

Vakantiecursus 1997

Rekenen op het toeval

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et Epistola Gallicè scripta

DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.



BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cDc lccc xliii.



22/23 augustus 1997 in Amsterdam
28/29 augustus 1997 in Eindhoven

Stichting Mathematisch Centrum

Vakantiecursus 1997

voor leraren in de exacte vakken VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden

De vakantiecursus die de Stichting Mathematisch Centrum in 1997 organiseert heeft als thema:

Rekenen op het Toeval

Ook dit jaar betreft het een tweedaagse cursus, die zowel in Eindhoven als in Amsterdam wordt gehouden en wel op

vrijdag 22 augustus en zaterdag 23 augustus in Amsterdam

in het CWI, Kruislaan 413 te Amsterdam.

Op vrijdag bestaat daar de mogelijkheid gemeenschappelijk een warme maaltijd te gebruiken ($f\ 20,-$), terwijl op zaterdag de mogelijkheid bestaat gemeenschappelijk te lunchen ($f\ 15,-$). Indien men aan één of beide maaltijden wenst deel te nemen, dient men de hieraan verbonden kosten tezamen met het inschrijfgeld te voldoen.

en op

donderdag 28 augustus en vrijdag 29 augustus 1997 in Eindhoven

in het Rekencentrum van de Technische Universiteit Eindhoven, Den Dolech 2 te Eindhoven.

Hier is gelegenheid voor een gemeenschappelijke lunch op ieder van de cursusdagen.

Indien men aan één of meer lunches wenst deel te nemen, dient men de hieraan verbonden kosten ($f\ 15,-$ per lunch) tezamen met het inschrijfgeld te voldoen.

Aanmelding voor deelname aan de cursus kan geschieden door het aanmeldingsformulier achterin deze brochure in te vullen en vóór 15 augustus 1997 op te sturen aan het CWI.

NB. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit.

Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar.

Degene die daarop prijs stelt, gelieve dit bij aanmelding te vermelden.

Ten geleide

In dit jaar is het onderwerp van de vacatiecursus -*Rekenen op het Toeval*- niet alleen nauw verbonden met vragen uit de praktijk van alledag, maar het heeft ook rechtstreeks verband met de stof die bij het VWO op dit ogenblik wordt onderwezen, terwijl dit thema daar wellicht in de toekomst een grotere plaats zal innemen. De voorbereidingscommissie prijst zich dan ook gelukkig dat tot de sprekers zowel personen behoren die direct betrokken zijn bij de ontwikkeling van dit vakgebied, alsook personen die nauwe banden onderhouden met het VWO en de ontwikkeling van de daar vigerende en geplande leerstof.

Zoals gebruikelijk is geworden, vormen enkele historische schetsen het uitgangspunt. Vervolgens een aantal fundamentele theoretische beschouwingen en tenslotte een aantal toepassingsgebieden en zeer moderne illustraties (fractals), terwijl er ook gelegenheid geboden wordt voor zelfwerkzaamheid.

De omslag van deze brochure geeft daarbij een indicatie van de omspannen periode: het titelblad van de *Ars conjectandi* van Jacob Bernoulli (1713) en de *Varen van Barnsley* (1988).

Als eerste oriëntatie voor potentiële deelnemers volgt nu een *Series Lectionum*.

De eerste lezing in deze cursus -die van mevrouw dr. I.H. Stamhuis- schetst, zoals de titel reeds doet vermoeden, de historische ontwikkeling van de statistiek van louter verbale, kwalitatieve wetenschap, tot de moderne statistiek, verdeeld in beschrijvende statistiek en mathematische statistiek. Het als eerste genoemde deel verzamelt en bewerkt de gegevens en legt die in getallen vast, het tweede formuleert conclusies daaruit op grond van steekproeven, waarbij de kanstheorie een grote rol speelt. Spreekster kiest haar uitgangspunt aan het begin van de negentiende eeuw met de figuur van Adriaan Kluit (die als hoogleraar Geschiedenis in Leiden in 1806 de eerste hoogleraar statistiek werd) en vervolgt haar weg tot aan het begin van onze eeuw en besluit met Galton en Pearson († 1936).

Drs. W. Kleijne voert ons terug naar het begin van de kansrekening, d.w.z. naar het werk van Christiaan Huygens dat oorspronkelijk verscheen in het Latijn onder titel *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (1657), maar in 1660 een vertaling in het Nederlands beleefde: *Van Rekeningh in Spelen van Geluck*. Hierin worden al eerder gevoerde discussies over dobbel- en kansspelen geanalyseerd. Aansluitend wordt de opkomst van de levensverzekeringswiskunde (de *Waerdije* van Jan de Witt uit 1671) aan de orde gesteld. Een interessant detail: drs. Kleijne bereidt een bewerking -in hedendaags Nederlands- voor van de zojuist genoemde *Rekeningh*, die in dit najaar zal verschijnen.

Prof.dr. A.G.M. Steerneman zet in zekere zin de lezing van mevrouw dr. Stamhuis voort. Zijn doel is het intuïtieve begrip 'schatten' nader te preciseren.

Het wezen van de statistiek definieert hij als het trekken van algemeen geldende conclusies uit onvolledige en onnauwkeurige waarnemingen en het aangeven van de betrouwbaarheid van het resultaat. De basis hiervoor is de kansrekening.

Aan de hand van het Bernoulli experiment licht de spreker dit toe waarbij uiteraard het begrip 'kans' zorgvuldig geanalyseerd wordt.

Een belangrijke, interessante en relatief recente toepassing van de kansrekening is de theorie van de wachttijden en wachtrijen met als grondlegger Agner Erlang (1878 -

1929). Hieraan is de lezing van *prof.dr.ir. J.H.A. de Smit* gewijd.

Tevens wijst deze met nadruk op het interdisciplinaire karakter van deze tak van de wiskunde. Bijzonder interessant, speciaal voor leraren, is de aandacht die spreker geeft aan de plaats die dit onderwerp kan innemen in het nieuwe VWO-programma, temeer waar de spreker ten nauwst betrokken is bij de opstelling daarvan.

De lezing van *prof.dr. C.A.J. Klaassen* is direct op de praktijk gericht. Het gaat hier om de vraag naar de vereiste omvang van een steekproef bij het keuren van waren. De gedachte is deze: wanneer een producent achtereenvolgens partijen goederen aanlevert die aan de eisen voldoen, dan kan daarna met een steekproef van geringere omvang worden volstaan (Bonus), maar indien niet, dan wordt er strenger opgetreden (Malus). Deze gedachte wordt omgezet in een formule voor de daartoe vereiste omvang van de steekproef.

Sinds 1989 (*Wiskunde in de Gouden Eeuw*) stelt een 'oefenuur' de toehoorders in de gelegenheid actief aan de cursus deel te nemen. Het initiatief daartoe werd destijds genomen door *dr. J.A. van Maanen*, die ook dit jaar een bijdrage levert en wel in de vorm van een met zorg samengestelde selectie uit vraagstukken die zich de laatste twee eeuwen voordeden op het gebied van de kansrekening.

U kunt nu al beginnen aan de opgave die in deze brochure is opgenomen.

