Dr. J. P. Hogendijk
Dassenlaan 17, 3734 HB Den Dolder, 030-287968 wg. 030-533697
e-mail: hogend@math.ruu.nl

Dr. Ir. C. W. A. M. van Overveld
Serlioweg 14, 5624 KA Eindhoven, 040-457953 wg.040-474416
e-mail: wsinkvo@win.tue.nl

Dr. P. Stevenhagen
p/a Fac. Wiskunde en Informatica Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam, wg. 020- 5255202, hs. 020- 6204588
e-mail: psh@fwi.uva.nl

AANMELDINGSFORMULIER
VAKANTIECURSUS 1995

KEGELSNEDEN EN KWADRATISCHE VORMEN

Ondertekende,

Naam: ______________________________

Functie: ______________________________

Adres: ______________________________

Telefoon: ______________________________

Postcode: ______________________________

Woonplaats: ______________________________

wenst deel te nemen aan de Vakantiecursus 1995, die zal worden gehouden te

A.	Eindhoven op do. 17 en vrij. 18 augustus 1995	ja/nee*
	(deelname aan lunch op donderdag 17 augustus (f 15.=)	ja/nee*
	(deelname aan lunch op vrijdag 18 augustus (f 15.=)	ja/nee*
B.	Amsterdam op vrij. 1 en zat. september 1995	ja/nee*
	Deelname aan warme maaltijd op vrijdag 1 sept. (f 20.=)	ja/nee*
	Deelname aan lunch op zaterdag 2 sept. (f 15.=)	ja/nee*

en heeft het verschuldigde bedrag overgemaakt (voor rekeningnummers zie pag. 20)

Degenen die prijs stellen op een nascholingscertificaat wordt verzocht dit te berichten aan Mevrouw M. Bruné (Stichting Mathematisch Centrum), onder nauwkeurige vermelding van naam en voornamen (zonder afkortingen), geboortedatum en geboorteplaats.

Gelieve dit formulier vóór 15 augustus 1995 op te sturen naar:

Stichting Mathematisch Centrum
T.a.v. Mevrouw M. Bruné
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

*Doorhalen wat niet van toepassing is