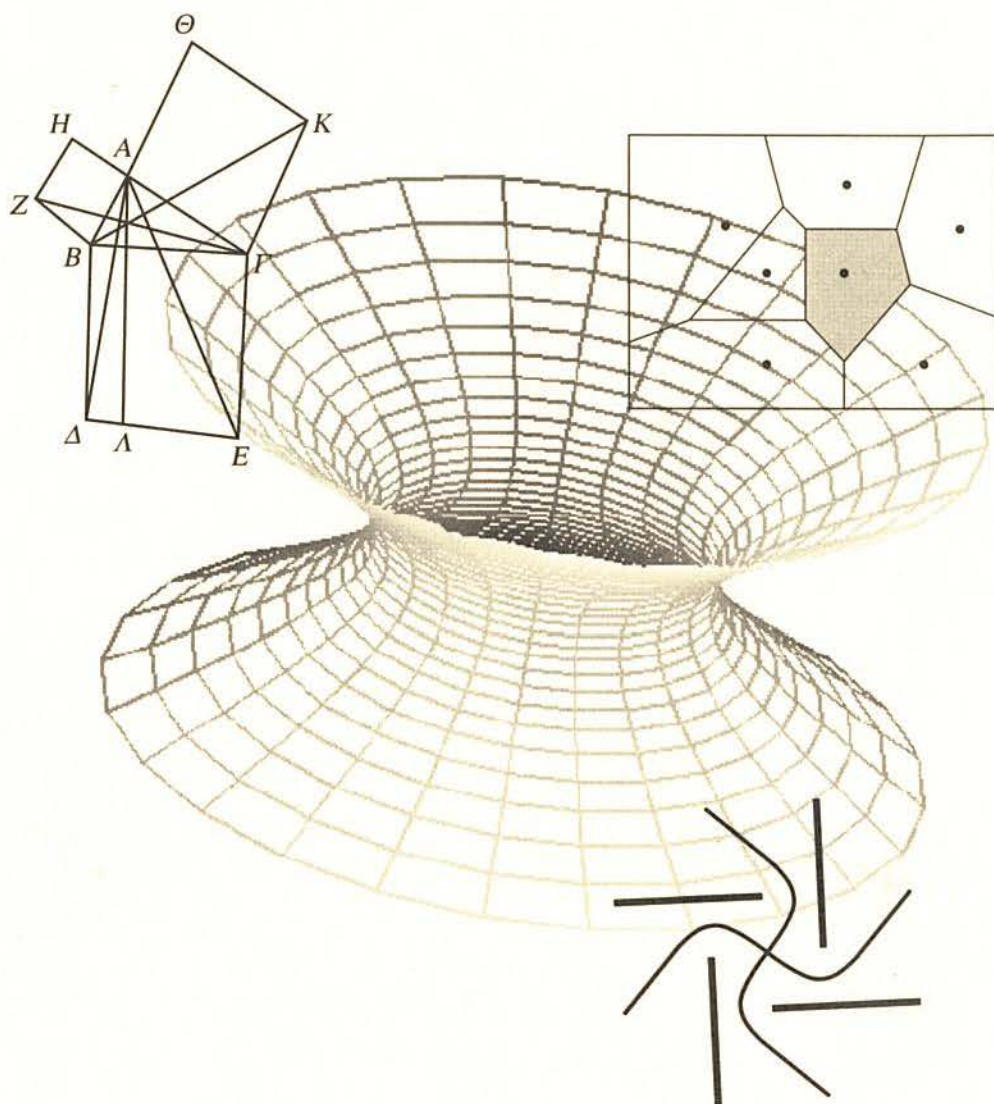


Meetkunde, oud en nieuw



Stichting Mathematisch Centrum

Vakantiecursus 1998

Meetkunde, oud en nieuw

28/29 augustus 1998 in Amsterdam

3/4 september 1998 in Eindhoven

Stichting Mathematisch Centrum

Vakantiecursus 1998

Voor leraren in de exacte vakken VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden organiseert het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) in 1998 een vakantiecursus met als thema:

Meetkunde, oud en nieuw

Ook dit jaar betreft het een tweedaagse cursus, die zowel in Eindhoven als in Amsterdam wordt gehouden en wel op **vrijdag 28 augustus en zaterdag 29 augustus in Amsterdam** in het CWI, Kruislaan 413 te Amsterdam.

Op vrijdag bestaat daar de mogelijkheid gemeenschappelijk een warme maaltijd te gebruiken (f 20,00), terwijl op zaterdag de mogelijkheid bestaat gemeenschappelijk te lunchen (f 16,50). Indien men aan één of beide maaltijden wenst deel te nemen, dient men de hieraan verbonden kosten tezamen met het inschrijfgeld te voldoen.

Op **donderdag 3 september en vrijdag 4 september in Eindhoven** in het Rekencentrum van de Technische Universiteit Eindhoven, Den Dolech 2 te Eindhoven.

Hier is de gelegenheid voor een gemeenschappelijke lunch op ieder van de cursusdagen. Indien men aan één of meer lunches wenst deel te nemen, dient men de hieraan verbonden kosten (f 15,00 per lunch) tezamen met het inschrijfgeld te voldoen.

Aanmelding voor deelname aan de cursus kan geschieden door het aanmeldingsformulier achter in deze brochure in te vullen en vóór 15 augustus 1998 op te sturen aan het CWI.

NB. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit. Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar. Degene die daarop prijs stelt, gelieve het betreffende formulier in te vullen.

Ten Geleide

Nu de meetkunde weer 'terug' is in het VWO, althans in het profiel Natuur en Techniek, lijkt het een goede gedachte dit jaar de Vakantiecursus geheel aan dit onderwerp te wijden. Maar eigenlijk is er geen bijzondere reden nodig om weer eens naar de meetkunde te kijken. Meetkunde is immers altijd al voor vele middelbare scholieren een boeiend en vooral uitdagend vak geweest, al was het alleen maar vanwege de sport het juiste 'hulplijntje' te vinden. Naar mijn mening was er (althans vóór de Mammoetwet van 1968) een belangrijke reden om wiskunde te gaan studeren: men werd geboeid door de meetkunde. Toen stond het direct toepasbare nog niet zo sterk op de voorgrond en behoefde men niet uit te leggen wat men boeiend vond aan de negenpuntscirkel, laat staan dat men het maatschappelijk belang daarvan moest verdedigen.

Nu eerst een zeer globaal overzicht van datgene wat de cursus te bieden heeft.

In de eerste voordracht krijgt het gebruikelijke historische aspect van de cursus zijn plaats met een lezing van ondergetekende over de ontwikkelingen die geleid hebben tot het ontstaan van de Analytische Meetkunde en de 'codificatie' daarvan in het werk van onze Raadpensionaris Johan de Witt.

Van direct belang voor het onderwijs is de lezing van *Prof.dr. J. van de Craats*. Hierin wordt allereerst een nieuwe axiomatiek voor de Euclidische Meetkunde ontwikkeld die twee voordelen heeft: met behoud van de meetkundige intuïtie wordt een 'waterdicht' axiomastelsel aangeboden, dat zonder bezwaar op de scholen gepresenteerd kan worden, terwijl daarnaast dit Euclidische vlak geïdentificeerd kan worden met het vlak waarin we grafieken tekenen.