De voordracht van *prof.dr. J.M. Aarts* legt verband tussen het onderwerp *Chaos* van het vorige jaar en het thema *Toeval* van dit jaar, van welk verband men het bestaan reeds intuïtief zou vermoeden. Spreker laat ons zien hoe men met behulp van geschikt gekozen kansverdelingen fraaie fractals kan genereren.

Uit dit summiere overzicht kan men reeds opmaken dat het een zeer interessante cursus belooft te worden, waarin -naar wij hopen- veel begrippen waarover toch bij velen een waas van geheimzinnigheid ligt, verhelderd zullen worden.

De voorbereidingscommissie hoopt dat de deelnemers veel nieuwe kennis zullen opdoen en veel oude kennissen zullen ontmoeten, hetgeen niet betekent dat 'nieuwe gezichten' niet welkom zouden zijn; in tegendeel!

A.W. Grootendorst

Programma Amsterdam

22 en 23 augustus 1997

vrijdag 22 augustus

- 15.00 - 15.25 Ontvangst, koffie
- 15.25 - 15.30 Opening
- 15.30 - 16.15 Historische Inleiding: Statistiek, van Woorden naar Waarden,
I. Stamhuis, VU Amsterdam
- 16.15 - 16.45 Pauze
- 16.45 - 17.30 Het zekere voor het onzekere,
W. Kleijne, Inspectie van het Onderwijs Leeuwarden
- 17.30 - 18.30 Warme maaltijd
- 18.30 - 19.15 Verdeelde kansen,
H.G. Dehling, RU Groningen
- 19.15 - 19.45 Pauze
- 19.45 - 20.30 Schatten,
A.G.M. Steerneman, RU Groningen

zaterdag 23 augustus

- 10.00 - 10.45 Wachttijden en wachtrijen,
J.H.A. de Smit, UT Enschede
- 10.45 - 11.15 Pauze
- 11.15 - 12.00 Bonus-Malus in kwaliteitscontrole,
C.A.J. Klaassen, UvA Amsterdam
- 12.00 - 13.00 Lunch
- 13.00 - 13.45 Problemen van Pascal tot Poisson,
J.A. van Maanen, RU Groningen
- 13.45 - 14.15 Pauze
- 14.15 - 15.00 Hoe het Toeval Fractals voortbrengt,
J.M. Aarts, TU Delft
- 15.00 - 15.05 Sluiting

Programma Eindhoven

28 en 29 augustus 1997

donderdag 28 augustus

- 10.00 - 10.55 Ontvangst, koffie
- 10.55 - 11.00 Opening
- 11.00 - 11.45 Historische Inleiding: Statistiek, van Woorden naar Waarden,
I. Stamhuis, VU Amsterdam
- 11.45 - 12.15 Pauze
- 12.15 - 13.00 Het zekere voor het onzekere,
W. Kleijne, Inspectie van het Onderwijs Leeuwarden
- 13.00 - 14.00 Lunch
- 14.00 - 14.45 Verdeelde kansen,
H.G. Dehling, RU Groningen
- 14.45 - 15.15 Pauze
- 15.15 - 16.00 Schatten,
A.G.M. Steerneman, RU Groningen

vrijdag 29 augustus

- 10.00 - 10.45 Wachttijden en wachtrijen,
J.H.A. de Smit, UT Enschede
- 10.45 - 11.15 Pauze
- 11.15 - 12.00 Bonus-Malus in kwaliteitscontrole,
C.A.J. Klaassen, UvA Amsterdam
- 12.00 - 13.00 Lunch
- 13.00 - 13.45 Problemen van Pascal tot Poisson,
J.A. van Maanen, RU Groningen
- 13.45 - 14.15 Pauze
- 14.15 - 15.00 Hoe het Toeval Fractals voortbrengt,
J.M. Aarts, TU Delft
- 15.00 - 15.05 Sluiting

Historische Inleiding: Statistiek, van Woorden naar Waarden

Ida Stamhuis

Statistiek een wetenschap, waarin woorden het centrale bestanddeel vormen. Dat kunnen wij ons nauwelijks voorstellen. Toch is het zo geweest en daarvoor hoeven we niet verder terug te gaan dan het begin van de vorige eeuw. Die opvatting was toen zelfs wijd verbreid. Dat blijkt uit het feit dat we een dergelijke omschrijving in een encyclopedie vinden, namelijk in de eerste druk van het Woordenboek voor Kunsten en Wetenschappen van G. Nieuwenhuis uit 1826. Daar vinden we onder het hoofd 'statistiek':

"Statenkunde, statenbeschrijving, uit staatkundige oogpunten beschouwd. Zij bepaalt zich tot wezenlijk voorhanden zijnde staten en niet tot denkbeeldige, en draagt dus den tegenwoordigen toestand van eenen staat voor, zoo als die in zijne gesteldheid, vereeniging en de werkzaamheden zijner krachten gegrond is. Hierdoor is zij een uitmuntend voorbeeld voor de Staatskunde, en een leerrijk oefenschool voor den staatsman; alleen moet zij in geen bloot tabellenwerk en getalregisters ontaarden."

Het is niet alleen zo dat het als normaal werd beschouwd dat statistiek uit woorden bestond, nee men meende er zelfs voor te moeten waarschuwen dat statistiek niet teveel over waarden, zoals te vinden in tabellen en getalregisters, zou mogen gaan!

Deze omschrijving vormt toch wel een grote tegenstelling met wat wij nu onder statistiek verstaan. In 1983 in de achtste druk van de Winkler Prins Encyclopedie lezen we:

"Statistiek omvat de wetenschap, de methodiek en de techniek van het verzamelen, bewerken en interpreteren van statistische gegevens. Men onderscheidt beschrijvende (...) en stochastische of mathematische (...) statistiek. (...)

Beschrijvende statistiek. Deze omvat het waarnemen, verzamelen en bewerken van gegevens over veelal grote aantallen objecten. (...)

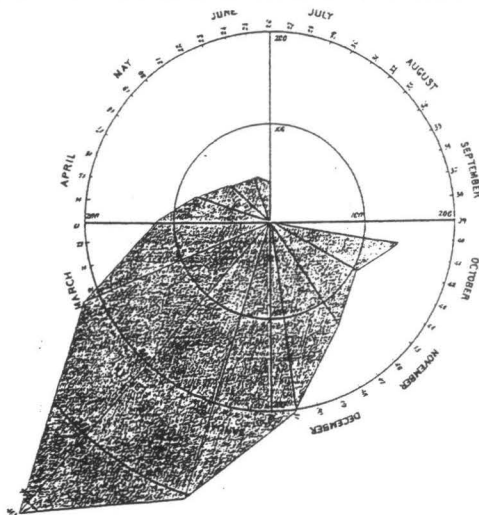
Mathematische of wiskundige statistiek. Dit is het onderdeel van de statistiek dat zich bezighoudt met het formuleren van conclusies omtrent populaties, op grond van steekproeven die uit die populaties zijn getrokken. Bij het vaststellen van de betrouwbaarheid van deze conclusies speelt het kansbegrip een grote rol."

Deze omschrijving is meer herkenbaar voor ons.

Als we de historische ontwikkeling van de statistiek tussen bovengenoemde jaartallen 1826 en 1983 bestuderen, dan zien we dat de moderne statistiek uit de ouderwetse statistiek is ontstaan, maar dat op de wording van de moderne statistiek meer kennisgebieden een invloed hebben uitgeoefend, met name de kanstheorie. Maar voordat de kanstheorie in de statistiek kon worden geïntegreerd, moest er het een en ander met die statistiek gebeuren.

Aanvankelijk was de statistiek ontstaan in Duitsland in de achttiende eeuw als een vernieuwing in het denken over staatkundig bestuur. Het besef begon te ontstaan dat het

te geraken. Daartoe moesten feiten over toestanden in het land worden verzameld. Men kwam er al spoedig achter dat, wilde men er enige lijn in kunnen ontdekken, dat enigszins systematisch moest gebeuren. Een volgende ontwikkeling was dat men bemerkte dat het moeilijk was om kwalitatieve informatie van verschillende landen met elkaar te vergelijken. Zo kwam als het ware op natuurlijke wijze de behoefte aan getalsmatige informatie op. En dan zijn we in de negentiende eeuw aangeland. Deze eeuw kan gekarakteriseerd worden als de eeuw van het getal. Een nieuw fenomeen van deze eeuw is, dat er mensen deel van uitmaken die gebiologeerd zijn door getallen. In de loop van de eeuw gaat men statistiek dan ook steeds meer identificeren met getalsmatige gegevens. Om enige structuur in deze gegevens aan te kunnen brengen gaat men ze meer en meer bewerken en ontstaat een wetenschap over waarden.



FIGUUR 1. a) Florence Nightingale. b) Een door haar ontworpen sterftediagram. In dit diagram wordt de maandelijks sterfte in het hospitaal te Scutari als fractie van de patiëntenpopulatie weergegeven.

In de lezing zal deze ontwikkeling, voor zover die in de negentiende eeuw heeft plaatsgevond geïllustreerd worden aan de hand van de opvattingen over statistiek van een aantal personen, namelijk de eerste Nederlandse hoogleraar in de statistiek Adriaan Kluit (1735-1807), die de oude opvatting over statistiek huldigde. De Belgische wiskundige Adolphe Quetelet (1796-1874) propageerde al in de veertiger jaren opvattingen over een kwantitatieve wetenschap over de samenleving. Maar dat was voorsnog veel te pretentief. Quetelet heeft wel veel invloed uitgeoefend. Een 'getallenfreak' die grote bewondering voor de opvattingen van Quetelet had, was de Engelse Florence Nightingale (1822-1911). Ze trachtte getalsmatige informatie zo samen te vatten dat er heldere conclusies uit getrokken kunnen worden. Deze 'lady with the lamp' wordt daarom ook wel een 'passionate statistician' genoemd. Een andere getallenfreak, was haar land- en leeftijdgenoot Francis Galton (1820-1910). Zijn motto was 'whenever you can, count', en dat heeft hij op vele manieren in praktijk gebracht. Hij hield zich, evenals Quetelet eerder had gedaan, bezig met kansverdelingen, en in het bijzonder met de normale verdeling. Hij 'ontdekte' correlatie en een kanstheoretisch jasje te steken. De statistiek bleek er intussen wel 'klaar' voor. Galtons leerling Karl Pearson zou daaraan beslissende bijdragen leveren. Maar dan zijn we in de twintigste eeuw aangeland.

Het zekere voor het onzekere

W. Kleijne



VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK.



Al-hoewel in de spelen, daer alleen het geval plaets heeft, de uytkomsten on-seecker zijn, soo heeft nochtans de kansse die yemandt heeft om te winnen of te verliesen, haere seeckere bepaling.

Al-hoewel in de spelen, daer alleen het geval plaets heeft, de uytkomsten on-seecker zijn, soo heeft nochtans de kansse die yemandt heeft om te winnen of te verliesen, haere seeckere bepaling.

Met deze zin begint Christiaan Huygens (1629-1695) zijn werk *Van Rekeningh in Spelen van Geluck*, waarvan de oorspronkelijke Nederlandse versie in 1660 verscheen.

De publicatie van dit werk kunnen we zien als de markerings van het begin van de kansrekening. Uiteraard ontstond het boekje niet uit het niets. In de jaren die aan de publicatie voorafgingen, was in Frankrijk een discussie op gang gekomen over vragen met betrekking tot dobbel- en kaartspelen.

Zo legde Antoine Gombauld, Chevalier de Méré, aan Pascal de volgende problemen voor.

1. Hoe moet de inzet verdeeld worden als een spel tussen twee spelers voor het einde wordt afgebroken?
2. Bekend was dat het bij vier worpen met één dobbelsteen voordelig is te wedden dat er minstens één 6 boven komt. Nu wordt als volgt geredeneerd. Bij het werpen met twee dobbelstenen is het aantal mogelijke uitkomsten 36, d.w.z. zes keer zo groot als bij het werpen met één steen. Dan zouden 24 worpen (dat is 6×4 worpen) met één steen ook voordeel moeten opleveren op het voorkomen van twee zessen. Waarom zijn de ervaringen in de praktijk niet zo gunstig als deze redenering zou doen vermoeden?

Dergelijke vragen vormden in 1654 ook het onderwerp van een briefwisseling tussen Fermat en Pascal. Tijdens zijn verblijf in Parijs werd door deze correspondentie de belangstelling van Huygens voor dit soort problemen gewekt. Met vrij grote spoed heeft hij vervolgens zijn *Rekeningh* hierover geschreven: al in 1657 verscheen de Latijnse versie onder de titel *De Ratiociniis in Ludo Aleae*.

Het hing zo te zeggen in de 17de-eeuwse lucht om te gaan nadenken over, zoals wij nu zouden zeggen, kanstheoretische problemen. Niet alleen ging het daarbij over kansspelen, maar het was tevens de tijd waarin de levensverzekeringswiskunde opkwam. Voor premieberekeningen was het van belang dat men kon beschikken over z.g. sterftetafels.

Bekend is de briefwisseling van Christiaan Huygens met zijn broer Lodewijk over de te verwachten levensduur van een mens, dus over de kans dat iemand een bepaalde leeftijd kan bereiken. In de toenmalige terminologie: is het voordelig of onvoordelig om te wedden dat iemand van (bijv.) 16 jaar ten minste (bijv.) 36 jaar wordt? In ons huidige jargon betekent dit de vraag naar de desbetreffende kans.

In ons land was het Johan de Witt die in 1671 over dit onderwerp zijn magistrale werk *Waerdije van Lijfrenten naar proportie van losrenten* liet verschijnen.

Met de *Rekeningh* en de *Waerdije* zijn in de tweede helft van de 17de eeuw twee standaardwerken verschenen die gedurende lange tijd het gezicht van de wetenschap op de beide terreinen hebben bepaald.

Een aardige bijzonderheid is bovendien nog dat zowel Christiaan Huygens als Johan de Witt leerlingen waren van de Leidse hoogleraar Frans van Schooten jr. Deze laatste ook heeft voor publicatie van de *Rekening* gezorgd door de Nederlandse tekst op te nemen in zijn leerboek *Mathematische Oeffeningen*.

De *Rekeningh* is opgebouwd uit 14 z.g. *Voorstellen*, waarin telkens een probleem gesteld wordt en een oplossing daarvan wordt toegevoegd. Zo vormen de beide vragen van de Chevali de Méré in zekere zin de kern van het werk. De eerste vraag komt in het vierde Voorstel aan de orde en de tweede vraag in het tiende en het elfde Voorstel.

