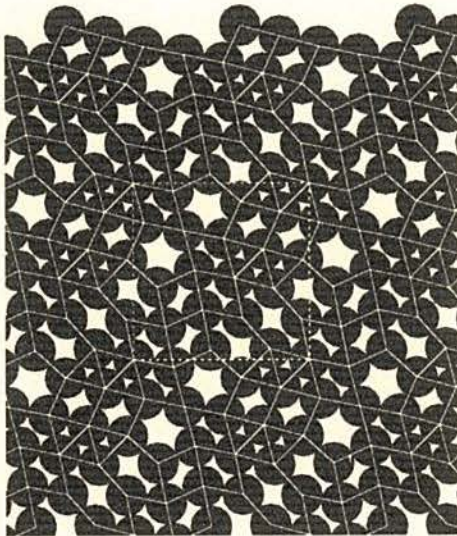
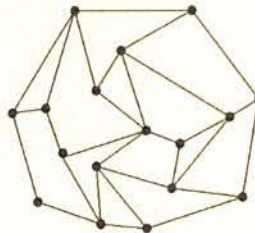


Vakantiecursus 1999

Onbewezen Vermoedens



	3_1	3		6_2	312
	[1-1]			[3-3+1]	
	4_1	22		6_3	2112
	[3-1]			[5-3+1]	
	5_1	5		7_1	7
	[1-1+1]			[1-1+1-1]	
	5_2	32		7_2	52
	[3-2]			[5-3]	
	6_1	42		7_3	43
	[5-2]			[3-3+2]	



Is er een gesloten pad
dat precies een maal door
elk van de knooppunten gaat?

26 en 27 augustus in Eindhoven
3 en 4 september 1999 in Amsterdam

Stichting Mathematisch Centrum

Vakantiecursus 1999

Voor leraren in de exacte vakken VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden organiseert het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) in 1999 een vakantiecursus met als thema:

Onbewezen vermoedens

Ook dit jaar betreft het een tweedaagse cursus, die zowel in Eindhoven als in Amsterdam wordt gehouden en wel op **donderdag 26 augustus en vrijdag 27 augustus in Eindhoven** in het LaPlace-gebouw van de Technische Universiteit Eindhoven, Den Dolech 2 te Eindhoven.

Bij de cursus zijn inbegrepen twee lunches op de cursusdagen.

Op **vrijdag 3 september en zaterdag 4 september in Amsterdam** in het CWI, Kruislaan 413 te Amsterdam.

Bij de cursus is inbegrepen een warme maaltijd op vrijdag en een lunch op zaterdag.

Aanmelding voor deelname aan de cursus kan geschieden door het aanmeldingsformulier achter in deze brochure in te vullen en vóór 15 augustus 1999 op te sturen aan het CWI.

NB. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit. Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar. Degene die daarop prijs stelt, gelieve het betreffende formulier in te vullen.

Ten geleide

Het bewijs van De Laatste Stelling van Fermat door de Britse wiskundige Andrew Wiles is zonder enige twijfel de meest opzienbarende mathematische gebeurtenis van de afgelopen jaren geweest. De dramatische ontstaansgeschiedenis ervan, vol spanning en sensatie, die in 1995 uitmondde in de publikatie van Wiles bewijs in de *Annals of Mathematics*, is al vele malen verteld. Al die publiciteit heeft ook de schijnwerpers gericht op de belangrijke rol die vermoedens in de wiskunde spelen, en velen hebben zich inmiddels afgevraagd wat het volgende grote vermoeden zal zijn dat bedwongen gaat worden. Dat het daarbij snel kan gaan, bleek vorig jaar, toen Tom Hales bekendmaakte dat hij het *vermoeden van Kepler* bewezen had, dat neerkomt op de bewering dat de bekende kanonskogelstapeling de dichtst mogelijke bolstapeling in de ruimte is.

Het vermoeden van Fermat en het vermoeden van Kepler hebben gemeen dat de probleemstelling ervan (maar niet het bewijs!) vrij gemakkelijk uit te leggen is aan de geïnteresseerde leek. Dat geldt ook voor een aantal andere beroemde vermoedens die nog niet zijn opgelost, met name uit de getallentheorie. Maar andere vermoedens, die een minstens zo rijke geschiedenis hebben en die op wiskundigen een minstens zo grote aantrekkingskracht uitoefenen, zijn veel moeilijker aan buitenstaanders duidelijk te maken. Ook veel beroepswiskundigen zullen dikwijls niet direct een helder beeld hebben van de draagwijdte ervan.

Dit was voor de programmacommissie een van de redenen om voor de Vacantiecursus van 1999 als thema *Onbewezen vermoedens* te kiezen. Het is niet ondenkbaar, ja, gezien de enorme toename van de hoeveelheid wiskundig research in de afgelopen decennia zelfs tamelijk waarschijnlijk, dat we de komende jaren bewijzen zullen zien verschijnen van andere beroemde vermoedens. Het is dan alleszins gewenst dat elke wiskundige daar over mee kan praten. Maar belangrijker nog is het feit dat veel van die vermoedens laten zien dat de frontlijn van het wiskundig onderzoek toch altijd weer verbonden kan worden met eenvoudige resultaten en onderzoeksvragen, die alle wiskundig geïnteresseerden aan zullen spreken. De sprekers van deze Vacantiecursus hebben zich stuk voor stuk de taak gesteld om u niet alleen kennis te laten maken met een aantal beroemde Onbewezen Vermoedens, die men met recht kroonjuwelen van de wiskunde mag noemen, maar u ook de meer elementaire, maar daarom niet minder flonkerende edelstenen te tonen die in die gebieden ook voor de beginner al voor het oprapen liggen.

In vogelvlucht volgt hier een overzicht van het programma.

De eerste voordracht biedt een algemene inleiding over de rol van vermoedens in de wiskunde. Naast aandacht voor wiskundige en historische aspecten, zullen er ideeën en suggesties gegeven worden om ook in het onderwijs aan vermoedens een veel prominere plaats te geven.

De volgende spreker, *dr. P. Steenhagen*, behandelt vermoedens in de getallentheorie, met name vermoedens over priemgetallen. Denk bijvoorbeeld aan de vraag of er oneindig veel priemtweelingen zijn, of aan het vermoeden van Goldbach, dat inhoudt dat elk even getal dat groter dan of gelijk is aan 4 geschreven kan worden als de som

van twee priemgetallen. Onthutsend bij dit soort vragen is vaak de tegenstelling tussen de eenvoud van de vraagstelling en de klaarblijkelijke moeilijkheid van het vinden van een oplossing.