De volgende voordracht, door *Prof.dr. J.M. Aarts*, is eveneens van direct belang voor toepassing op scholen: hierin wordt uitgebreid ingegaan op een stuk leerstof van het VWO: de Voronoi-diagrammen. Uiteraard worden daarbij uitlopers behandeld die wellicht de schoolstof overstijgen, maar natuurlijk boeiend zijn voor de docent.

Dr. A.J. van Zanten stelt in de vierde voordracht de eindige meetkunde aan de orde, een onderwerp dat bij velen iets minder bekend is. Zoals het woord al suggereert, gaat het hierbij om een meetkunde waarin men slechts over eindig veel punten en lijnen beschikt. De basis van de redeneringen wordt gevormd door het eerste en het vijfde axioma van Euclides. Enig abstractievermogen kan van pas komen.

De vijfde lezing, die van *drs. A. Verweij*, is gewijd aan het onderwerp *Perspectief*, een al oud onderdeel van de wiskunde. Vele interessante toepassingen in kunst en techniek zullen de revue passeren, waarbij *drs. Verweij* kan putten uit haar ervaringen met bouwkundestudenten.

Prof.dr. J.H.M. Steenbrink stelt het onderwerp 'Polytoop' aan de orde. Hierbij moet men onder een polytoop een meetkundige figuur verstaan die begrensd wordt door lijnen, vlakken of, in de vier- en hogerdimensionale ruimte, door hypervlakken. Onze vlakke veelhoeken en driedimensionale veelvlakken zijn daarvan speciale gevallen. De bekende vijf regelmatige veelvlakken trokken al in de Griekse Oudheid de aandacht. Interessant is natuurlijk de vraag hoe eigenschappen van driedimensionale veelvlakken vertaald moeten worden in hogere dimensies. Natuurlijk is zo'n onderwerp prachtig voor 'iets extra's' in de klas.

Zoals gebruikelijk, is tussen de zesde en zevende voordracht plaats ingeruimd voor zelfwerkzaamheid. Opgaven met betrekking tot verschillende van de lezingen worden daarbij aan de deelnemers ter oefening voorgelegd.

De slotvoordracht wordt gehouden door *Prof.dr. F. van der Blij*: niet-euclidische meetkunde, een onderwerp dat al sinds het begin van de 19^e eeuw in de belangstelling staat. Het is voor iedereen leerzaam te ontdekken 'dat het ook anders kan'. Ook hier worden eisen gesteld aan het abstractievermogen, maar het is de moeite waard!

Als noviteit zal dit jaar in de pauzen de film *Not-knot* vertoond worden. Hierover het volgende: de classificatie van geknoopte touwen vereist diepgaand wiskundig onderzoek. Een bekend voorbeeld vindt men in de zogenaamde Borromeïsche ringen, d.w.z. drie ringen die zó met elkaar verbonden zijn dat, als men er één van losmaakt, de andere twee ook van elkaar gescheiden zijn. Symbool van de eenheid in de familie Borromeus! Bij deze classificatie blijkt de hyperbolische meetkunde een rol te spelen. Dit wordt in fraaie beelden getoond.

Het geheel overziende krijgt men de indruk dat het ook dit jaar een boeiende cursus zal worden. Wanneer men daarbij dan ook weer vele oude bekenden en geïnteresseerde nieuwe deelnemers ontmoet, dan belooft dat weer een tweetal genoeiglijke dagen, want 'onze' cursus heeft toch altijd iets feestelijks.

A.W. Grootendorst

Programma Amsterdam

28 en 29 augustus 1998

vrijdag 28 augustus

15.00 – 15.25	Ontvangst, koffie
15.25 – 15.30	Opening
15.30 – 16.15	Analytische Meetkunde: het begin A.W. Grootendorst, TU Delft
16.15 – 16.45	Pauze
16.45 – 17.30	Redeneren en bewijzen in de meetkunde – maar vanuit welke basis?
17.30 – 18.30	Warme maaltijd
18.30 – 19.15	Voronoi-diagrammen J.M. Aarts, TU Delft
19.15 – 19.45	Pauze
19.45 – 20.30	Eindige Meetkunde A.J. van Zanten, TU Delft

zaterdag 29 augustus

10.00 – 10.45	Perspectief A. Verweij, TU Delft
10.45 – 11.15	Pauze
11.15 – 12.00	Polytopen J.H.M. Steenbrink, KU Nijmegen
12.00 – 13.00	Lunch
13.00 – 13.45	Oefeningen J. van de Craats, KMA Breda
13.45 – 14.15	Pauze
14.15 – 15.00	Niet-Euclidische Meetkunde en toch waar? F. van der Blij, Universiteit Utrecht
15.00 – 15.05	Sluiting

Programma Eindhoven

3 en 4 september 1998

donderdag 3 september

10.00 – 10.55	Ontvangst, koffie
10.55 – 11.00	Opening
11.00 – 11.45	Analytische Meetkunde: het begin A.W. Grootendorst, TU Delft
11.45 – 12.15	Pauze
12.15 – 13.00	Redeneren en bewijzen in de meetkunde – maar vanuit welke basis? J. van de Craats, KMA Breda
13.00 – 14.00	Lunch
14.00 – 14.45	Voronoi-diagrammen J.M. Aarts, TU Delft
14.45 – 15.15	Pauze
15.15 – 16.00	Eindige Meetkunde A.J. van Zanten, TU Delft

vrijdag 4 september

10.00 – 10.45	Perspectief A. Verweij, TU Delft
10.45 – 11.15	Pauze
11.15 – 12.00	Polytopen J.H.M. Steenbrink, KU Nijmegen
12.00 – 13.00	Lunch
13.00 – 13.45	Oefeningen J. van de Craats, KMA Breda
13.45 – 14.15	Pauze
14.15 – 15.00	Niet-Euclidische Meetkunde en toch waar? F. van der Blij, Universiteit Utrecht
15.00 – 15.05	Sluiting

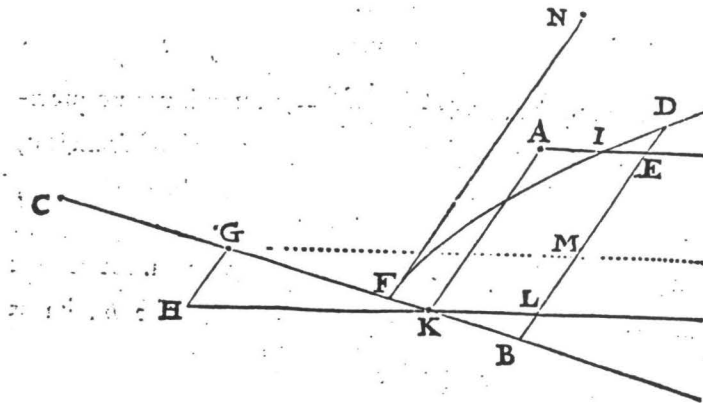
Analytische Meetkunde: het begin

A.W. Grootendorst

In de vakantiecursus 1989 (*Wiskunde in de Gouden Eeuw*) heeft Prof.dr. H.J.M. Bos in zijn voordracht *Descartes en het begin van de Analytische Meetkunde* op voortreffelijke wijze de fundamentele bijdrage geschetst van Descartes aan het ontstaan van de Analytische Meetkunde. In de hier aangekondigde lezing *Analytische Meetkunde: het begin* wordt aandacht geschonken aan voorlopers van Descartes en aan tijdgenoten die zijn ideeën systematisch hebben uitgewerkt.