Daar Huygens niet kon teruggrijpen op een algemene kanstheorie, moest hij voor ieder Voorstel een eigen sluitende redenering opzetten. Door spitsvondige redenering vindt Huygens als antwoorden

- op vraag 1: 3 tot 1;
- op vraag 2:
 - bij 4 keer gooien kan men 671 tegen 625 zetten om één keer een 6 te gooien, dat is meer dan 1 tegen 1;
 - pas bij 25 worpen met een steen geeft het voor het eerst voordeel bij het wedden op het voorkomen van twee zessen.

Ook voor ons blijft het een uitdaging met elementaire middelen deze problemen op te lossen. Maar bovenal is het buitengewoon fascinerend te zien hoe uit het niets, met zeer geringe theoretische middelen een indrukwekkend geheel wordt opgebouwd.

IV. VOORSTEL

Genomen dan dat ick tegens een ander speele ten dryen uyt, en dat ick alreede 2 spelen hebbe en hy maer een. Ick wil weeten, ingevalle wy het spel niet en wilden voortspeelen, maer liet geen ingefet is gerechtelijck wilden deelen, hoeveel my daer van komen soude.

Verdeelde kansen

Herold Dehling

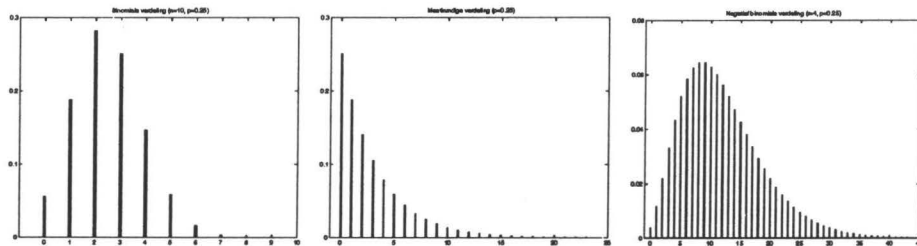
In deze voordracht zal de aandacht uitgaan naar het allereenvoudigste kansexperiment, namelijk één met slechts twee mogelijke uitkomsten, succes of mislukking. Zo'n experiment is gemakkelijk te realiseren, bijvoorbeeld met een munt (kruis of munt), een dobbelsteen (wel of geen 6), een vaas met ballen (rood of zwart) of, zoals we het tegenwoordig natuurlijk doen, met de computer. Om precies te zijn hebben we niet één enkel experiment nodig, maar een rij van onafhankelijke herhalingen van deze zogenaamde Bernoulli-experimenten nodig. We zullen laten zien hoe ondanks de eenvoud van de achterliggende experi-



FIGUUR 1. Uitkomst van een rij van Bernoulli experimenten met succeskans $p = 0.25$.

menten er heel interessante verdelingen te voorschijn kunnen komen, waaronder enkele van de meest bekende zoals de binomiale, meetkundige, negatief-binomiale, Poisson-, exponentiële, gamma en de normale.

Direct kunnen we al drie stochasten definiëren, namelijk het aantal successen in de eerste n experimenten (S_n), het aantal mislukkingen dat aan het eerste succes voorafging (T) en tenslotte het aantal mislukkingen dat aan het r^e succes voorafging (T_r). Deze



FIGUUR 2. Kansmassafuncties van de binomiale, meetkundige en negatief-binomiale verdeling, met $n = 10$, $p = 0.25$ en $r = 4$.

drie stochasten hebben respectievelijk een binomiale, meetkundige en negatief-binomiale verdeling met bijbehorende kansmassafuncties

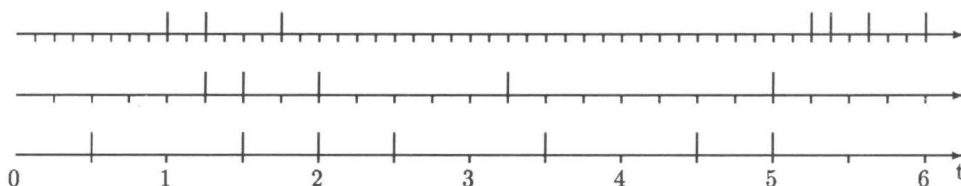
$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad (0 \leq k \leq n)$$

$$P(T = k) = (1-p)^k p \quad (k \geq 0)$$

$$P(T_r = k) = \binom{r+k-1}{r-1} (1-p)^k p^r \quad (k \geq 0)$$

(zie figuur 2 voor grafieken hiervan).

Uitgaande van deze elementaire stochasten kunnen we door verschillende limietovergangen aan nieuwe verdelingen komen. Voor de eerste limiet voeren we onafhankelijke Bernoulli-experimenten met een steeds hogere frequentie en evenredig dalende succesansen uit. Preciezer: experimenten op de tijdstippen $\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \dots$ met succesansen $p_N = \frac{\lambda}{N}$, waarbij $\lambda > 0$ een parameter is. Frequentie en succesans zijn zo gekozen dat je in



FIGUUR 3. Rijen van Bernoulli-experimenten, uitgevoerd met frequenties $N = 2, 4, 8$ en intensiteit $\lambda = 1$.

een tijdsinterval van lengte 1 precies λ successen verwacht. Het waargenomen aantal successen in het tijdsinterval $(a, b]$ noteren we met $S_N(a, b)$. Enig nadenken leert ons dat we in $(a, b]$ precies $[Nb] - [Na]$ experimenten uitvoeren en dat $S_N(a, b)$ dus een binomiale verdeling heeft met parameters $[Nb] - [Na]$ en $p_N = \frac{\lambda}{N}$ (met $[x]$ noteren we het entier van x , dus het grootste gehele getal kleiner of gelijk aan x .) Je kunt nu laten zien dat als $N \rightarrow \infty$

$$P(S_N(a, b) = k) \rightarrow e^{-\lambda(b-a)} \frac{(\lambda(b-a))^k}{k!}.$$

Deze limiet is een Poisson-verdeling met parameter $\lambda(b-a)$. Verder convergeert ook de verdeling van de wachttijd tot het eerste succes of tot het r^e succes, en wel naar een exponentiële of gamma verdeling, respectievelijk. Ook het proces van Bernoulli-experimenten zelf blijkt voor $N \rightarrow \infty$ een limiet te hebben, namelijk een Poisson-proces met intensiteit λ .

Een andere limiet krijg je als je de succesans p vast laat en het aantal successen bij n experimenten bekijkt. Volgens de wet van grote aantallen zal S_n ongeveer gelijk zijn aan np - je verwacht dat een p^e deel van alle experimenten een succes oplevert. Je kunt je nu afvragen hoe sterk S_n van np zal afwijken. Een antwoord hierop geeft de Centrale Limiet Stelling welke leert dat

$$P(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b) \rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

De integrand in het rechter lid is een speciaal geval van de normale dichtheid $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, en wel met $\mu = 0$ en $\sigma^2 = 1$. Deze functie gaat als het ware dagelijks door de handen van miljoenen Duitsers, en wel op het 10DM briefje ter ere van de beroemde wiskundige Carl Friedrich Gauss.

Als de tijd het toelaat zullen we ook nog wat exotischere delen van ons kanstheoretisch tuintje opzoeken. In de afdeling 'symmetrische Bernoulli-experimenten' ($p = \frac{1}{2}$ dus) vind je dan antwoorden op vragen zoals '*hoe lang is de langste opeenvolgende rij van successen onder de eerste 100 experimenten*' of '*hoe vaak is $S_n > 0$ onder de eerste 100 experimenten*' of ook '*hoe ziet de rij $(S_n)_{n \geq 1}$ er vanuit een afstand bekeken uit*'. Wie nieuwsgierig is, kan natuurlijk alvast thuis op de computer experimenteren.

Schatten

A.G.M. Steerneman

Het woord "schatten" kan worden opgevat als het meervoud van het woord "schat". Dit woord heeft betrekking op iets waardevols, hetzij in de menselijke zin als het betrekking heeft op iemand op wie men gesteld is, hetzij in de stoffelijke zin als het gaat over iets kostbaars als goud, sieraden en dergelijke. Bij dat laatste hoort ook dat het verborgen is of was. Bij schatten in de laatste betekenis gaat het dan bovendien om zoeken, opgraven, opduiken, etc. Men weet niet wat de speurtocht zal opleveren, maar het is wel de moeite waard. Hoewel dit laatste niet met volstrekte zekerheid op voorhand vaststaat.

Iets soortgelijks geldt voor schatten in de meer statistische zin. Het werkwoord "schatten" betekent zoiets als bij benadering proberen vast te stellen, ramen, gokken, enz. In de statistiek is schatten een soort mengvorm van een zoekproces en het komen tot een raming. Dit gebeurt wel op een min of meer systematische wijze. Voordat we het begrip schatten in de statistische zin verder kunnen verhelderen, is het van belang even stil te staan bij waar het in de statistische wetenschap om gaat.

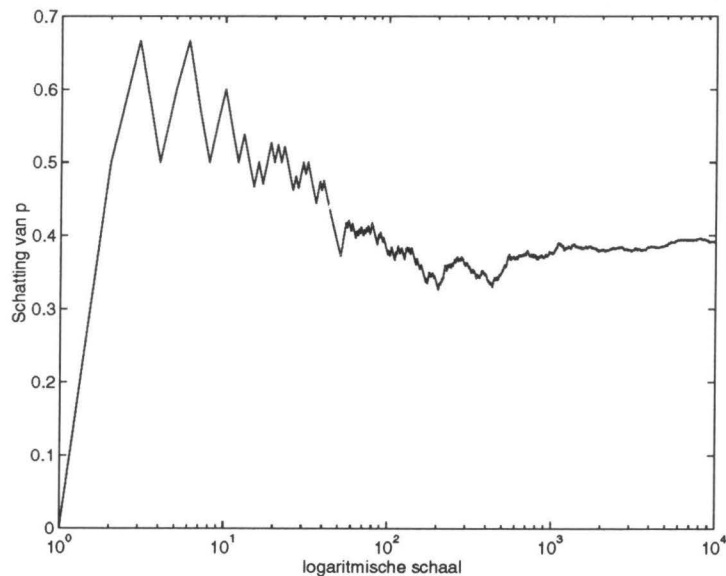
Statistiek heeft inderdaad te maken met cijfermatige gegevens. Het ordenen van dergelijke gegevens is een aspect van het werk van een statisticus. Hij of zij moet in staat zijn gegevens op een overzichtelijke manier te presenteren door middel van tabellen en grafieken. Dit is echter maar een klein deel van het eigenlijke werk. Sommigen laten de geschiedenis van de statistische wetenschap beginnen bij de eerste systematische tellingen, zoals de volkstelling onder keizer Augustus ten tijde van de geboorte van Christus. In de statistische discipline wordt echter het werk "Natural and political observations upon the bills of mortality" van de koopman John Graunt, verschenen in 1662, als het eerste echte statistische werk beschouwd. Zijn werk is één van de eerste werken op het gebied van de demografie en de statistiek. De actuariële wetenschappen vinden hier ook hun oorsprong, want Graunt was de eerste die een sterftetafel wist te construeren. Het knappe van Graunt was dat hij in staat was conclusies te trekken over een populatie van mensen op basis van onvolledige en onnauwkeurige gegevens. Dit is het wezen van de statistiek: algemeen geldende conclusies trekken op basis van onvolledige en onnauwkeurige waarnemingen en het aangeven van wat de betrouwbaarheid is van de resultaten.

Statistiek speelt een zeer belangrijke rol in het verkrijgen van nieuwe kennis en inzichten. Waar de bestaande kennis ophoudt en men door middel van goed nadenken niet verder komt, daar hanteert men het experiment of gebruikt men relevante cijfermatige gegevens die betrekking hebben op de probleemstelling.

Kansrekening is de basis voor de statistiek. Door er vanuit te gaan dat de waarnemingen zijn gegenereerd door een bepaald toevalsmechanisme is de statisticus in staat bepaalde conclusies te trekken door gebruik te maken van de wetten van het toeval. In feite maakt de statisticus een wiskundig model voor het mechanisme dat de uitkomsten heeft opgeleverd. Het is van groot belang dat bij het opzetten van experimenten men het toeval een afgewogen rol laat spelen omdat dit het trekken van conclusies op basis van beperkte gegevens mogelijk maakt.

Ter illustratie zal de statistische denkwijze worden uitgewerkt voor het Bernoulli experiment. Dit experiment heeft twee mogelijke uitkomsten, namelijk "succes" en "mislukking" aangegeven met de codes '1' en '0' resp. Men mag het experiment een aantal keren n uitvoeren. Er wordt verondersteld dat de afzonderlijke experimenten elkaar niet beïnvloeden. Stel de kans op succes is p . Laten de uitkomsten $x_1, \dots, x_n$ zijn. Hoe kunnen we nu p schatten? Het antwoord is wel bekend, men zal de fractie successen als gok voor p nemen. De theoretische statistiek probeert de vraag te beantwoorden of dit inderdaad een goed idee is. Voorts moeten we weten hoe betrouwbaar dit antwoord is. Hoe dicht ligt onze gok bij de werkelijke waarde? Dit eenvoudige model vormt het vertrekpunt voor een eerste kennismaking met het statistisch denken en handelen.

De figuur laat een simulatie zien waarbij er Bernoulli experimenten zijn gedaan met kans op succes $p = 0.4$. Deze kans wordt telkens opnieuw geschat als er weer een waarneming bij komt. Uit de figuur valt af te lezen dat de eerste trekking een mislukking was. Voor grote waarden van n ziet men de werking van de wet van de grote aantallen.



Wachttijden en wachtrijen

J.H.A. de Smit

Wachten is een verschijnsel waarmee ieder van ons dagelijks te maken heeft. Wachten op iemand met wie je een afspraak hebt, wachten bij een verkeerslicht of op de trein, wachten bij de dokter of in de supermarkt, maar ook wachten op een telefoonverbinding of op een aangeklikte pagina op het World Wide Web. Een niet onbelangrijk deel van ons leven gaat verloren met wachten en het is dan ook niet verbazingwekkend dat veel wiskundigen getracht hebben meer inzicht te krijgen in dit fenomeen.



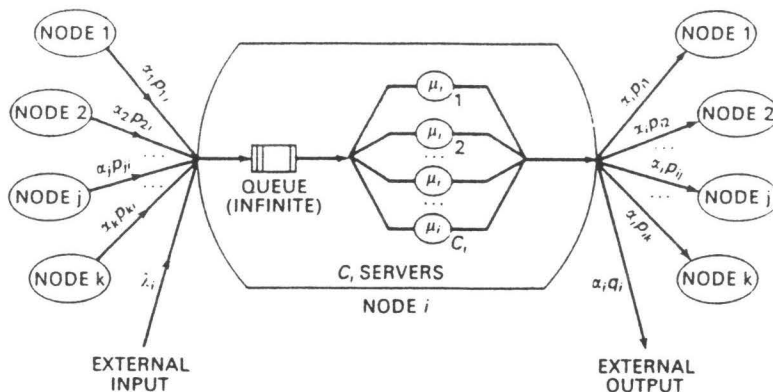
Afbeelding van A.K.Erlang

De Deense wiskundige Agner Krarup Erlang (1878-1929) wordt algemeen beschouwd als de grondlegger van de wiskundige theorie van het wachten. Hij was werkzaam bij de Telefoon Maatschappij van Kopenhagen. In die periode werden de telefonistes vervangen door de eerste automatische telefooncentrales. De vraag rees naar de gewenste capaciteit van zulke centrales om te zorgen dat de blokkeringskans, dus de kans om geen verbinding te krijgen, voldoende klein zou zijn. In de periode van 1909 tot 1920 publiceerde hij een reeks van artikelen (bijna allemaal in het Deens) waarmee hij de basis legde voor deze theorie. Sindsdien hebben vele grote wiskundigen op het terrein van de kansrekening zich intensief bezig gehouden met de verdere ontwikkeling van het vakgebied: A. Kolmogorov

(vanaf 1934), W. Feller (1939), J.L. Doob, B.V. Gnedenko, D.G. Kendall, om er enkele te noemen.

Het artikel van Feller uit 1939 ["Die Grundlagen der Volterraschen Theorie des Kampfes ums Dasein in Wahrscheinlichkeitstheoretischer Behandlung", Acta Bioth. Ser. A, 5, 11-40] markeerde een belangrijke doorbraak. Uit de titel blijkt al dat het helemaal niet gaat over wachten maar over de evolutie van een biologische populatie. In zijn artikel introduceerde Feller een klasse van stochastische processen, die nu bekend staat als Geboorten- en Sterfteprocessen. Wiskundig gezien bleken die tot dezelfde klasse te behoren als de processen die Erlang 30 jaar eerder had geanalyseerd.

Door de opkomst van nieuwe toepassingsgebieden, met name moderne telecommunicatienetwerken en flexibele productiesystemen, heeft het vakgebied in de tachtiger jaren een nieuwe impuls gekregen.



Schematische voorstelling van één knooppunt in een netwerk van wachtrijen

Die toepassingen gaven ook aanleiding tot de bestudering van geheel nieuwe modellen. Met name netwerken van wachtsystemen spelen daarbij een belangrijke rol. De wachttijdtheorie heeft altijd twee gezichten gehad: enerzijds richt ze zich op de oplossing van concrete praktische problemen, anderszijds geeft ze aanleiding tot de ontwikkeling van fundamentele inzichten. Typerend is dat de wachttijdtheorie gebruik maakt van veel andere takken van de wiskunde en soms ook aan de ontwikkeling daarvan bijdraagt. Voorbeelden zijn de theorie van orthogonale polynomen, de theorie van Wiener-Hopf integraal-vergelijkingen en uiteraard de kansrekening. Zo is de ontwikkeling van de theorie van de stochastische processen in belangrijke mate terug te voeren op dit vakgebied. Op dit moment is de wachttijdtheorie een bloeiend onderzoeksterrein, zoals ook blijkt uit de vele nieuwe boeken en tijdschriften, die geheel of gedeeltelijk aan dit vakgebied gewijd zijn.

In mijn voordracht zal ik ingaan op enkele eenvoudige modellen uit de wachttijdtheorie en de relatie van die modellen met andere gebieden van de wiskunde. Ik zal ook aandacht besteden aan de plaats van dit onderwerp in het nieuwe VWO Wiskunde-B programma.

Bonus-Malus in kwaliteitscontrole

C.A.J. Klaassen

Wanneer je een gouden ring bij de juwelier koopt, ga je er terecht vanuit dat het goudgehalte correct wordt opgegeven. Dit gehalte wordt gegarandeerd door de *Waarborg Platina, Goud en Zilver, N.V.* te Gouda. Dit onafhankelijk essai-laboratorium keurt alle voorwerpen van edelmetaal die in Nederland op de markt worden gebracht, en voorziet deze van een waarmerk. De merktekens die hiervoor worden gebruikt, zijn in de figuur aangegeven.

Controle op de kwaliteit van producten en diensten vindt in onze maatschappij buitengewoon veelvuldig plaats. Naast bij wet ingestelde keuringsdiensten als de *Waarborg Platina, Goud en Zilver, N.V.* valt te denken aan regelmatige eigen keuringen van bedrijven bij hun productieprocessen, maar ook aan bijvoorbeeld accountantscontroles. Meestal wordt daarbij van steekproefkeuring gebruik gemaakt. Laten we veronderstellen dat een zekere partij van N gelijksoortige producten moet worden gekeurd en dat van elk product door middel van een test of proef is vast te stellen of het aan de specificaties voldoet of niet. Om de kosten te drukken worden uiteraard niet alle N producten aan de test onderworpen, maar worden er op een aselechte manier n producten uit de partij gekozen en daarna getest. Op basis van de resultaten bij deze n producten wordt dan de gehele partij goed- of afgekeurd.

Bij de keuze van de steekproefomvang n moeten twee tegengestelde belangen in evenwicht worden gebracht:

- Het belang van de consument. Hoe groter n , hoe groter de consumentenbescherming oftewel hoe hoger de kwaliteit van de producten na inspectie.
- Het belang van de producent. Hoe kleiner n , hoe lager de keuringskosten.

Uiteraard is de keuze van n een statistisch probleem. De klassieke statistische theorie draagt hiervoor oplossingen aan die gebaseerd zijn op de toetsingstheorie en die met name goed bruikbaar zijn bij massa-productie, d.w.z. bij grote waarden van N , de partijomvang. In feite is een goed statistisch raamwerk voor steekproefkeuring geformuleerd door Dodge en Romig in 1929 en te beschouwen als een voorloper van de toetsingstheorie van Neyman en Pearson, waarvoor 1933 als geboortjaar kan gelden.

Bij de praktische implementatie van de keuringsschema's die de klassieke theorie heeft voortgebracht, worden vaak schakelregels geïntroduceerd voor de situatie waarin een producent een reeks partijen ter keuring aanbiedt. Zo suggereert ISO 2859 (International Standards Organization; standaard ISO 9000 is de laatste jaren sterk in het nieuws) om na het afkeuren van 2 van de laatste 5 partijen op strengere keuring over te gaan (dus n groter te kiezen) en na het goedkeuren van 10 partijen achtereen soepeler te werk te gaan en n kleiner te kiezen. Voor dit soort vuistregels is echter nauwelijks theoretisch statistische onderbouwing te vinden.

$$n \geq \frac{N}{(C + N - 1)\pi_0 + 1}.$$

Binnen de Europese Unie betekenen open grenzen dat ook keuringsdiensten met elkaar in concurrentie gaan. Chaos is daarbij alleen te voorkomen als keuringsprocedures worden gestandaardiseerd. Het Bonus-Malus systeem is dan een mogelijkheid waarvan de verdere ontwikkeling nog veel statistisch onderzoek zal vergen. Dit systeem is overigens ontstaan uit onderzoek gesubsidieerd door de *Waarborg te Gouda*.

GENERALITE			
	Grote voorwerpen (reuzen auto's)	Grote voorwerpen (reuzen auto's)	Grote en kleine voorwerpen (reuzen auto's)
PLATINA	Onder voorbeeld nr. 10 beschrijven		Onder voorbeeld nr. 10 beschrijven
980 Onderscheiden			
GOUD	Onder voorbeeld nr. 10 beschrijven		Onder voorbeeld nr. 10 beschrijven
918 Onderscheiden (23 keuzes)			
833 Onderscheiden (20 keuzes)			
730 Onderscheiden (18 keuzes)			
595 Onderscheiden (14 keuzes)			
SILVER	Onder voorbeeld nr. 10 beschrijven		Onder voorbeeld nr. 10 beschrijven
929 Onderscheiden (16 keuzes)			
835 Onderscheiden (9 keuzes)			
800 Onderscheiden (6 keuzes)			

GEWICHTSLANDUIDING			
		s.f.s. 1 v/2 20	

JAARLETTERS **			
1990	1997	2004	
1991	1998	2003	
1992	1999	2002	
1993	2000	2001	
1994	2001	2004	
1995	2002	2006	
1996	2003		

KANTOORLANDUIDING			
		PLATINA/GOUD SILVER	

* Alijd in combinatie met een kantoorlanduiding
merk en een jaarletter, na onderzoek voorbereid

** Slechts in gebruik gedurende het betreffende
kalenderjaar

VOORBEELD VAN MERKEN OP GROTE VOORWERPEN			
GOUD	Grote voorwerpen	SILVER	
meester	gebuis	kantor	jaar

Problemen van Pascal tot Poisson

Jan van Maanen

De kansrekening kent een rijke traditie van problemen. Pascal en Fermat wisselden in 1654 een aantal brieven over de kansen in het dobbelspel en over de verdeling van de pot bij het voortijdig afbreken van een kansspel. Huygens hoorde in de zomer van 1655 in Parijs over deze problemen spreken en vond er de inspiratie in voor zijn *Van rekeningh in spelen van geluck*, dat in 1657 in het Latijn en in 1660 in het Nederlands verscheen. Jakob Bernoulli nam op zijn beurt Huygens' werkje als uitgangspunt voor zijn studie over kansen. In dagboek aantekeningen van 1685 en later werkte Bernoulli de vijf open problemen uit die Huygens, als een soort uitdaging aan de lezer, aan het einde van zijn *Rekeningh* opgenomen had. Het eerste boek over kansrekening, de in 1713 postuum verschenen *Ars conjectandi* (kunst van het gokken) van Bernoulli, begint met een herdruk van het werkje van Huygens. Daarna volgt in het boek de benodigde combinatoriek en vervolgens geeft Bernoulli een groot aantal toepassingen en nieuwe problemen. De *Ars conjectandi* was de Bijbel van de kansrekenaars in de achttiende eeuw (Daniel Bernoulli, De Moivre, Laplace). Voorwaar, een traditie van problemen.

In 45 minuten doen we een selectie uit 180 jaar problemen. "Doen" moet hier letterlijk genomen worden, en "we" daar valt ook u onder. Voor wie alvast wil beginnen is hier het tweede probleem van Huygens:

"Drie speelders A, B en C nemende 12 schijven/ van de welcke 4 wit zijn en 8 swart/ speelen op conditie/ dat die van haer blindeling eerst een witte schijve sal gekosen hebben winnen sal/ en dat A de eerste sal nemen/ B de tweede/ en dan C, en dan wederom A, en soo vervolgens met beurten. De vraghe is in wat reden haere kansen staen tegens malkander?"

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBRERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et Epistola Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.



BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
c1713.

Hoe het Toeval fractals voortbrengt

J.M. Aarts

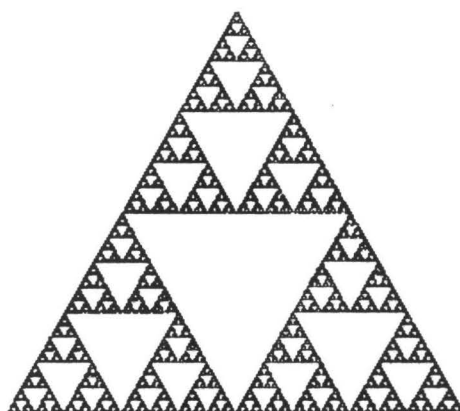
In het artikel *De zeef van Sierpinski* (Pythagoras **36**('96/'97), nr. 1, 18–21) beschrijft HANS LAUWERIER een chaotisch golfspel. Er zijn drie holes, die de hoekpunten zijn van een gelijkzijdige driehoek. De golfspeler slaat de bal telkens tot precies halverwege één van de holes; welke hole dat is wordt bepaald door het toeval (waarbij de kans dat een bepaalde hole gekozen gelijk is aan $\frac{1}{3}$). De positie van de bal aan het begin van dit merkwaardige spelletje is willekeurig. Wanneer nu de opeenvolgende posities van de bal gemarkeerd worden ontstaat na verloop van tijd een figuur die heel veel lijkt op de zeef van Sierpinski (Figuur 1). In het artikel is een BASIC-programma beschreven waarmee dit spelletje op de computer kan worden gesimuleerd.

Het zojuist beschreven voorbeeld laat zien hoe de zeef van Sierpinski door het toeval kan worden voortgebracht. De in het voorbeeld gebruikte methode is een bijzonder geval van een algemene methode die door BARNSELY ontwikkeld is om plaatjes van *fractals* te maken met behulp van de computer. De algemene methode, waarop BARNSELY patent heeft, staat bekend onder de naam IFS (*Iterated Function Systems*). De zeef van Sierpinski wordt als volgt met de IFS-methode verkregen. Noem de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek A , B en C . De transformatie σ_A van het vlak op zichzelf is de vermenigvuldiging vanuit A met de factor $\frac{1}{2}$; de transformaties σ_B en σ_C worden op analoge wijze gedefinieerd. De drie afbeeldingen σ_A , σ_B en σ_C vormen tezamen het *Function System*. Beginnend met een willekeurige compacte figuur X_0 in het vlak, definieert men door iteratie

$$X_{n+1} = \sigma_A(X_n) \cup \sigma_B(X_n) \cup \sigma_C(X_n).$$

Het blijkt nu dat, onafhankelijk van de beginfiguur X_0 , de figuren X_n met toenemende n steeds meer gaan lijken op (dat is convergeren naar) de zeef van Sierpinski. De beschreven methode is echter zelfs voor een computer bewerkelijk; één van de nadelen van de methode is dat bij de vervaardiging van een plaatje van X_{n+1} de voorgaande figuur (het plaatje van X_n) gewist moet worden. Om dit probleem te omzeilen heeft BARNSELY een methode ontwikkeld die hierboven aan de hand van het golfspelletje is beschreven: men begint met een willekeurig punt x_0 en telkens wordt, met kans $\frac{1}{3}$, één der afbeeldingen σ_A , σ_B of σ_C toegepast op het punt x_n om het punt x_{n+1} te vinden. De verkregen punten $x_0, x_1, x_2, \dots$ vormen tezamen een benadering van de zeef van Sierpinski.

In de voordracht zullen we de IFS-methode beschrijven en uitleggen hoe en waarom die werkt. We zullen zien dat de IFS-methode heel bruikbaar is om van verschillende fractals plaatjes te maken. Om zulke mooie fractals als de varen (Figuur 2), het handelsmerk van BARNSELY, te maken, moeten we nog iets slimmer met de kansen (of beter gezegd, met de kansverdelingen) omspringen.



FIGUUR 1. De zeef van Sierpiński



FIGUUR 1. De varen van Barnsley

Cursusgeld

Het cursusgeld bedraagt f 90,=, waarbij de syllabus is inbegrepen. Dit bedrag is echter exclusief de kosten van maaltijden.

Aanmelding

Bij mevrouw M. Bruné per e-mail (mieke@cwí.nl) of per post door het aanmeldingsformulier achter in de brochure in te vullen en op te sturen naar:

Stichting Mathematisch Centrum
T.a.v. Mevrouw M. Bruné
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

Tegelijkertijd dient men het cursusgeld (vermeerderd met evt. kosten van maaltijden) over te boeken naar bank rek.nr. 31.35.57.977 van de Stichting Wiskunde en Informatica Conferenties bij de RABObank te Amsterdam (gironummer van de bank is 187744) onder vermelding van uw naam en VC97.

N.B. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit.

Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar. Degene die daarop prijs stelt, gelieve dit bij aanmelding te laten weten onder nauwkeurige vermelding van naam en voornamen (zonder afkortingen), geboortedatum en geboorteplaats.

Plaats

Amsterdam: CWI, Kruislaan 413, zaal Z011.
Eindhoven: Rekencentrum, Den Dolech 2.

Syllabus

De syllabus zal worden uitgereikt bij aankomst op de cursus.

Informatie

Voor nadere informatie over de Vakantiecursus kunt u zich wenden tot mevrouw M. Bruné, tel. 020 - 592 42 49.

MEDEWERKERS

Prof.dr. J.M. Aarts

wg.: TU Delft, Faculteit TWI, Mekelweg 4, 2628 CD Delft, 015 - 2785399, e-mail: j.m.aarts@twi.tudelft.nl
hs.: Van Kinschotstraat 13, 2614 XJ Delft, 015 - 2126448

Prof.dr. J. van de Craats

wg.: UVA/OU, e-mail: jcr@euronet.nl
hs.: Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL Oosterhout, 0162 - 457364

Prof.dr. H.G. Dehling

wg.: RU Groningen, Vakgroep Wiskunde, Postbus 800, 9700 AV Groningen, 050 - 3633971, e-mail: dehling@math.rug.nl
hs.: Van Deyssellaan 90, 9721 WX Groningen, 050 - 5267317

Prof.dr. A.W. Grootendorst

hs.: Aardbeistraat 11, 2564 TM Den Haag, 070 - 3232936

Prof.dr. C.A.J. KLaassen

wg.: UvA Amsterdam, Vakgroep Wiskunde, Plantage Muidersgracht 24, 1018 TV Amsterdam, 020 - 5255010, e-mail: chrisk@fwi.uva.nl
hs.: Vossenschanslaan 5, 3445 EB Woerden, 0348 - 425148

Drs. W. Kleijne

wg.: Rijksinspectiekantoor, Postbus 933, 8901 BS Leeuwarden, 058 - 2133132,
hs.: Zwette 130, 8446 ML Heerenveen, 051 - 3624368

Dr. J.A. van Maanen

wg.: RU Groningen, Vakgroep Wiskunde, Postbus 800, 9700 AV Groningen, 050 - 3637132, e-mail: maanen@math.rug.nl
hs.: Nieuwe Boteringestraat 86I, 9712 PR Groningen, 050 - 3187867, e-mail: pyco@euronet.nl

Prof.dr.ir. J.H.A. de Smit

wg.: Universiteit Twente, Fac. Toegepaste Wiskunde, Postbus 217, 7500 AE Enschede, 053 - 4893386, e-mail: desmit@math.utwente.nl
hs.: Spölminkkamp 13, 7524 DV Enschede, 053 - 4431886,

Dr. I.H. Stamhuis

wg.: VU Amsterdam, Vakgroep Algemene Vorming, De Boelelaan 1081, 1081 MC Amsterdam, 020 - 4447983, fax: 020 - 4447988
hs.: Hogerlustlaan 10, 1191 CM Ouderkerk a/d Amstel, 020 - 4963603

Prof.dr.drs. A.G.M. Steerneman

wg.: RU Groningen, Vakgroep Econometrie, Postbus 800, 9700 AV Groningen, 050 - 3633807, e-mail: A.G.M.Steerneman@ECO.RUG.nl
hs.: Lantingehof 2, 9403 PE Assen, 0592 - 342643

Contacten Mathematisch Centrum:

Dr. M. Bakker

wg.: Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079, 1090 GB
Amsterdam, 020 - 5924172, e-mail: miente@cwj.nl

Mevrouw M. Bruné

wg.: Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079, 1090 GB
Amsterdam, 020 - 5924249, e-mail: mieke@cwj.nl

AANMELDINGSFORMULIER VAKANTIECURSUS 1997

REKENEN OP HET TOEVAL

Ondertekende,

Naam: _____

Functie: _____

Adres: _____

Telefoon: _____

Postcode: _____

Woonplaats: _____

wenst deel te nemen aan de Vakantiecursus 1997, die zal worden gehouden te

- | | | |
|----|---|---------|
| A. | Amsterdam op vr. 22 en za. 23 augustus 1997 | ja/nee* |
| | Deelname aan warme maaltijd op vrijdag 22 augustus (f 20,=) | ja/nee* |
| | Deelname aan lunch op zaterdag 23 augustus (f 15,=) | ja/nee* |
| B. | Eindhoven op do. 28 en vr. 29 augustus 1997 | ja/nee* |
| | Deelname aan lunch op donderdag 28 aug. (f 15,=) | ja/nee* |
| | Deelname aan lunch op vrijdag 29 aug. (f 15,=) | ja/nee* |

en heeft het verschuldigde bedrag overgemaakt (voor rekeningnummers zie pag. 20)

Degenen die prijs stellen op een nascholingscertificaat wordt verzocht dit te berichten aan Mevrouw M. Bruné (Stichting Mathematisch Centrum), onder nauwkeurige vermelding van naam en voornamen (zonder afkortingen), geboortedatum en geboorteplaats.

Gelieve dit formulier vóór 15 augustus 1997 op te sturen naar:

Stichting Mathematisch Centrum
T.a.v. Mevrouw M. Bruné
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

*Doorhalen wat niet van toepassing is