Aansluitend zal *prof.dr. R. Tijdeman* een van de beroemdste en waarschijnlijk ook een van de moeilijkste vermoedens uit de analytische getallentheorie belichten, de *Riemann-hypothese*. Dat is een voorbeeld van een vermoeden dat veel lastiger aan leken is uit te leggen, omdat het betrekking heeft op de ligging van zekere nulpunten van de complexe zeta-functie, die gedefinieerd wordt als analytische voortzetting van de som van een oneindige reeks. Toch zijn er ook daarbij weer aanknopingspunten met vragen en resultaten die wél direct aanspreken. In het tweede deel van zijn voordracht wordt een recenter vermoeden uit de getallentheorie behandeld, dat de Laatste Stelling van Fermat als bijzonder geval omvat.

De eerste cursusdag wordt afgesloten met een voordracht van *dr. P.W.H. Lemmens* over het vermoeden van *Poincaré*, een vermoeden uit de topologie, de 'gummi-meetkunde', waarin alles draait om eigenschappen die niet veranderen onder continue vervormingen. We zullen daarvoor een uitstapje moeten maken naar driedimensionale variëteiten in een (minstens) vierdimensionale ruimte, dus dat belooft een spannende excursie te worden!

Dr. J.B.M. Melissen opent de tweede dag met *Pakkende problemen*, een voordracht over de vraag hoe je binnen zekere vlakke of ruimtelijke figuren zo veel mogelijk cirkels, respectievelijk bollen kunt opsluiten zonder dat ze elkaar overlappen. Dat is een onderzoeksterrein waar haast elk vermoeden dat je kunt bedenken een maximum aan inventiviteit en creativiteit lijkt te vragen. Het vermoeden van Kepler en de oplossingstactiek van Hales daarvoor zullen zeker ook ter sprake komen.

De voordracht van *prof.dr. G.B.M. van der Geer* behandelt vermoedens en resultaten uit de knopentheorie, een terrein dat teruggaat tot de vorige eeuw, maar waarbij juist de afgelopen decennia spectaculaire vooruitgang is geboekt. Bovendien heeft de knopentheorie onverwachte toepassingen gevonden in de theoretische natuurkunde en in het DNA-onderzoek in de biologie.

Na een uurtje zelfwerkzaamheid, in de vorm van vraagstukken die met verschillende van de gehouden voordrachten te maken hebben, wordt de cursus afgesloten met een lezing van *dr. F. Beukers* onder de intrigerende titel $P = NP$? De kernwoorden in die voordracht zijn complexiteit en berekenbaarheid. Voor tal van theoretische en praktijkproblemen hebben we oplossingsalgoritmen die door computers kunnen worden uitgevoerd, waarbij de rekentijd, en dus de praktische oplosbaarheid, afhangt van de grootte van het ingevoerde probleem. Het vermoeden $P \neq NP$ houdt in dat er een klasse van problemen bestaat waarbij de rekentijd in zekere zin onbeheersbaar groeit met de grootte van de invoer.

Al met al belooft de Vacantiecursus 1999, die zich de laatste jaren in een toenemende belangstelling van wiskundeleraren heeft mogen verheugen, ook deze keer weer twee interessante en inspirerende dagen op te leveren, waarbij de mogelijkheid om aan het begin van het nieuwe schooljaar in een ongedwongen sfeer weer tal van goede bekenden te ontmoeten, niet weinig aan het welslagen zal bijdragen.

J. van de Craats

Programma Eindhoven

26 en 27 augustus 1999

donderdag 26 augustus

10.00 – 10.55	Ontvangst, koffie
10.55 – 11.00	Opening
11.00 – 11.45	De rol van vermoedens in de wiskunde J. van de Craats
11.45 – 12.15	Pauze
12.15 – 13.00	Priemgetallen P. Stevenhagen
13.00 – 14.00	Lunch
14.00 – 14.45	De Riemann-hypothese en het abc-vermoeden R. Tijdeman
14.45 – 15.15	Pauze
15.15 – 16.00	Het vermoeden van Poincaré P.W.H. Lemmens

vrijdag 27 augustus

10.00 – 10.45	Pakkende problemen J.B.M. Melissen
10.45 – 11.15	Pauze
11.15 – 12.00	Knopen G.B.M. van der Geer
12.00 – 13.00	Lunch
13.00 – 13.45	Oefeningen
13.45 – 14.15	Pauze
14.15 – 15.00	$P = NP?$ F. Beukers
15.00 – 15.05	Sluiting

Programma Amsterdam

3 en 4 september 1999

vrijdag 3 september

15.00 – 15.25	Ontvangst, koffie
15.25 – 15.30	Opening
15.30 – 16.15	De rol van vermoedens in de wiskunde J. van de Craats
16.15 – 16.45	Pauze
16.45 – 17.30	Priemgetallen P. Stevenhagen
17.30 – 18.30	Warme maaltijd
18.30 – 19.15	De Riemann-hypothese en het abc-vermoeden R. Tijdeman
19.15 – 19.45	Pauze
19.45 – 20.30	Het vermoeden van Poincaré P.W.H. Lemmens

zaterdag 4 september

10.00 – 10.45	Pakkende problemen J.B.M. Melissen
10.45 – 11.15	Pauze
11.15 – 12.00	Knopen G.B.M. van der Geer
12.00 – 13.00	Lunch
13.00 – 13.45	Oefeningen
13.45 – 14.15	Pauze
14.15 – 15.00	$P = NP?$ F. Beukers
15.00 – 15.05	Sluiting

De rol van vermoedens in de wiskunde

J. van de Craats
KMA

Iedere wiskundestelling begint zijn leven als een vermoeden. Een vermoeden over een relatie, een samenhang of een algemene wetmatigheid. Soms is het eenvoudig om de juistheid ervan te bevestigen of te weerleggen. Zo kost het weinig moeite om het vermoeden te verifiëren dat 1999 een priemgetal is. Dat vermoeden is dus *triviaal*, en daarmee verdwijnt het haast even snel van het toneel als het is opgekomen, zonder dat het ooit een stelling zal worden. Maar hoe zit het met het getal 1111...1111 dat uit 1999 enen bestaat? Het vermoeden dat dit een priemgetal is, is steviger kost. En diezelfde reeks cijfers in het tweetallig stelsel, of in een willekeurig ander talstelsel? Haast ongemerkt zijn we op leuke, niet-triviale onderzoeksvragen gestuit.

Zolang de wiskunde bestaat, moeten er ook wiskundige vermoedens geweest zijn. Of ze ook altijd als zodanig herkend en benoemd zijn, is echter de vraag. Zo vinden we op een Babylonische kleitablet van bijna vierduizend jaar geleden reeds voorbeelden in spijkerschrift van wat we nu Pythagoreïsche drietallen noemen, drietallen natuurlijke getallen (a, b, c) waarvoor geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$. Naast de bekende voorbeelden $3^2 + 4^2 = 5^2$ en $5^2 + 12^2 = 13^2$ treffen we daar ook enige veel grotere exemplaren aan, zoals $169^2 = 119^2 + 120^2$ of $18541^2 = 12709^2 + 13500^2$. Dat je zulke drietallen 'bij toeval' vindt, lijkt uitgesloten. De Babyloniërs hadden blijkbaar een recept om ze te maken. Vele eeuwen later, bij Euclides en nog later ook bij Diophantos, vinden we een algemene methode om er zelfs oneindig veel te construeren. In moderne termen geformuleerd is die methode gebaseerd op de formule $(p^2 + q^2)^2 = (2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2$. Er is daarbij echter nog geen sprake van de vraag of je op zo'n manier ook *alle* Pythagoreïsche drietallen kunt genereren. Triviaal is de opmerking dat het voldoende is om slechts drietallen te bekijken waarin a , b en c geen gemeenschappelijke factoren hebben. Het is een plausibel vermoeden dat er in dat geval inderdaad natuurlijke getallen p en q zijn waarvoor geldt dat $a = 2pq$ en $b = p^2 - q^2$. Het bewijs daarvan vereist enig vernuft; als je dat toepast, promoveer je het vermoeden tot een bewezen stelling.

Fermat kende die stelling. Voor hem hadden Pythagoreïsche drietallen geen geheimen. Hij gebruikte ze om te bewijzen dat er geen geheeltallige oplossingen zijn van de vergelijking $a^4 + b^4 = c^2$ (en dus evenmin van de vergelijking $a^4 + b^4 = c^4$). In de kantlijn van zijn exemplaar van de Arithmetica van Diophantos schreef hij dat hij een prachtig bewijs had van een generalisatie van deze stelling, maar dat bewijs zelf heeft hij niet nagelaten. Zo schiep hij onbedoeld en ongewild een van de beroemdste vermoedens uit de wiskunde, een vermoeden dat meer dan 300 jaar op een gepubliceerd bewijs moest wachten.

In mijn voordracht wil ik een aantal vermoedens de revue laten passeren die voor de ontwikkeling van de wiskunde van betekenis zijn geweest. Sommige zijn uiteindelijk opgelost, andere staan nog steeds open. De oude Grieken vermoedden dat alle meetbare grootheden in getallen, dat wilde bij hen zeggen *rationale* getallen, uitgedrukt kunnen worden. Dat dit al misloopt bij de diagonaal van een vierkant met zijdenlengte 1, was een schok die nog lang na zou werken. Sindsdien hebben irrationaliteitsproblemen vele wiskundigen beziggehouden. Dat de getallen $\sqrt{2}$, e en

π irrationaal zijn, is inmiddels bekend, maar dat bijvoorbeeld $\sqrt{2} + \pi + e$ een irrationaal getal zou zijn, is alleen maar een vermoeden.

Een ander klassiek vermoeden dat van groot belang gebleken is, betrof het parallellenpostulaat uit de Elementen van Euclides. Dat dit eigenlijk geen axioma zou zijn, maar een stelling die uit de andere axioma's kan worden afgeleid, werd door veel wiskundigen van naam als vermoeden uitgesproken. Velen hebben tevergeefs naar het bewijs van dat vermoeden gezocht. En net als bij allerlei andere taaie vermoedens hebben ook hier al die mislukte bewijspogingen de wiskunde toch aanwijsbaar vooruit geholpen.

Wat kan de rol zijn van vermoedens in het wiskundeonderwijs? Ook aan die vraag wil ik aandacht besteden. Het is een goede traditie om de wiskunde in het onderwijs te presenteren als een overzichtelijk gestructureerd, afgerond geheel van methoden, technieken en stellingen. Eerlijk gezegd is het ook een van de aantrekkelijke aspecten van ons vak dat dit überhaupt mogelijk is. Maar het leven dreigt er op die manier wel uit weggehaald te worden. Je ziet alleen het eindproduct, en niet de wegen die er naar toe geleid hebben. Opgaven hebben in zo'n benadering ook vaak het karakter van receptmatige driloefeningen. Als we er echter in slagen de wiskunde ook op school meer te presenteren als een spannend avontuur, waarin we vermoedens proberen te formuleren en te bewijzen, dat wil zeggen dat we er zelf achter proberen te komen hoe de zaken in elkaar zitten, dan verandert de wiskunde van een dor en droog leervak in een spannend onderzoeksterrein vol intellectuele uitdagingen. Misschien dat we dan de huidige trend, die scholieren steeds verder van de wiskunde, de natuurwetenschappen en de techniek lijkt weg te voeren, kunnen doorbreken.

Priemgetallen

Peter Stevenhagen
Universiteit van Amsterdam

Een getal $n > 1$ heet een *priemgetal* als 1 en n zelf de enige positieve delers van n zijn. Bij Euclides kunnen we al lezen waarom de verzameling

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots, 1999, \dots\}$$

van priemgetallen oneindig is. Enig staren naar de rij van priemgetallen geeft al snel aanleiding tot de meest diverse vragen. Om een paar te noemen:

- Hoeveel priemgetallen kunnen we ongeveer verwachten tussen 1 en 10^{1000} ? Neemt de 'dichtheid' van de verzameling priemgetallen op een of andere manier 'regelmatig' af?
- Alle priemgetallen $p > 5$ hebben eindcijfer 1, 3, 7 of 9. Komen alle vier de mogelijkheden oneindig veel voor? Komen ze misschien zelfs bij benadering 'even vaak' voor?
- Zijn er priemgetallen eindigend op 1000 enen? Of beginnend met 1000 enen? Of zelfs willekeurig grote priemgetallen die alleen uit enen bestaan?
- Is ieder even getal een som van twee priemgetallen? Zijn er oneindig veel priemgetallen p waarvoor $p + 2$ óók priem is? Zijn er oneindig veel priemgetallen p waarvoor $p - 1$ een kwadraat is? Of een derde macht? Of een 2-macht?
- Als we modulo 7 rekenen is de verzameling van machten van 3 gelijk aan

$$\{3, 3^2 = 2, 3^3 = 6, 3^4 = 4, 3^5 = 5, 3^6 = 1\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Bestaat voor *ieder* priemgetal p de verzameling $\{1, 2, 3, \dots, p - 1\}$ van de niet-nul resten modulo p uit de machten van een vast getal a ? Hoe vaak zou $a = 3$ werken?