Een allereerste aanzet tot de combinatie van getallen en lijnstukken en tot het gebruiken van coördinaten vindt men bij Nicole d'Oresme (ca. 1320), die al gebruik maakte van grafieken om het verband tussen tijd en snelheid bij een eenparig versnelde beweging weer te geven (de zogenaamde Merton-regel). Hierbij is echter nog geen sprake van analytische meetkunde in de eigenlijke zin, d.w.z. indien men daaronder verstaat het kenmerken van een kromme door een algebraïsche vergelijking die – bij gegeven coördinatenstelsel – het verband vastlegt tussen de abscis en ordinaat van de punten op de kromme en het daaruit afleiden van verdere eigenschappen van deze kromme.

Dit werd eerst mogelijk door het werk van François Viète (1540–1603) die met zijn *In artem analyticam isagoge* de grondslag legde voor een symbolische algebra. Onbekende grootheden werden aangegeven met klinkers, bijvoorbeeld *A* en *E* waar wij nu (in navolging van Descartes) *x* en *y* gebruiken; bekende grootheden werden aangegeven met medeklinkers, *B*, *D* etc. Hoewel hij de tekens + en – gebruikte, was zijn algebra nog voor een groot deel verbaal. Van groot belang is het feit dat hij inzag dat de algebraïsche oplossing van een (vaste) vergelijking door constructie daarvan meetkundige betekenis krijgt. Toch is hier nog geen sprake van analytische meetkunde aangezien hij geen coördinaten-systemen gebruikt en alleen vaste vergelijkingen behandelt en geen vergelijkingen voor (meetkundige) plaatsen.



De eigenlijke grondlegging van de analytische meetkunde was voorbehouden aan twee wiskundigen uit de 17^e eeuw, die onafhankelijk van elkaar en ook vanuit verschillende gezichtspunten kwamen tot hun uitzonderlijke prestaties: Pierre de Fermat (1601-1665) en René Descartes (1596-1650).

Pierre de Fermat, de jurist uit Toulouse, had als eerste doel de reconstructie van de verloren boeken van Apollonius van Perga (ca. 250-ca. 200 v.C.) over kegelsneden en werd daarbij gevoerd tot zijn resultaten op het gebied van de analytische meetkunde. Zijn werk op dit gebied, *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*, - evenals al zijn werk eerst na zijn dood gepubliceerd - beslaat slechts 11 pagina's. Hierbij worden met *Loci Plani* rechte lijnen en cirkels bedoeld en met *Loci Solidi* ellipsen, parabolen en hyperbolen. De kern van dit werk is wel de volgende zin: *Wanneer in de uiteindelijke vergelijking twee onbekende grootheden voorkomen, dan hebben we te maken met een (meetkundige) plaats en het uiteinde (!) van één van hen beschrijft een rechte of kromme lijn, ... een cirkel, een parabool, een hyperbool, een ellips etc.* Een kromme wordt dus voorgesteld door een vergelijking en hiermee is de analytische meetkunde gecreëerd.

René Descartes, de Franse filosoof die grote delen van Europa bereisde en 22 jaren in ons land verbleef, kwam langs een geheel andere weg tot de creatie van de analytische meetkunde. Bij hem stond, evenals bij Viète, de meetkundige constructie van de wortels van algebraïsche vergelijkingen centraal. Hij deed dit door bijbehorende vergelijkingen door krommen in het platte vlak voor te stellen en deze met elkaar te snijden; de snijpunten stelden dan de gezochte wortels voor. In een brief aan Isaac Beeckman van 1628 deelt hij dit expliciet mee. Groot succes had hij ook door via berekeningen en niet langs synthetisch-meetkundige weg de beroemde problemen van Pappus (4^e eeuw A.D.) op te lossen. In 1637 publiceerde hij zijn resultaten in een toevoegsel aan de *Discours de la Méthode*, dat als titel heeft *La Géométrie*. Wellicht de meest karakteristieke zin uit dit werk is de volgende ... *dat alle punten die men meetkundig kan noemen, d.w.z. die nauwkeurig en exact gemeten kunnen worden, noodzakelijkerwijze een zeker verband hebben met alle punten van een rechte lijn, welk verband uitgedrukt kan worden door één of andere vergelijking die voor al deze punten dezelfde is.* Hier ziet men duidelijk de kromme die met een zekere x-as en via een vast functievoorschrift is beschreven! In dit werk voerde hij een nieuwe notatie in: kleine letters uit het begin van het alfabet (*a, b, c, d, ...*) voor bekende grootheden en kleine letters uit het einde van het alfabet (*x, y, z*) voor onbekende grootheden. Ook voerde hij de nog steeds gebruikelijke exponentennotatie voor machten in.

Van degenen die de ideeën van Descartes uitwerkten, noemen we in de eerste plaats de Raadpensionaris van de Republiek, Johan de Witt (1625-1672). In zijn *Elementa Curvarum Linearum, Liber Primus* gaf hij definities en constructiemethoden voor kegelsneden uitsluitend in het platte vlak, zonder enig

ruimtelijk lichaam in de beschouwing te betrekken. Aan dit werk is in de vakantiecursus 1995 uitvoerig aandacht geschonken. In het tweede deel van zijn *Elementa Curvarum Linearum*, dat in deze voordracht uitgebreid besproken zal worden, geeft hij een nagenoeg volledige classificatie van de krommen van de eerste en de tweede graad. Met het volste recht mag men dit boek het eerste leerboek van de analytische meetkunde noemen.

Naast bovengenoemde wiskundigen zullen uiteraard nog anderen ten tonele gevoerd worden, o.a. John Wallis (1616-1703), maar deze samenvatting is slechts bedoeld om enig idee te geven van wat er gaat komen.



René Descartes (1596-1650)



Pierre de Fermat (1601-1665)

Redeneren en bewijzen in de meetkunde – maar vanuit welke basis ?

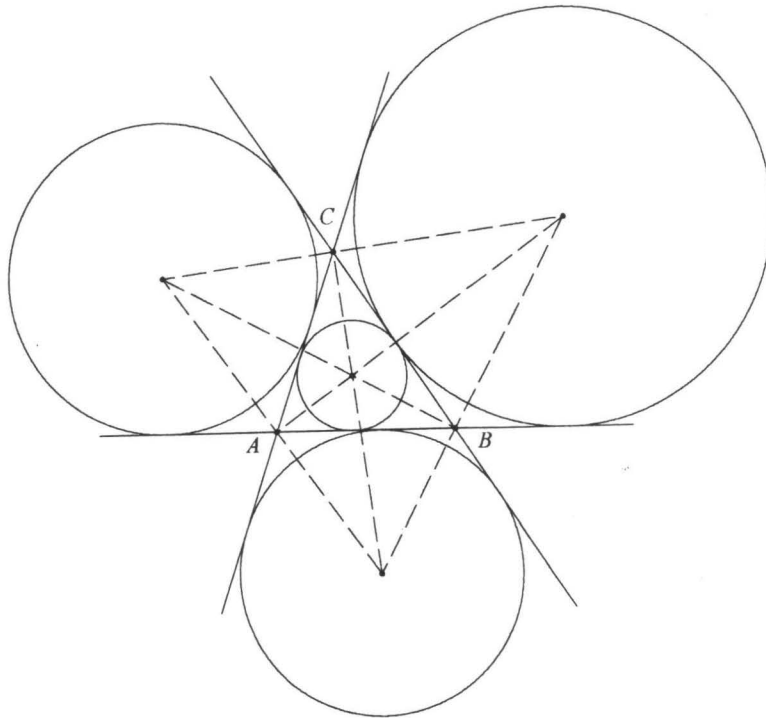
J. van de Craats

Euwenlang heeft het meetkundeonderwijs model gestaan voor redeneren en bewijzen. In de Elementen van Euclides (ca. 300 v. Chr.) werd de vlakke meetkunde opgebouwd op basis van 23 definities en 5 postulaten. Euclides pretendeerde hieruit de gehele verdere meetkunde op een strict logische wijze af te leiden. Pas in de negentiende eeuw werd duidelijk dat de fundamenteen van dit bouwwerk minder solide waren dan ze meer dan tweeduizend jaar lang hadden geleken. Euclides had een aantal onuitgesproken aannames gebruikt, en ook op zijn afleidingen was nogal wat aan te merken. Bij het aanbreken van de twintigste eeuw presenteerde David Hilbert echter een uitgebreider axiomastelsel dat wél volledig was. De axiomatische opbouw van de vlakke meetkunde was daarmee gered. Maar tegelijkertijd werd duidelijk dat zo'n opbouw verre van eenvoudig is: de logische afleidingen bevatten tal van subtiële redeneringen die het bevattingsvermogen van de beginneling verre overstijgen. Een verantwoorde axiomatische opbouw van de meetkunde op school werd daarmee alleen al om didactische redenen onmogelijk. Ook andere axiomatische funderingen, zoals bijvoorbeeld die van B.L. van der Waerden, lijden aan dit euvel. Ze zijn alleen voor docenten en andere gevorderde belangstellenden geschikt, maar niet voor schoolgebruik.

Overigens, wanneer men voor een axiomatische opbouw kiest, mag men de *consistentievraag* niet uit de weg gaan: is het uitgesloten dat de gekozen axioma's uiteindelijk tot een innerlijke tegenspraak leiden? Zowel Hilbert als Van der Waerden beantwoorden die vraag bevestigend door een *analytisch model* aan te wijzen, te weten $\mathbf{R}^2$. Zij gaan daarbij uit van de door alle wiskundigen geaccepteerde overtuiging dat de natuurlijke getallen, en daarmee dus ook de reële getallen, een contradictievrij systeem vormen.

Inmiddels wordt in de moderne wiskunde de Euclidische vlakke meetkunde nooit meer axiomatisch gefundeerd. De axiomastelsel van Euclides, Hilbert of Van der Waerden worden alleen nog maar bestudeerd door historisch geïnteresseerden. De thans algemeen gevolgde weg is dat men het Euclidische vlak introduceert als een $\mathbf{R}^2$ met standaardinproduct en de isometrieën als transformatiegroep. In deze voordracht zal onderzocht worden hoe een behandeling van de meetkunde op school hierop kan voorbereiden zonder dat daarvoor eerst een cursus lineaire algebra nodig is. Het ontwikkelen van de meetkundige intuïtie blijft het uitgangspunt. Een bijkomend voordeel van deze aanpak is het feit dat de meetkunde niet als een geïsoleerd systeem gepresenteerd wordt, maar als een geïntegreerd onderdeel van de verdere wiskunde: het Euclidisch vlak is hetzelfde

als het vlak waarin we grafieken van functies tekenen, en een generalisatie van de Euclidische meetkunde naar dimensies 3 en hoger is volkomen natuurlijk. Evenzo vormt deze aanpak een uitstekende voorbereiding op de differentiaalmeetkunde, de projectieve meetkunde, de eindige meetkunde en andere takken van de meetkunde.



Voronoi-diagrammen

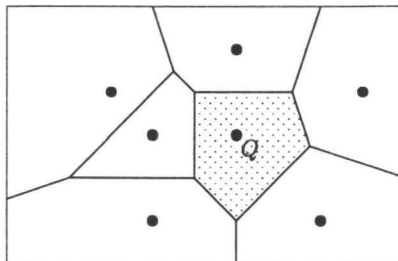
J.M. Aarts

In de omschrijving van de leerstof van het domein Vlakke Meetkunde voor het nieuwe VWO-programma worden Voronoi-diagrammen genoemd. Ze bieden niet alleen de gelegenheid tot oefening met de elementaire leerstof, maar ze zijn ook het natuurlijke uitgangspunt voor de bespreking van interessante toepassingen (conflictlijnen, kegelsneden).

Beschouw eerst een eindige verzameling E van punten in het vlak. Laat Q een punt van E zijn. De *Voronoi-cel* $V(Q)$ van Q is de verzameling van alle punten van het vlak met de eigenschap dat zij niet verder van Q liggen dan van enig ander punt van E , zie figuur 1. In formule:

$$V(Q) = \{X : d(X, Q) \leq d(X, R) \text{ voor alle punten } R \text{ uit } E\}.$$

Een Voronoi-cel is een convexe verzameling en de rand van de cel is een lijnentrek. De randen van alle cellen vormen tezamen het *Voronoi-diagram* bij de

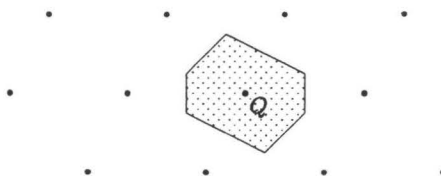


Figuur 1: De Voronoi-cel van Q (gestippeld)

verzameling E . Met behulp van de computer zullen we laten zien hoe Voronoi-diagrammen gebruikt kunnen worden bij problemen uit de praktijk zoals bijvoorbeeld de verdeling van het continentale plat.

Men kan de theorie van de Voronoi-diagrammen in verschillende richtingen uitbreiden. Allereerst kan men de genoemde begrippen op dezelfde wijze definiëren voor een rooster van punten in het vlak, zie figuur 2, en meer in het algemeen voor iedere verzameling E met de eigenschap dat elke cirkelschijf (hoe groot dan ook) maar eindig veel punten van E bevat. Er is geen reden om hierbij alleen roosters in het vlak te beschouwen. De theorie van de ruimtelijke roosters is

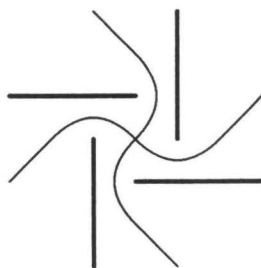
van groot belang voor de kristallografie; in dit verband worden de Voronoi-cellen ook wel genoemd naar Wigner en Seitz.



Figuur 2: Een rooster met een Voronoi-cel

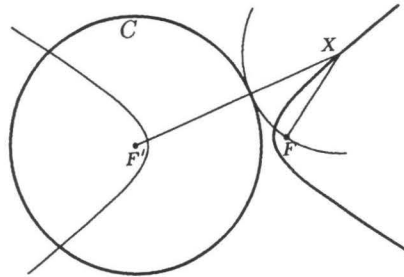
De algemene n -dimensionale roosters worden bestudeerd in de getallentheorie in verband met kwadratische vormen in n veranderlijken met gehele coëfficiënten. Het oorspronkelijke werk van Voronoi had betrekking op de theorie van de n -dimensionale roosters. Omdat ook Dirichlet aan deze problemen werkte, worden de Voronoi-cellën ook wel Dirichlet-cellën genoemd.

Maar ook kan men in plaats van een eindige puntverzameling E een eindige verzameling van gesloten verzamelingen bekijken; zie figuur 3, waarin de verzamelingen met dikke lijnen zijn aangegeven. Het Voronoi-diagram bestaat



Figuur 3: Het Voronoi-diagram (dun getekend)

hier uit vier sierlijk gekrulde lijnen. In dit kader past de studie van conflictlijnen. Ook kegelsneden kunnen op een elegante manier geïntroduceerd worden als conflictlijnen: in figuur 4 is de rechter tak van de hyperbool de verzameling van alle punten X die gelijke afstand hebben tot het ene brandpunt F en tot de richtcirkel C , die het andere brandpunt F' als middelpunt heeft.



Figuur 4: De rechtertak van de hyperbool als conflictlijn

Eindige Meetkunde

A.J. van Zanten

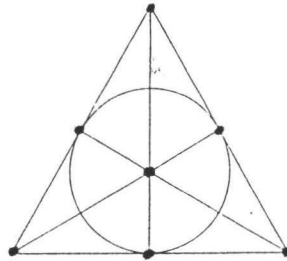
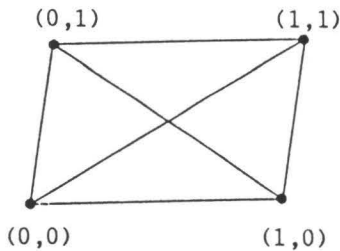
Zoals bekend wordt de meetkunde zoals die nu reeds meer dan 2000 jaar onderwezen wordt op (middelbare) scholen de Euclidische meetkunde genoemd. Euclides trad op als een soort redacteur die alle destijds bekende meetkundekennis verzamelde en in een logische volgorde rangschikte. Hij ging uit van 5 postulaten die niet bewezen werden en waarvan we hier alleen het eerste en het vijfde vermelden, omdat de overige drie in onze voordracht geen rol zullen spelen.

1. Door elk tweetal punten kan precies één rechte lijn getrokken worden.
5. Door een punt buiten een rechte lijn gaat precies één andere rechte lijn parallel aan de gegeven lijn.

Voor al het vijfde postulaat heeft de wiskundegemoederen eeuwenlang bezig gehouden. Tot ± 1830 probeerde men het te bewijzen uitgaande van de eerste vier, hetgeen niet lukte. In de jaren daarna liet men het postulaat soms weg of men veranderde de inhoud, hetgeen aanleiding gaf tot andere meetkunden. Zulke niet-Euclidische meetkunden lijken op het eerste gezicht 'onnatuurlijk', omdat sommige van hun eigenschappen intuïtief als onjuist worden ervaren. Echter moet men dan wel bedenken dat het Euclidische vlak zelf een forse abstractie is. Waar immers in het heelal vindt men een model van een zich naar alle kanten uitstrekkend plat vlak? Integendeel, een boloppervlak is veel 'natuurlijker', en op een dergelijk oppervlak snijden lijnen (grote bolcirkels) elkaar altijd.

In de 17-de eeuw ontstond de Cartesische of analytische meetkunde. Punten worden voorgesteld door reële getallenparen (x,y) en een (rechte) lijn l wordt gedefinieerd door een lineaire vergelijking $ax + by = c$, voor vaste $a,b,c, \in \mathbf{R}$. Een lijn $l' (\neq l)$ vastgelegd door $a'x + b'y = c'$ heeft precies één punt gemeen met l , als $ab' \neq ba'$. Neemt men een punt buiten l , dan is het duidelijk dat er precies één lijn door gaat parallel aan l , met vergelijking $ax + by = d (\neq c)$. Aldus is het coördinatenvlak $\mathbf{R}^2$ een *model* voor het Euclidische vlak. Bij het verifiëren van de twee postulaten maakt men gebruik van de in $\mathbf{R}$ gedefinieerde bewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen door getallen $\neq 0$. Wanneer men zich dit realiseert, dient zich onmiddellijk een ander model aan van het Euclidische vlak en wel het rationale coördinatenvlak $\mathbf{Q}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{Q}\}$. Zowel $\mathbf{R}^2$ als $\mathbf{Q}^2$ zijn voorbeelden van een *affien vlak*, dat algemeen wordt gedefinieerd als bestaande uit een puntenverzameling P en een familie L van deelverzamelingen van P , de lijnenverzameling, zodanig dat de elementen van P en L aan postulaten 1 en 5 voldoen. Met de voorbeelden $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{Q}^2$ voor ogen, komt men al gauw op het idee om het coördinatenvlak $\mathbf{F}^2$ te beschouwen, waarbij $\mathbf{F}$ een of ander eindig getallenlichaam is, waarin dus de eerder genoemde elementaire

bewerkingen ook mogelijk zijn. Het resultaat is een eindige meetkunde, of preciezer, een eindig affien vlak. Hieronder (links) is de meest eenvoudige eindige meetkunde afgebeeld, namelijk $(GF(2))^2$. Hier is $GF(2)$ het getallenlichaam bestaande uit de getallen 0 en 1, waarmee men rekt modulo 2.



Deze meetkunde bevat 4 punten en 6 lijnen. De lijn door $(0,0)$ en $(1,1)$ correspondeert met de vergelijking $x + y = 0$, en de lijn door $(0,1)$ en $(1,0)$ met $x + y = 1$. Deze lijnen zijn dus parallel! Het zal nu duidelijk zijn dat $(GF(2))^2$ 3 paren parallelle lijnen bevat.

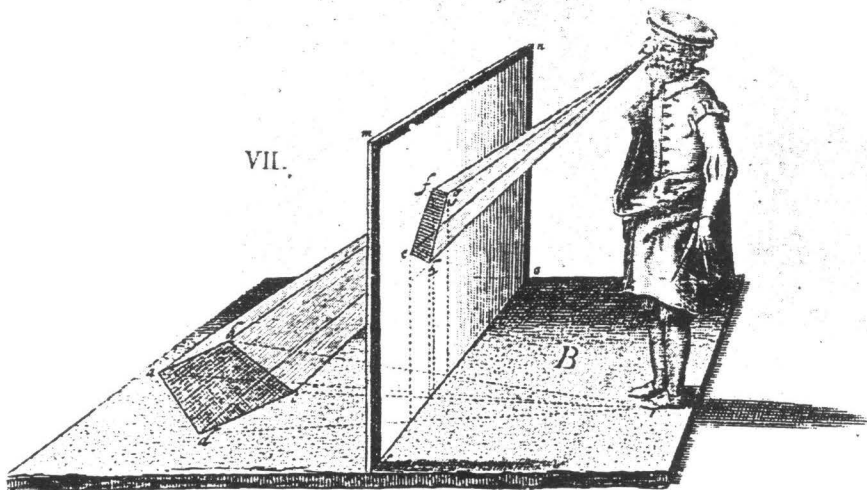
Voegt men in het Euclidische vlak aan elke bundel parallelle lijnen een oneigenlijk punt toe, waarin die lijnen geacht worden elkaar te snijden, dan krijgt men, zoals bekend, het gewone *projectieve vlak*. Alle oneigenlijke punten liggen daarin op een nieuwe lijn, de oneigenlijke rechte. In plaats van postulaat 5 heeft men nu de voor een projectief vlak karakteristieke eigenschap dat elk tweetal lijnen precies één punt gemeen heeft. Iets dergelijks kan men doen met eindige affiene vlakken. Het affiene vlak $(GF(2))^2$ van hierboven gaat aldus over in een projectief vlak met 7 punten en 7 lijnen, het zogenaamde Fanovlak (zie boven rechts). De lezer wordt aangemoedigd om alvast na te gaan hoe de rechter figuur uit de linker ontstaat.

In de voordracht gaan we in op een aantal voor de hand liggende vragen, zoals welke eindige affiene en projectieve vlakken er mogelijk zijn, hoeveel punten en lijnen ze bevatten, etc., en, eventueel, bekijken we een generalisatie van het eindige projectieve vlak, namelijk het symmetrische design.

Perspectief

Agnes Verweij

Wie de eerste beginselen van perspectief wil uitleggen, gebruikt ter illustratie vaak de bekende prenten uit het eerste Noord-Europese boek over dit onderwerp: *Underweysung der Messung* (1525) van Albrecht Dürer. Deze laten zien dat perspectief gebaseerd is op het bepalen van de snijpunten van een vlak tekenvenster of 'tafereel' met wat momenteel in de onderbouw van onze middelbare scholen 'kijklijnen' genoemd worden. Hierbij is het in beeld te brengen object steeds op een horizontaal 'grondvlak' geplaatst, terwijl het tafereel verticaal gehouden wordt. Dürer was bekend met een aantal eigenschappen van perspectief die gebruikt kunnen worden om het tekenen van met name meetkundige figuren in perspectief te vergemakkelijken. Illustraties van deze eigenschappen zien we dan ook al in de oudste Nederlandstalige literatuur over perspectief, die voor een belangrijk deel aan het werk van Dürer ontleend is. Zie bijvoorbeeld de onderstaande figuur met een tekening van Hendrick Hondius uit zijn *Grondige onderrichtinge in de optica ofte perspective konste* (1647). In deze tekening gaat het onder andere om de eigenschap dat rechte lijnen in perspectief recht zijn, zodat slechts vier kijklijnen nodig zijn om het perspectiefbeeld van een vierhoek te bepalen.

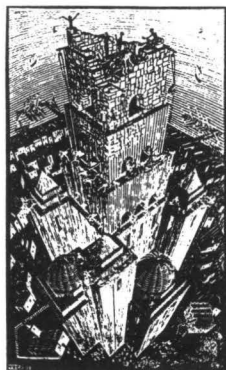


Andere eigenschappen – hier niet in beeld gebracht – zijn dat lijnen die evenwijdig aan het tafereel zijn in de perspectieffiguur hun richting behouden en

dat de overige lijnen in de figuur ‘verdwijnpunten’ hebben. Deze eigenschappen heeft Hondius wel toegepast bij het tekenen van het rechthoekige grondvlak en het tafereel in de figuur, die in centraal of eenpunts perspectief afgebeeld zijn. ‘Eenpunts’, omdat van de drie onderling loodrechte hoofdrichtingen van de objecten er slechts één een verdwijnpunt heeft. In de Nederlandse schilderkunst van de zeventiende eeuw waarin de principes uit Hondius’ leerboek en die uit het eerder door hem uitgegeven handboek *Perspective* (1604/1605) van Johan Vredeman de Vries gebruikt werden, komt deze vorm van perspectief het meeste voor. Daarnaast zien we vanaf het midden van de zeventiende eeuw, met name bij architectuurschilders, ook wel tweepunts perspectief.

De belangstelling voor driepunts perspectief dateert uit het begin van de twintigste eeuw, toen foto’s van wolkenkrabbers – genomen vanaf straatniveau – horizontale én verticale lijnen met verdwijnpunten lieten zien. Daarna raakte men ook snel vertrouwd met de driepunts perspectief van foto’s en filmbeelden die van grote hoogte naar beneden kijkend, vanuit een vliegtuig, opgenomen zijn. In recente leerboeken over perspectieftekenen wordt dan ook, zij het meestal vrij summier, aandacht besteed aan deze vormen van perspectief waarin het tafereel niet meer loodrecht op het horizontale grondvlak staat.

In de voordracht wordt besproken hoe in veel gevallen op basis van de principes van perspectief en enige meetkundige kennis uit een afbeelding in een-, twee- of driepunts perspectief afgeleid kan worden welk standpunt de tekenaar ten opzichte van zijn tafereel heeft ingenomen. Hieruit volgt dan direct van welke afstand en onder welke hoek men naar de afbeelding zou moeten kijken. Ook kunnen dan bijzonderheden over de afgebeelde situatie gevonden worden. Een en ander wordt toegepast op werken van zeventiende-eeuwse Nederlandse genre- en architectuurschilders en op grafisch werk van M.C. Escher waaronder zijn *Toren van Babel* (1928) in driepunts perspectief, zie onderstaande figuur.

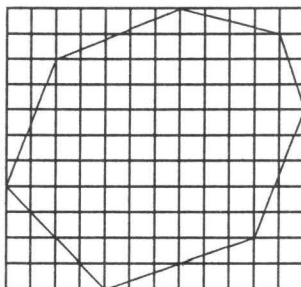


Polytopen

J.H.M. Steenbrink

Een polytoop in de m -dimensionale Euclidische ruimte R^m is een meetkundig object dat analoog is aan een lijnstuk op de rechte, een veelhoek in het vlak, of een veelvlak in de drie-dimensionale ruimte. We zullen ons beperken tot *conveze* polytopen: deze worden gegeven als oplossingsverzameling van een eindig aantal lineaire ongelijkheden. Deze convexe polytopen zijn bekend uit de theorie van lineaire programmering.

We spitsen ons onderwerp nog verder toe. In R^m bevinden zich de *roosterpunten*: dit zijn de punten waarvan alle coördinaten geheel zijn. De voordracht zal gaan over die convexe polytopen waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn. Deze polytopen krijgt men als convex omhulsel van een eindige verzameling van roosterpunten. We zullen ze kortweg gehele convexe polytopen noemen. In bijgaande figuur treffen we een gehele convexe veelhoek in het vlak aan.



Voor gehele convexe veelhoeken P in het vlak bestaat een interessante relatie tussen het aantal roosterpunten $i(P)$ dat op P ligt, het aantal roosterpunten $\delta(P)$ op de rand van P en de oppervlakte $\text{opp}(P)$ van P :

$$i(P) = \text{opp}(P) + \frac{1}{2}\delta(P) + 1$$

de *formule van Pick* (1898). De betreffende waarden voor bijgaande veelhoek zijn: $i(P) = 97$, $\delta(P) = 11$ en $\text{opp}(P) = 90\frac{1}{2}$.

Men kan zich afvragen of deze formule kan worden gegeneraliseerd naar hogere dimensies. Dit blijkt inderdaad het geval te zijn. In 1957 heeft Reeve laten zien dat in drie dimensies het aantal roosterpunten binnen en op de rand van P en $2P$ (de verdubbeling van P vanuit een roosterpunt) de inhoud van

P bepalen. Met alleen P zelf gaat het niet. Dat blijkt als we de piramides P_r met hoekpunten $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(1, 1, r)$ voor positieve gehele r met elkaar vergelijken. MacDonald heeft de formules van Pick en Reeve naar willekeurige dimensie gegeneraliseerd.

Ehrhart heeft in de jaren zestig een studie gemaakt van $i(nP)$ voor een geheel convex polytoop P als functie van het positieve gehele getal n . Het blijkt dat deze functie een polynoomfunctie van n is, en wel van graad d waar d de dimensie van P is; laten we dit polynoom noteren met $i_P(x)$. Ehrhart bewees, dat de waarden van dit polynoom bij negatieve gehele getallen eveneens numerieke betekenis hebben: noteer met P^0 het inwendige van het polytoop P en met d de dimensie van P . Dan is voor positieve gehele getallen n het aantal roosterpunten in nP^0 gelijk aan $(-1)^d i_P(-n)$. Uit deze wederkerigheidswet van Ehrhart kunnen de formules van Pick en Reeve eenvoudig worden afgeleid, evenals hun generalisatie door MacDonald naar willekeurige dimensie.

Men kan de functie $n \mapsto i(nK)$ natuurlijk ook beschouwen voor deelverzamelingen van R^m die niet noodzakelijk polytopen zijn. Laat $\#V$ het aantal elementen van een eindige verzameling V aangeven. Dan geldt dat voor positieve gehele n en bijvoorbeeld K een compacte deelverzameling van R^m :

$$i(nK) = \#(K \cap \frac{1}{n}Z^m)$$

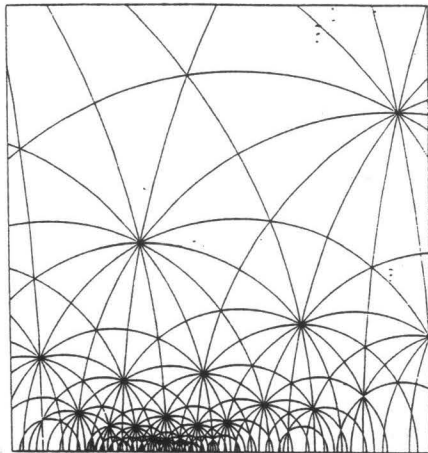
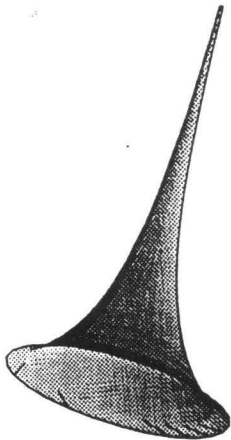
want in plaats van K te vergroten kunnen we ook het rooster fijnmaziger maken. Omdat bij benadering elk punt van het verfijnde rooster $\frac{1}{n}Z^m$ correspondeert met een hyperkubusje van inhoud n^{-m} binnen K zal de functie $n \mapsto i(nK)$ ongeveer groeien als $\text{vol}(K)n^m$. Vanuit dit gezichtspunt zijn formules als die van Pick wel te verwachten!

Niet-euclidische meetkunde en toch waar ?

F. van der Blij

In 1824 schreef Gauss in een brief aan Taurinus dat de veronderstelling dat de som van de hoeken van een driehoek kleiner dan 180 graden (twee rechte hoeken) is tot een consistente meetkunde voert. Weliswaar is er in zo'n meetkunde een absolute lengte-eenheid, die niet a priori vast ligt. En als niet-euclidische meetkunde de ware meetkunde zou zijn, zou deze lengte-eenheid a posteriori vastliggen en wellicht experimenteel bepaald kunnen worden. In 1830 testte Lobacevskii de hypothese van de absolute lengtemaat met behulp van toen bekende astronomische gegevens over de afstand van de aarde tot de ster Sirius. Hij constateerde dat deze absolute lengtemaat tienduizenden malen groter dan de middellijn van de aardbaan om de zon zou moeten zijn. In latere jaren is dit getal opgevoerd tot een wel heel wat groter getal. Maar in onze tijd gebruiken we in de algemene relativiteitstheorie en in de cosmologie heel andere meetkunden, bijvoorbeeld met elf dimensies of met wilde topologische structuren met wormgaatjes.

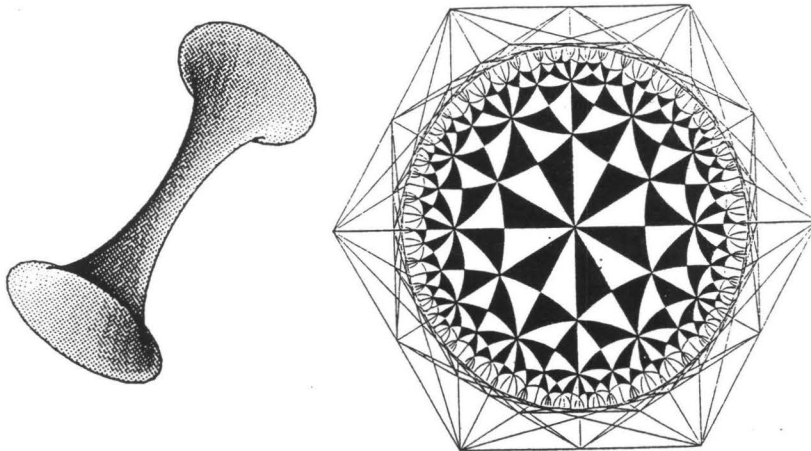
In de geschiedenis van de niet-euclidische meetkunde is de hyperbolische meetkunde, waarin de som van de hoeken van een driehoek kleiner dan 180 graden is, de oudste. Deze meetkunde sluit ook het dichtst aan bij het axiomastelsel van Euclides. Later is ook de elliptische meetkunde geconstrueerd, waarin de som van de hoeken van een driehoek meer dan 180 graden is.



Maar voor die constructie moeten de axioma's van Euclides ingrijpender worden bijgesteld. De drie nu genoemde meetkunden kunnen ook op een andere manier gekenschetst worden; in de elliptische, euclidische en hyperbolische meetkunde gaan door een punt buiten een rechte lijn respectievelijk geen, één of meer dan één lijn die de gegeven rechte niet snijden. Weer een andere methode, die typisch een plaatselijk kenmerk is, is de waarde van de verhouding van omtrek en middellijn van een cirkel. De niet-euclidische meetkunden kunnen mooi geïnterpreteerd worden als meetkunden op bepaalde twee-dimensionale oppervlakken in de drie-dimensionale ruimte. Dan heeft de elliptische iets te maken met meetkunde op de bol, de euclidische is de meetkunde van het platte vlak en de hyperbolische is de meetkunde op een oppervlak met constante negatieve kromming. Het eerste plaatje geeft een voorbeeld van zo'n oppervlak. Modellen voor de hyperbolische meetkunde zijn te beschrijven in het binnengebied van een cirkel of in een halfvlak. De andere plaatjes geven betegelingen van het hyperbolische vlak in deze modellen.

Hyperbolische meetkunde van de ruimte en van hoger dimensionale ruimten is een actueel onderwerp in de wiskundige research, waarbij diepliggende topologische, differentiaalmeetkundige en groepentheoretische beschouwingen gebruikt worden.

Dat de prent Cirkellimiet 3 van M.C. Escher de wiskundige H.S.M. Coxeter tot een fraaie explicatie van dit kunstwerk in termen van niet triviale hyperbolische meetkunde inspireerde, moet in dit Escher-jaar niet onvermeld blijven.



Cursusgeld

Het cursusgeld bedraagt f 100,00 waarbij de syllabus is inbegrepen. Dit bedrag is echter exclusief de kosten van maaltijden.

Aanmelding

Bij Simone Panka per e-mail (Simone.Panka@cw.nl) of per post door het aanmeldingsformulier achter in de brochure in te vullen en op te sturen naar:

Centrum voor Wiskunde en Informatica
t.a.v. Simone Panka
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

Tegelijkertijd dient men het cursusgeld (vermeerderd met evt. kosten van maaltijden) over te boeken naar bank rek.nr. 31.35.57.977 van de Stichting Wiskunde en Informatica Conferenties bij de RABObank te Amsterdam (gironummer van de bank is 187744) onder vermelding van uw naam en VC98.

NB. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit.

Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar. Degene die daarop prijs stelt, gelieve dit bij aanmelding te laten weten door invulling en opzending van het formulier op pagina 26.

Plaats

Amsterdam: CWI, Kruislaan 413, zaal Z011.
Eindhoven: Rekencentrum, Den Dolech 2.

Syllabus

De syllabus zal worden uitgereikt bij aankomst op de cursus.

Informatie

Voor nadere informatie over de Vakantiecursus kunt u zich wenden tot Simone Panka, tel. 020 – 592 4009.

MEDEWERKERS

Prof.dr. J.M. Aarts

wg.: TU Delft, Faculteit ITS, Groep Wiskunde, Mekelweg 4, 2628 CD Delft,
015 – 2785399,

e-mail: j.m.aarts@twi.tudelft.nl

hs.: Van Kinschotstraat 13, 2614 XJ Delft, 015 – 2126448

Prof.dr. F. van der Blij

hs.: Ruysdaellaan 6, 3732 CC Bilthoven, 030 – 2283168

Prof.dr. J. van de Craats

wg.: KMA, Postbus 90154, 4800 RG Breda, 076-5273816 e-mail: jcr@euronet.nl

hs.: Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL Oosterhout, 0162 – 457364

Prof.dr. A.W. Grootendorst

hs.: Aardbeistraat 11, 2564 TM Den Haag, 070 – 3232936

Prof.dr. J.H.M. Steenbrink

wg.: Katholieke Universiteit Nijmegen, Vakgroep Wiskunde, Toernooiveld,
6525 ED Nijmegen, 024 – 3653144, e-mail: Steenbri@sci.kun.nl

hs.: W. Beermanstraat 19, 6523 RC Nijmegen, 024 – 3225385

Drs. A. Verweij

wg.: TU Delft, Faculteit ITS, Groep Wiskunde, Mekelweg 4,
2628 CD Delft, 015 – 2785808, e-mail: A.Verweij@twi.tudelft.nl

hs.: Noord Rundersteeg 10, 2312 VN Leiden, 071 – 5131028

Dr. A.J. van Zanten

wg.: TU Delft, Faculteit ITS, Groep Wiskunde, Mekelweg 4,
2628 CD Delft, 015 – 2785821

hs.: Vlietdijk 10, 2811 NB Reeuwijk, 0182 – 520196

Contacten Centrum voor Wiskunde en Informatica

Dr. M. Bakker

Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079,
1090 GB Amsterdam, 020 – 592 4172, e-mail: Miente.Bakker@cw.nl

Simone Panka

Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079,
1090 GB Amsterdam, 020 – 592 4009, e-mail: Simone.Panka@cw.nl

Routebeschrijving

CWI

Met openbaar vervoer:

- Vanaf station Amsterdam-Muiderpoort: bus 66 naar het WCW-Amsterdam Science Park. Deze bus rijdt iedere 20 minuten op maandag t/m vrijdag tussen 07.20 en 18.11 uur. Het is ook mogelijk om het WCW lopend via de Insulindeweg en de Molukkenstraat te bereiken.
- Vanaf station Amsterdam-Centraal: een stoptrein naar Amsterdam-Muiderpoort. Vandaar: zie hierboven. Een alternatief is tram 9 naar het kruispunt Middenweg-Kruislaan en vandaar lopend over de Kruislaan naar het WCW (ongeveer 1 km.).
- Vanaf station Amsterdam-Amstel: bus 15 of een stoptrein naar Amsterdam-Muiderpoort. Vandaar zie hierboven.

Met de auto:

- Alle autowegen naar Amsterdam komen uit op de rondweg rond Amsterdam: de ring (A10).
Wanneer u uit de richting Amersfoort komt, neemt u de ring richting Utrecht/Den Haag.
Wanneer u uit de richting Utrecht/Den Haag/Schiphol/Haarlem of Zaandam komt, neemt u de ring richting Amersfoort. Op de ring neemt u de afslag Watergraafmeer/S113 (ring-oost). Aan het eind van de afrit volgt u de richting Watergraafmeer. U rijdt dan op de Middenweg. Bij de eerste kruising met stoplichten gaat u naar rechts: de Kruislaan. Na circa 1 km ligt het WCW/Amsterdam Science Park aan de linkerkant van de weg.

Technische Universiteit Eindhoven – Rekencentrum

Met openbaar vervoer:

- Alle universiteitsgebouwen liggen vlakbij het NS-station Eindhoven. U gaat de perrontrap af, dan rechtsaf en via de uitgang aan de noordzijde naar het busstation. U ziet de universiteitsgebouwen schuin rechts liggen op enkele minuten loopafstand. Op het TUE-terrein borden volgen naar “Rekencentrum” (RC).

Met de auto:

- U rijdt Eindhoven binnen richting Centrum. Borden “Technische Universiteit” volgen. U komt dan op de campus. Hier volgt u de borden “Rekencentrum” (RC).

AANMELDINGSFORMULIER VAKANTIECURSUS 1998

MEETKUNDE, OUD EN NIEUW

Ondergetekende,

Naam:

Functie:

Adres:

Postcode:

Woonplaats:

Telefoon:

wenst deel te nemen aan de Vakantiecursus 1998, die zal worden gehouden te

- | | | |
|----|--|----------|
| A. | Amsterdam op vr. 28 en za. 29 augustus 1998 | ja/nee * |
| | Deelname aan warme maaltijd op vr. 28 augustus (f 20,00) | ja/nee * |
| | Deelname aan lunch op za. 29 augustus (f 16,50) | ja/nee * |
| B. | Eindhoven op do. 3 en vr. 4 september 1998 | ja/nee * |
| | Deelname aan lunch op do. 3 september (f 15,00) | ja/nee * |
| | Deelname aan lunch op vr. 4 september (f 15,00) | ja/nee * |

en heeft het verschuldigde bedrag (f 100,00 + het bedrag voor de eventuele maaltijden) overgemaakt (voor rekeningnummers zie pag. 22).

Gelieve dit formulier vóór 15 augustus 1998 te sturen naar:

Centrum voor Wiskunde en Informatica
t.a.v. Simone Panka
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

*Doorhalen wat niet van toepassing is

Degene die prijs stelt op een nascholingscertificaat wordt verzocht onderstaand formulier in te vullen, onder nauwkeurige vermelding van naam en voornamen (zonder afkortingen), geboortedatum en geboorteplaats.

NASCHOLINGSCERTIFICAAT VAKANTIECURSUS 1998

MEETKUNDE, OUD EN NIEUW

Naam:

Voornamen (zonder afkortingen):

Geboortedatum:

Geboorteplaats:

Gelieve dit formulier vóór 15 augustus 1998 te sturen naar:

Centrum voor Wiskunde en Informatica
t.a.v. Simone Panka
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam