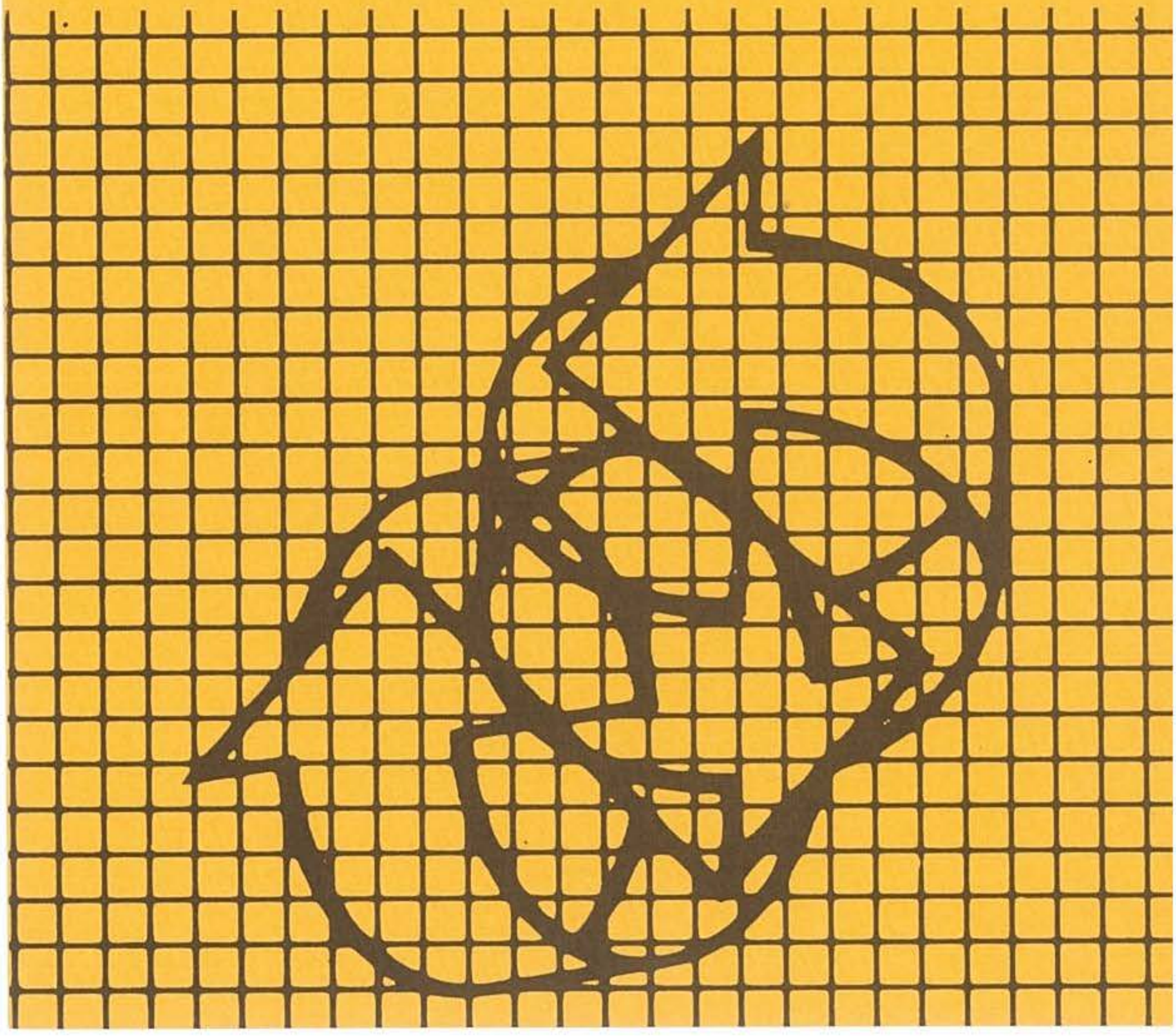
Symmetrie en chaos

CWI

Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science



Symmetrie en chaos

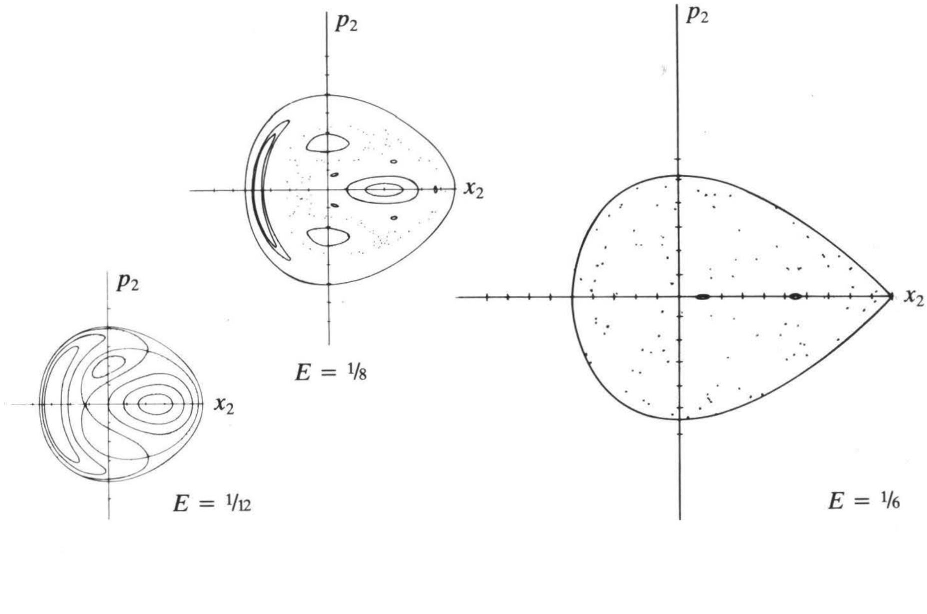
Een discrete tijd dynamisch systeem is een differentievergelijking $x(k + 1) = f(x(k))$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, waarbij f bijvoorbeeld een polynoom is zoals in $x(k + 1) = \lambda x(k)(x(k) - 1)$. Continue tijd dynamische systemen worden gegeven door differentiaalvergelijkingen zoals $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$. In beide gevallen is men geïnteresseerd in de vraag hoe de banen eruitzien die een punt (deeltje) doorlopen kan. In het bijzonder wil men nagaan of het regelmatige banen zijn zoals de planetenbanen of heel wilde banen zoals die gegeven door de differentievergelijking $x(k + 1) = 2x(k)$ als $0 \leq x(k) < 1/2$, $x(k + 1) = 2x(k) - 1$ als $1/2 \leq x(k) \leq 1$. Zoals gemakkelijk is in te zien is dit laatste voorbeeld extreem gevoelig voor de beginvoorwaarde oftewel het startpunt: als de startpunten $x(0)$ en $\bar{x}(0)$ van twee banen x en $\bar{x}$ ongeveer 2^{-n} uit elkaar liggen dan is na n of meer stappen niets meer te zeggen omtrent hoe de baan vanuit $x(0)$ ligt ten opzichte van die vanuit $\bar{x}(0)$, dat wil zeggen over $|x(m) - \bar{x}(m)|$ voor $m \geq n$ is niets meer te voorspellen. Anders gezegd, een preciese meting van $x(m)$ zegt weinig over het verleden van $x(m)$. Het (geïdealiseerde) zonnestelsel is een voorbeeld van een zogenaamd integreerbaar systeem, terwijl het zojuist beschreven voorbeeld het gedrag vertoont dat men *chaotisch* noemt.

Een speciaal belangrijke klasse van systemen zijn de Hamiltoniaanse systemen, die gegeven worden door een stel vergelijkingen van de vorm

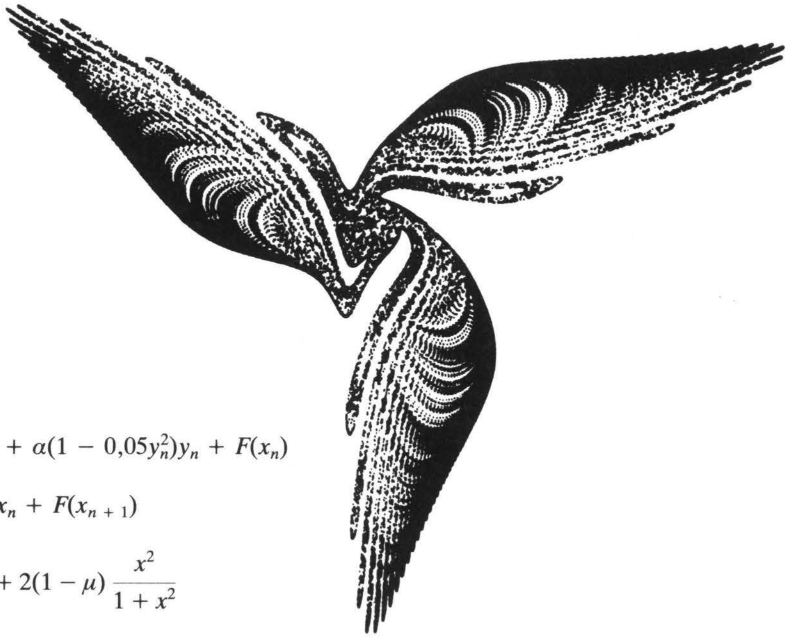
$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \qquad k = 1, \ldots, n$$

waarbij H een gegeven functie van $x_1, \ldots, x_n$ en $p_1, \ldots, p_n$ is; bijvoorbeeld $H = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}p_1^2$, of $H = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_1^2x_2 - \tfrac{1}{3}x_2^3$.

De banen van zo'n systeem liggen in de $2n$-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^{2n}$; dus in de vier-dimensionale ruimte voor het tweede voorbeeld. Nu geldt voor een Hamiltoniaans systeem zoals deze dat als $H(x(0), p(0)) = E$ dan ook $H(x(t), p(t)) = E$ voor alle tijdstippen t. Dus de banen in het tweede voorbeeld liggen altijd op drie-dimensionale constante energie-oppervlakken. Onderstaande plaatjes tonen de doorsnijding van diverse energie oppervlakken met het (x_2, p_2) vlak en daarin de doorsnijding van diverse banen met dit vlak. Voor $E = 1/12$ zijn de intersecties gladde gesloten krommen; dit suggereert dat de banen netjes op twee-dimensionale oppervlakken liggen: het (volledig) integreerbare geval. Voor $E = 1/8$ is het plaatje al veel minder regelmatig: er zijn nog eilanden van regelmatig gedrag maar alle punten komen van één baan. Voor $E = 1/6$ tenslotte lijkt alle regelmatigheid verdwenen en lijkt het systeem chaotisch geworden.



Dit is het zogenaamde Henon-Heiles systeem. De plaatjes komen uit J. Ford, "How random is a coin toss", *Physics Today*, April 1983. Heel mooie patronen kunnen zo ontstaan zoals in onderstaand voorbeeld uit I. Gumorski & C. Mira, "Dynamique chaotique", *Cepadues Ed.*, 1980, blz. 14:



$$x_{n+1} = y_n + \alpha(1 - 0{,}05y_n^2)y_n + F(x_n)$$

$$y_{n+1} = -x_n + F(x_{n+1})$$

$$F(x) = \mu x + 2(1 - \mu)\frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$\alpha = 0{,}005;\ \mu = -0{,}495$$

Het (nog onopgelost) hoofdprobleem is hoe we aan een stel differentiaalvergelijking kunnen zien (behalve door computerexperimenten in elk specifiek geval) of een systeem volledig integreerbaar is, dan wel chaotisch, dan wel een mengsel van de twee (en in het laatste geval of het mengsel met een of andere decompositie correspondeert). Dit vereist natuurlijk een preciese definitie van de begrippen volledig integreerbaar en chaotisch. Een eindig-dimensionaal Hamiltoniaans systeem zoals boven is volledig integreerbaar als er n nette en onafhankelijke behoudswetten zijn, dat wil zeggen functies die constant zijn op elke baan. Voorbeelden zijn in mechanische systemen "behoud van energie" en "behoud van impuls". Een definitie van chaotisch is niet zo eenvoudig te geven. Zeker is dat integreerbaarheid in de zin van bovenstaande definitie te maken heeft met symmetrie. Dit is ook zo in het geval van oneindig-dimensionale volledig integreerbare systemen (hoewel dit begrip nog niet goed gedefinieerd is).

Er zit waarschijnlijk een of andere *groep* achter. Zoals in meerdere onderzoeksgebieden die op het CWI actueel zijn (eindige meetkunden, speciale functies en Lie-groepen), geeft regelmatig homogeen gedrag aanleiding tot het vermoeden dat er een transformatiegroep van symmetrieën in het spel is; of, als die er beslist niet is, een vervangende structuur met soortgelijke consequenties die dan gevonden en beschreven moet worden waarbij het "groepsgeval" als inspirerend voorbeeld mag dienen.

In het geval van integreerbare (Hamiltoniaanse) systemen zijn er veel aanwijzingen dat er (gegeneraliseerde) Lie-groepen in het spel zijn:

- ten eerste is er de stelling van Emmy Noether die behoudswetten verbindt aan het bestaan van symmetriën;
- ten tweede bestaan er constructies die aan elke eindig-dimensionale Lie-groep een integreerbaar systeem toevoegen, en bovendien blijkt de beschrijving van de representatie-theorie van de groep equivalent met het oplossen van het bijbehorende dynamische systeem;
- ten derde is van vele integreerbare systemen aangetoond dat ze ongewoon veel symmetrie hebben (in een nogal technische zin van het woord).

Er blijft echter nog zeer veel werk te doen zelfs alleen al met betrekking tot de tot dusver genoemde aspecten van integreerbare dynamische systemen. Zo is bijvoorbeeld nog onduidelijk of de constructies onder ten tweede en ten derde genoemd elkaars inversen zijn.

Ook de chaotische systemen, de extreme tegenhangers van de integreerbare, hebben hun eigen wetten, zekere universele eigenschappen waarvan tot voor zo'n vijf jaar geleden niets vermoed werd. Deze werden numeriek ontdekt en gedeeltelijk vervolgens bewezen. Een zaak waar nu numerieke evidentie van lijkt te bestaan is dat er wellicht voor conservatieve systemen zoiets als een "hoeveelheid van niet-chaotisch gedrag" bestaat, en dat deze grootheid behouden blijft (of tenminste alleen weinig verandert) bij kleine veranderingen van het systeem (veranderingen van de parameters). Dit wordt een heel nieuw soort "behoudswet" waarin we op het CWI met ideeën van "ontvouwingen" en "deformaties", en met computerexperimenten, gaan proberen meer inzicht te krijgen.

november 1983 Michiel Hazewinkel