Niet op al deze vragen kan de moderne wiskunde een antwoord geven. Tot onze schande blijkt dat iedere scholier meer kan vragen dan tien wiskundigen kunnen beantwoorden. Ik zal in bovenstaande situaties uitleggen wat we weten en wat we vermoeden.

De Riemann-hypothese en het *abc*-vermoeden.

Rob Tijdeman
Universiteit Leiden

In Stevenhagen's voordracht worden een aantal vermoedens over priemgetallen geformuleerd. Als je over eigenschappen van priemgetallen leest, kom je vaak de Riemann-hypothese of een generalisatie ervan tegen. Dat verband is niet evident, want de Riemann-hypothese heeft betrekking op de ligging van de nulpunten van de (complexe) Riemann-zetafunctie. Deze functie is welbekend voor $x > 1$, nl. $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Er geldt bijv.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Het gaat nu echter om de ligging van de nulpunten waarvan het reële deel tussen 0 en 1 ligt. De in 1859 geformuleerde Riemann-hypothese zegt dat al deze nulpunten reëel deel $\frac{1}{2}$ hebben. In het eerste deel van de voordracht zal ik de Riemann-zetafunctie definiëren, de Riemann-hypothese toelichten, aangeven wat op dit gebied bereikt is, de samenhang met priemgetallen en priemgetalstelling onthullen, en aangeven op welke wijze priemgetallen regelmatig verdeeld zijn als de Riemann-hypothese wel waar is, dan wanneer zij niet waar is.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diene mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s , welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess nicht leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden.

Ich setze nun $s = \frac{1}{2} + ti$ und

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t),$$

so dass

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - (t + \frac{1}{4}) \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos(\frac{1}{2}t \log x) dx$$

oder auch

$$\xi(t) = 4 \int_1^\infty \frac{d(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x))}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \cos(\frac{1}{2}t \log x) dx.$$

Wurzeln von $\xi(t) = 0$. Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.

Het tweede deel van de voordracht zal ik spreken over een betrekkelijk nieuw vermoeden, nl. het in 1985 door Oesterlé en Masser geformuleerde *abc*-vermoeden. Dit vermoeden zegt dat als twee onderling ondeelbare getallen a en b som c hebben, het product van de priemdelers van abc relatief groot moet zijn. Een vergelijking $2^x + 3^y = 5^z 7^w$ kan dus alleen kleine oplossingen x, y, z, w hebben, want het product van de priemdelers is maar 210. Het *abc*-vermoeden impliceert veel oudere vermoedens over vergelijkingen. Tijdens mijn voordracht zal ik laten zien hoe Fermat's laatste stelling direct uit een variant van het *abc*-vermoeden volgt. Het *abc*-vermoeden doet ook uitspraken over de vergelijking $x^k + y^m = z^n$, waarbij k, m, n, x, y, z positieve gehele getallen zijn. In mijn voordracht zal ik vertellen wat er recent over deze vergelijking bewezen is. Opmerkelijk is dat ook vermoedens in de algebraïsche meetkunde uit (generalisaties van) het *abc*-vermoeden volgen, evenals vermoedens over reële nulpunten van zekere generalisaties van de Riemann-zetafuncties

$$\begin{array}{rcl} 17^7 + 76271^3 & = & 21063928^2 \\ 1414^3 + 2213459^2 & = & 65^7 \\ 9262^3 + 15312283^2 & = & 113^7 \\ 43^8 + 96222^3 & = & 30042907^2 \\ 33^8 + 1549034^2 & = & 15613^3 \end{array}$$

F. Beukers & D. Zagier, 1993

Het Poincaré-vermoeden

P.W.H. Lemmens
Universiteit Utrecht

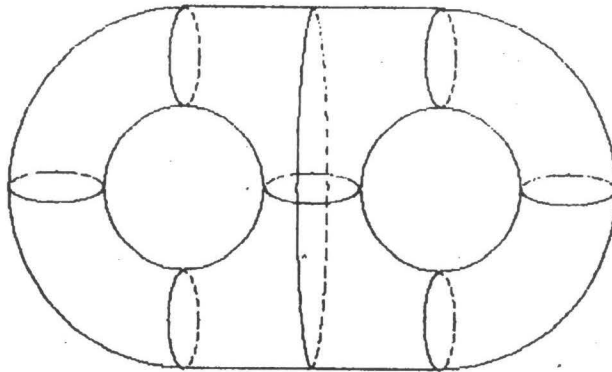
Henri Poincaré werd geboren in 1854 te Nancy en overleed in 1912 te Parijs. Hij was een neef van Raymond Poincaré, die president van Frankrijk was in de Eerste Wereldoorlog. Hij zag slecht en was buitengewoon onhandig. In *Men of Mathematics* noemt E.T. Bell hem "The Last Universalist", en verder schrijft hij: "Had Poincaré been as strong in practical science as he was in theoretical he might have made a fourth with the incomparable three, Archimedes, Newton, and Gauss."

Het POINCARÉ VERMOEDEN luidt:

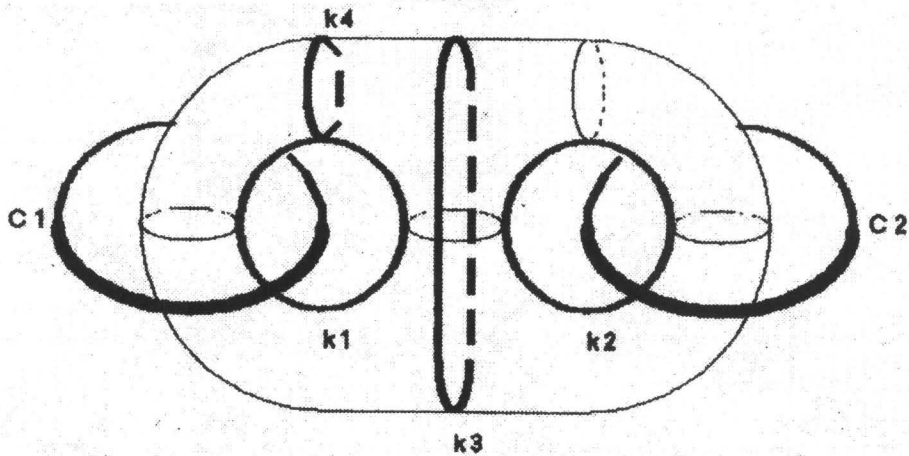
Een gesloten, samenhangende, en enkelvoudig samenhangende 3-dimensionale variëteit M^3 is homeomorf met de 3-dimensionale sfeer S^3 .

Hierin komen nogal wat termen voor die om uitleg vragen. Die uitleg bewaren we grotendeels voor de voordracht. Hier merken we slechts op dat een 3-dimensionale variëteit iets is dat er 'lokaal gezien' uitziet als een stukje van de $\mathbf{R}^3$. Een speciale 3-variëteit is de 3-dimensionale sfeer S^3 , die we kunnen definiëren als de verzameling van alle punten in $\mathbf{R}^4$ met afstand 1 tot de oorsprong. Het Poincaré-vermoeden heeft betrekking op de vraag welke 3-variëteiten een-eenduidig en continu te deformeren zijn in een S^3 .

Het begrip variëteit is iets gemakkelijker te begrijpen wanneer we een dimensie lager gaan. Een 2-variëteit ziet er lokaal uit als een stukje $\mathbf{R}^2$, en daarvan kennen we uit de dagelijkse ervaring genoeg voorbeelden. Denk maar aan het oppervlak van een bol, een ring, een krakeling, of een soepkop met twee oren. Bij de topologische classificatie gaat het om de vraag wanneer twee van zulke oppervlakken homeomorf zijn, dat wil zeggen dat we ze, als waren het stukken gummi, zonder scheuren in elkaar kunnen overvoeren. Natuurlijk moeten we dan eerst weer een heel scala aan technische begrippen uit de kast halen om deze nog enigszins vaag geformuleerde vraagstelling voor een wiskundige analyse toegankelijk te maken. Vervolgens blijken gesloten krommen op zo'n oppervlak bij die classificatie een cruciale rol te spelen. Met name de vraag of twee van die krommen op zo'n oppervlak al dan niet continu in elkaar te deformeren zijn. In de Figuren 1 en 2 ziet u het oppervlak van een soort krakeling waarop verscheidene gesloten krommen getekend zijn. Van sommige van die krommen kunnen we gemakkelijk bewijzen dat ze niet continu in elkaar te deformeren zijn. Zo zien we dat kromme k_1 wel geschakeld is met cirkel C_1 maar niet met cirkel C_2 , terwijl dit voor k_2 precies andersom is. Bij continue transformaties binnen het oppervlak verandert deze 'schakeltoestand' niet, en dus zijn k_1 en k_2 niet in elkaar over te voeren. Op net zo'n manier blijkt dat noch k_1 noch k_2 binnen het oppervlak tot een punt samen te trekken zijn. Het is echter aanzienlijk moeilijker om te laten zien dat de 'centrale' kromme k_3 niet samentrekbaar is. Als een wat eenvoudiger oefening kunt u zelf eens proberen aan te tonen dat kromme k_4 niet samentrekbaar is. Met behulp van gesloten krommen, en in het algemeen ook met behulp van soortgelijke hogerdimensionale structuren, kan men bij elke n -variëteit zekere groepen definiëren, de homologiegroepen ervan, die invariant blijven onder homeomorfismen. Variëteiten



FIGUUR 1.



FIGUUR 2.

met verschillende homologiegroepen kunnen dus niet homeomorf zijn. De vraag is echter of, omgekeerd, variëteiten waarvan alle homologiegroepen overeenstemmen, ook noodzakelijkerwijze homeomorf zijn. Voor dimensie 3 is dit equivalent met het Poincaré-vermoeden. Voor alle andere dimensies is deze vraag inmiddels bevestigend beantwoord. Alleen het Poincaré-vermoeden staat dus nog open.

Pakkende problemen

Hans Melissen
Hogeschool 's Hertogenbosch

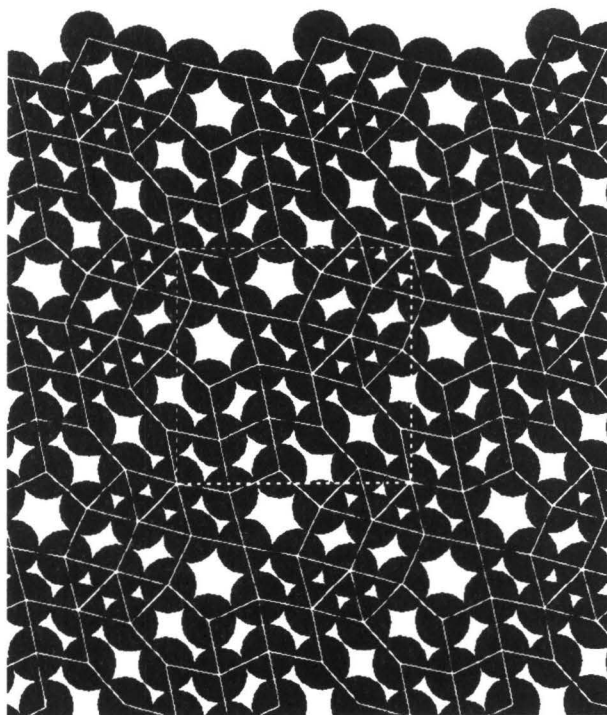
In deze lezing besteden we aandacht aan eindige pakkingen (stapelingen) en overdekkingen. Hoewel we af en toe algemenere situaties aan zullen stippen zullen we ons meestal beperken tot pakkingen in het vlak, en dan zelfs nog met cirkels. Dat blijkt al lastig zat te zijn, en je kunt en in ieder geval leuke plaatjes van maken. Een typisch pakkingsprobleem is het volgende. Zes wijnflessen moeten in een vierkante doos worden verpakt. Hoe groot moet deze doos minimaal zijn? Een soortgelijk probleem is: hoe groot kan de doos zijn zodat de flessen er strak ingezet kunnen worden, zonder te kunnen rammelen? Een andere variant is als volgt. Op het noordelijk halfrond wonen zes heersers die een zodanige hekel aan elkaar hebben dat ze zover mogelijk uit elkaar willen wonen. Waar moet ieder zijn hoofdstad vestigen zodat de dichtstbijzijnde buurman zover mogelijk weg woont?

Een voorbeeld van een overdekkingsprobleem luidt als volgt. In een land moeten zeven zendmasten worden geplaatst zodanig dat elke plek door minstens één zender wordt bestreken. Waar moeten de zendmasten worden neergezet, en wat is het minimale bereik van de zenders?

Pakkings- en overdekkingsproblemen behoren niet tot de eenvoudigste opgaven uit de wiskunde. Het bewijs dat je de beste bolstapelning krijgt door bollen te stapelen op een manier waarvan je denkt dat het de dichtste bolstapelning oplevert is slechts enkele maanden oud. Het probleem heeft honderden jaren op een oplossing moeten wachten. Het blijkt, zoals gezegd, dat je genoeg problemen over houdt als je je beperkt tot het platte vlak, en zelfs als de objecten waarmee je stapelt of overdekt simpele cirkels zijn. Onderzoek naar dergelijke vraagstukken is pas echt begonnen in de zestiger jaren met cirkelpakkingen in een vierkant en een cirkel. Hoewel de problemen op het eerste gezicht eenvoudig lijken — het lijkt immers niet meer dan elementaire metkunde plus een dosis uithoudingsvermogen — blijken aan het oplossen ervan toch de nodige haken en ogen te zitten. In de eerste publicaties werden allerhande pakkingen gegeven waarvan men de optimaliteit vermoedde, maar die alleen in eenvoudige gevallen kon worden bewezen. Niet alle vermoedens bleken overigens juist te zijn. We zullen een uitgebreid historisch overzicht van deze ontwikkelingen geven.

Al snel manifesteerden zich twee verschillende aanpakken. De ene is een echte tak van sport die zich toespitst op het verbeteren en uitbreiden van eerder gepubliceerde resultaten. De andere uitdaging bestaat in het leveren van bewijzen voor deze vermoedens, veel moeilijker, in het algemeen.

We zullen ook nog stapelingen op een bol bekijken. Voor bepaalde toepassingen is het van belang om kleuren te bepalen die zo verschillend (onderscheidbaar) mogelijk zijn. Dit is te vertalen in het wiskundige probleem om punten op het achtste gedeelte van een boloppervlak zodanig neer te plaatsen dat de minimale afstand tussen de punten zo groot mogelijk is. Op de hele bol staat het probleem bekend als het probleem van Tammes, naar de Nederlandse bioloog die het probleem bestudeerde in verband met de verdeling van uittree-openingen op stuifmeelkorrels.



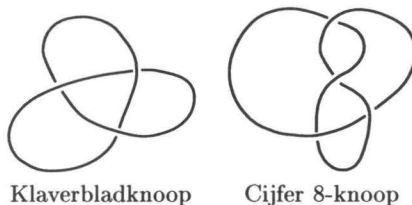
Knopen

Gerard van der Geer
Universiteit van Amsterdam

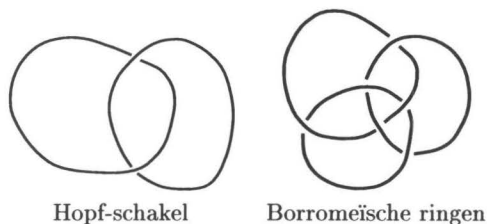
Iedereen weet hoe je een knoop in een touwtje kunt leggen. Deze knoop kun je dan ook weer losmaken. Dat lukt niet meer als je de uiteinden van het touwtje met elkaar verbindt. Voor de wiskundige is een knoop daarom een inbedding van een cirkel in de 3-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$. Twee knopen beschouwen we als gelijk als ze door een continue deformatie in elkaar kunnen worden getransformeerd. De centrale vraag in de knopentheorie is of een knoop een echte knoop is of in de triviale knoop

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

kan worden getransformeerd. Bij de klaverbladknoop (zie de figuur) kan dat niet.



Dat ligt na een blik op het diagram voor de hand; de vraag is natuurlijk hoe je dit bewijst. Voor meer ingewikkelde knopen is het in het algemeen erg lastig in te zien of de knoop een echte knoop is of niet. Knopen worden hierbij aangegeven met een diagram als in bovenstaande figuren. Zo een diagram kan opgevat worden als een projectie van de knoop. Een en dezelfde knoop kan veel verschillende diagrammen hebben. Een variant wordt verkregen door meerdere cirkels in $\mathbb{R}^3$ te beschouwen. Zo een figuur heet een *schakel*. Hieronder staan twee eenvoudige voorbeelden.



De belangstelling van de wetenschap voor knopen dateert uit de vorige eeuw toen Lord Kelvin (William Thompson, 1802-1907) het idee opperde dat atomen knopen in de ether waren. Hij hoopte op deze manier niet alleen de elementen te classificeren, maar ook hun stralingsspectra. Dit idee leidde tot de eerste pogingen knopen te classificeren. De spits werd afgebeten met een artikel van dominee Thomas P. Kirkman,

die nogal moeilijk toegankelijke artikelen schreef. De schotse natuurkundige Peter Guthrie Tait zette het werk van Kirkman voort en tegelijkertijd werkte ook de Amerikaanse wiskundige C.N. Little aan de classificatie. Hij publiceerde in 1899 een lijst van knopen met minder dan 10 kruisingen. Hieronder staat de eerste zijde van een moderne classificatie (uit D. Rolfsen: *Knots and Links*).

	3_1 3 [1-1]		6_2 312 [3-3+1]
	4_1 22 [3-1]		6_3 2112 [5-3+1]
	5_1 5 [1-1+1]		7_1 7 [1-1+1-1]
	5_2 32 [3-2]		7_2 52 [5-3]
	6_1 42 [5-2]		7_3 43 [3-3+2]

Classificatie

Bij deze classificatie werden heuristische principes gebruikt waarvoor geen goede rechtvaardiging bestond en deze principes werden zo vermoedens die vaak lange tijd onbewezen waren of het nog steeds zijn.

Pas in de jaren twintig van deze eeuw begonnen wiskundigen zich echt voor knopen te interesseren en van de zojuist ontwikkelde tak van de wiskunde, de topologie, werd dankbaar gebruik gemaakt. Dat leidde tot veel vooruitgang, die werd samengevat in een boek van Reidemeister (Knotentheorie, 1932). Daarna ontwikkelt de knopentheorie zich gestaag verder, totdat in 1984 een ware revolutie plaatsvindt.

In 1984 ontdekte Vaughan Jones, een wiskundige uit Nieuw-Zeeland, een nieuwe invariant van knopen, het Jonespolynoom. Hij werkte op een totaal ander gebied van de wiskunde, de functionaalanalyse, maar zijn onderzoek leidde onverwacht tot een doorbraak in de knopentheorie waarvoor hij de Fieldsmedaille (het equivalent van de Nobelprijs) heeft gekregen.

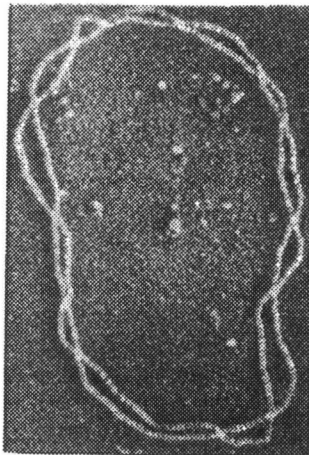
Verbazingwekkend genoeg kan het Jones-polynoom van een knoop direct in termen van het diagram gedefinieerd worden. Het had eigenlijk al in 1900 ontdekt kunnen worden! Het hangt niet van het gekozen diagram van een knoop af en is dus een invariant van de knoop. Voor de klaverbladknoop bijvoorbeeld is het Jonespolynoom $t + t^3 - t^4$. Hebben twee knopen een verschillend Jones-polynoom, dan zijn ze dus van verschillend type. Het spiegelbeeld van de klaverbladknoop heeft als polynoom

$t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$ en we zien dat deze knoop en zijn spiegelbeeld niet van hetzelfde type zijn. De ontdekking van Jones leidde tot vele andere polynoominvarianten en bracht de knopentheorie in een stroomversnelling.

De invoering van het Jonespolynoom maakte het ook mogelijk enkele van de heuristische principes van Kirkman, Tait en Little te bewijzen. Bijvoorbeeld het vermoeden van Tait en anderen dat iedere twee gereduceerde alternerende (dus afwisselend onder- en bovenkruising) diagrammen van een schakel hetzelfde aantal kruisingen hebben.

Na de eerste successen van het atoommodel van Niels Bohr werd het charmante idee van Thompson verlaten, maar knopen worden tegenwoordig weer toegepast in de natuurkunde, zij het op een totaal andere manier dan Lord Kelvin zich voorstelde. Maar veel verrassender is wellicht de toepassing in de biologie, waar knopen gevonden worden in de strengen DNA in de celkern waarin de genetische informatie wordt opgeslagen.

Ter illustratie volgt hier een foto met een DNA-knoop uit de natuur.



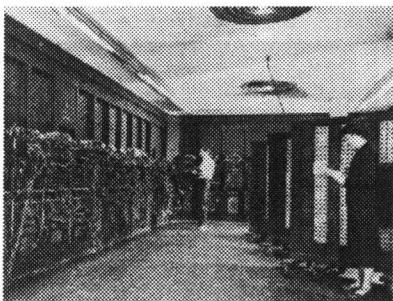
Een DNA-knoop

In de voordacht wordt een inleiding in de theorie van knopen gegeven en wordt het Jones-polynoom ingevoerd. Dat wordt dan gebruikt om allerlei resultaten over knopen af te leiden en een vermoeden te bewijzen.

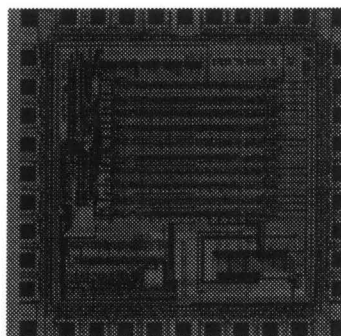
$P=NP?$

Frits Beukers
Universiteit Utrecht

Rond 1945 werd de eerste elektronische computer in gebruik genomen. Deze was eigendom van het Amerikaanse leger, bevatte zo'n 18.800 radiobuizen en luisterde naar de naam ENIAC. Deze machine luidde een nieuw tijdperk in, waar rekenintensieve wiskundeproblemen met behulp van machines konden worden opgelost. In 1949 gebruikte Von Neumann de ENIAC om de eerste 2035 decimalen van π uit te rekenen. Deze berekening duurde zo'n 70 uur. Ter vergelijking, de met de hand berekende 707 decimalen van W.Shanks kosten zo'n vijftien jaar (rond 1873). Op een huidige PC duurt het enkele seconden.



ENIAC, 1946



ENIAC-ON-A-CHIP, 1996

In de veertiger jaren werd ook het simplex algoritme voor de lineaire programmering door de Amerikaanse wiskundige G.B. Dantzig ontwikkeld. Bij Wiskunde A wordt deze methode in dimensie twee behandeld, maar voor de echte praktijkproblemen in dimensie 100 of meer is een computer erg handig. Sterker nog, de beschikbaarheid van computers heeft de ontwikkeling van de lineaire programmering juist in grote mate gestimuleerd.

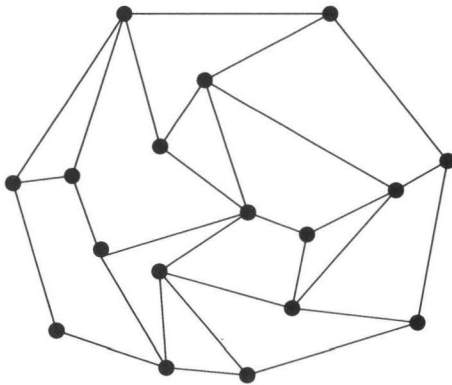
Met de enorme ontwikkeling van de hardware en, daarmee gepaard gaand, de ontwikkelingen in de numerieke wiskunde werden ongekennde mogelijkheden geopend. Men kan tegenwoordig windtunnelexperimenten simuleren en ruimtesondes tot op een paar kilometer nauwkeurig naar Jupiter sturen.

De laatste vijftien jaar is er nog een nieuwe ontwikkeling bijgekomen. Het is mogelijk om de computer niet alleen met getallen te laten rekenen, maar ook met wiskundige objecten. De bekendste programma's op dit gebied zijn MATHEMATICA, MAPLE en voor onderwijsdoeleinden, DERIVE. Met het meetkundeprogramma CABRI is het zelfs mogelijk op grafische wijze meetkundeconstructies uit te voeren en te analyseren.

Het gebruik van de computer in de wiskunde dwingt de beoefenaar op een nieuwe manier naar berekenbaarheid van wiskundige zaken te kijken. Welke dingen zijn berekenbaar, welke dingen niet? Wanneer is een probleem moeilijk, wanneer makkelijk?

Toegegeven, reeds in de dertiger jaren waren enkele pioniers zoals Turing en Church met dit soort vragen bezig. Maar bij gebrek aan echte computers was dit theorie. Tegenwoordig kan iedereen aan den lijve ondervinden wat het is om een computationeel lastig probleem met een computer te moeten oplossen.

Het is de bedoeling van deze voordracht om u een gevoel te geven wat het verschil is tussen de problemen uit de klasse P (in **P**olynomialie tijd oplosbaar) en de klasse NP (Niet-deterministisch en in **P**olynomialie tijd oplosbaar). We zullen uiteraard ook uitleggen wat deze dingen betekenen. Voorbeelden van het eerste type zijn het Euclidisch algoritme voor de grootste gemene deler en het sorteren van woordenlijsten. Voorbeelden van het tweede type zijn het handelsreizigerprobleem, ontbinding van getallen in priemfactoren en Hamiltonpaden in grafen (zie het plaatje hieronder). Men vermoedt dat $P \neq NP$. Dit inderdaad aan te tonen wordt door velen gezien als een van de grootste uitdagingen in de wiskunde.



*Is er een gesloten pad
dat precies een maal door
elk van de knooppunten gaat?*

Cursusgeld

Het cursusgeld bedraagt f 130,00 voor Eindhoven en f 136,50 voor Amsterdam waarbij de syllabus en de maaltijden zijn inbegrepen.

Aanmelding

Bij Simone Panka per e-mail (Simone.Panka@cwi.nl) of per post door het aanmeldingsformulier achter in de brochure in te vullen en op te sturen naar:

Centrum voor Wiskunde en Informatica
t.a.v. Simone Panka
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

Tegelijkertijd dient men het cursusgeld over te boeken naar bank rek.nr. 31.35.57.977 van de Stichting Wiskunde en Informatica Conferenties bij de RABObank te Amsterdam (gironummer van de bank is 187744) onder vermelding van uw naam en VC99.

NB. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit.

Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar. Degene die daarop prijs stelt, gelieve dit bij aanmelding te laten weten door invulling en opzending van het formulier op pagina 24.

Plaats

Amsterdam: CWI, Kruislaan 413, zaal Z011.
Eindhoven: LaPlace-gebouw TU Eindhoven, Den Dolech 2.

Syllabus

De syllabus zal worden uitgereikt bij aankomst op de cursus.

Informatie

Voor nadere informatie over de Vakantiecursus kunt u zich wenden tot Simone Panka, tel. 020 – 592 4009.

Medewerkers

Dr. F. Beukers

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht,
tel. 030-2531419, email: beukers@math.uu.nl

Prof.dr. J. van de Craats

KMA, Postbus 90154, 4800 RG Breda, tel. 076-5273816, email: jcr@euronet.nl

Prof.dr. G.B.M. van der Geer

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam,
Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam, tel. 020-5255247, email:
geer@wins.uva.nl

Dr. P.W.H. Lemmens

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht,
tel. 030-2531426, email: lemmens@math.uu.nl

Dr. J.B.M. Melissen

Hogeschool 's Hertogenbosch, Postbus 732, 5201 AS 's Hertogenbosch, email:
j.melissen@hsbos.nl

Dr. P. Steenhagen

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam,
Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam, tel. 020-5255202, email:
psh@wins.uva.nl

Prof.dr. R. Tijdeman

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden, tel.
071-5277138, email: tijdeman@wi.leidenuniv.nl

Contacten Centrum voor Wiskunde en Informatica

Dr. M. Bakker

Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079,
1090 GB Amsterdam, 020 – 592 4172, e-mail: Miente.Bakker@cwj.nl

Simone Panka

Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079,
1090 GB Amsterdam, 020 – 592 4009, e-mail: Simone.Panka@cwj.nl

Routebeschrijving

Technische Universiteit Eindhoven – LaPlace-gebouw

Met openbaar vervoer:

- Alle universiteitsgebouwen liggen vlakbij het NS-station Eindhoven. U gaat de perrontrap af, dan rechtsaf en via de uitgang aan de noordzijde naar het busstation. U ziet de universiteitsgebouwen schuin rechts liggen op enkele minuten loopafstand. Op het TUE-terrein borden volgen naar “LaPlace-gebouw”.

Met de auto:

- U rijdt Eindhoven binnen richting Centrum. Borden “Technische Universiteit” volgen. U komt dan op de campus. Hier volgt u de borden “LaPlace-gebouw”.

CWI

Met openbaar vervoer:

- Vanaf station Amsterdam-Amstel: bus 67 naar het WCW-Amsterdam Science Park.
- Vanaf station Amsterdam-Centraal: een stoptrein of metro naar Amsterdam-Amstel. Vandaar: zie hierboven. Een alternatief is tram 9 naar het kruispunt Middenweg-Kruislaan en vandaar lopend over de Kruislaan naar het WCW (ongeveer 1 km.).
- Vanaf station Amsterdam-Muiderpoort: lopend via de Insulindeweg en de Molukkenstraat en dan over de brug linksaf de Oosterringdijk op. U ziet dan aan de rechterkant het WCW terrein liggen.

Met de auto:

- Alle autowegen naar Amsterdam komen uit op de rondweg rond Amsterdam: de ring (A10).
Wanneer u uit de richting Amersfoort komt, neemt u de ring richting Utrecht/Den Haag.
Wanneer u uit de richting Utrecht/Den Haag/Schiphol/Haarlem of Zaandam komt, neemt u de ring richting Amersfoort. Op de ring neemt u de afslag Watergraafsmeer/S113 (ring-oost). Aan het eind van de afrit volgt u de richting Science Park/Watergraafsmeer. U rijdt dan op de Middenweg. Bij de eerste kruising met stoplichten gaat u naar rechts: de Kruislaan. Na circa 1 km ligt het WCW/Amsterdam Science Park aan de linkerkant van de weg.

AANMELDINGSFORMULIER VAKANTIECURSUS 1999

Onbewezen vermoedens

Ondergetekende,

Naam:

Functie:

Adres:

Postcode:

Woonplaats:

Telefoon:

wenst deel te nemen aan de Vakantiecursus 1999, die zal worden gehouden te

A. Eindhoven op do. 26 en vr. 27 augustus 1999 []

B. Amsterdam op vr. 3 en za. 4 september 1999 []

en heeft het verschuldigde bedrag (f 130,00 voor Eindhoven en f 136,50 voor Amsterdam) overgemaakt (voor rekeningnummers zie pag. 20).

Gelieve dit formulier vóór 15 augustus 1999 te sturen naar:

Centrum voor Wiskunde en Informatica
t.a.v. Simone Panka
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

Degene die prijs stelt op een nascholingscertificaat wordt verzocht onderstaand formulier in te vullen, onder nauwkeurige vermelding van naam en voornamen (zonder afkortingen), geboortedatum en geboorteplaats.

NASCHOLINGSCERTIFICAAT VAKANTIECURSUS 1999

Onbewezen vermoedens

Naam:

Voornamen (zonder afkortingen):

Geboortedatum:

Geboorteplaats:

Gelieve dit formulier vóór 15 augustus 1999 te sturen naar:

Centrum voor Wiskunde en Informatica
t.a.v. Simone Panka
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam