

Multigrid-methoden

ARCHIEF



Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science



Multigrid-methoden

Stromingen van vloeistoffen en gassen (stromingen in olievelden en om vliegtuigvleugels) of stromen in halfgeleiders (chips) kunnen beschreven worden door partiële differentiaalvergelijkingen. Om de stroming op een gegeven plaats en tijd en bij gegeven randvoorwaarden uit te rekenen is het nodig om deze vergelijkingen numeriek op te lossen. De *multigrid-methode* is een van de meest recente technieken voor het vinden van dergelijke oplossingen.

Hoewel reeds vroeg in de numeriek wiskundige literatuur enkele opmerkingen te vinden zijn die gezien kunnen worden als een aanzet tot de multigrid-techniek, wordt pas sinds ca. 1976 aan deze techniek op ruimer schaal aandacht geschonken. Het is vooral de verdienste van A. Brandt dat de methode bekendheid verwierf. Op het ogenblik wordt de methode aan een groeiend aantal instituten bestudeerd en toegepast. Het CWI heeft hierin een leidende rol gespeeld, waarbij relaties met het bedrijfsleven voor nieuwe impulsen uit de praktijk hebben gezorgd (en zullen zorgen).

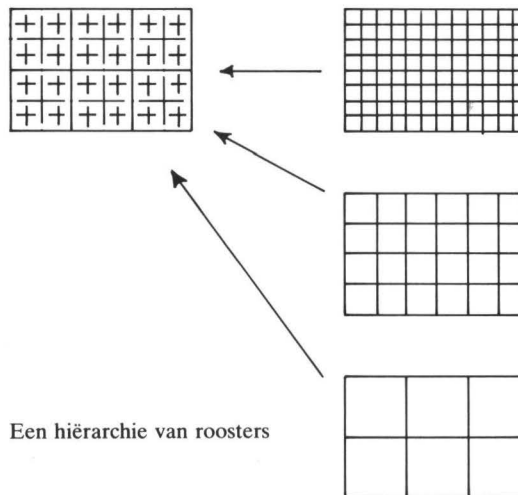
Zoals gezegd, de multigrid-methode is een methode om een probleem dat door een partiële differentiaalvergelijking, of een integraalvergelijking, beschreven wordt, numeriek op te lossen. De echte oplossing van zo'n probleem bestaat uit een continue functie, die op een digitale computer slechts door een eindig aantal getallen beschreven kan worden. Hierdoor ontstaat de klassieke twee-deling in de numerieke aanpak voor het oplossen van zo'n probleem. Eerst wordt het probleem "gediscretiseerd", d.w.z. de oorspronkelijke continue vergelijking wordt vervangen door een eindig stelsel vergelijkingen waarin de onbekenden de oorspronkelijk te berekenen functie representeren. Vervolgens, wanneer dit discrete stelsel geconstrueerd is, moet de oplossing ervan worden bepaald. Dit leidt tot speciale methoden voor het oplossen van grote stelsels (lineaire of niet-lineaire) vergelijkingen.

De discretisering gebeurt in het algemeen door over het definitiegebied van de vergelijking een rooster (grid) te leggen:



De numerieke oplossing wordt gerepresenteerd door zijn functiewaarden in roosterpunten. De gebruikelijke methoden waarmee deze waarden uit de discrete stelsels worden berekend, zijn iteratieve processen.

De multigrid-methode doorbreekt de klassieke twee-deling van “discretiseren” en “oplossen van het discrete stelsel” door in het iteratieve proces voor het oplossen, naast een of andere bekende iteratieve procedure, ook de discretisering op een grover rooster te gebruiken. Hierdoor wordt het iteratieve oplossingsproces aanzienlijk versneld. De discretisering op het grovere rooster wordt weer op dezelfde wijze – maar versneld – opgelost, waardoor – in een recursief proces – op een hiërarchie van fijne en grove roosters de oplossing van het oorspronkelijke probleem gevonden wordt.



In tegenstelling tot de andere numerieke processen voor het bepalen van de oplossing, kan voor de multigrid-methode – toegepast op een zgn. elliptische partiële differentiaalvergelijking – bewezen worden dat de hoeveelheid rekenwerk recht evenredig is met het aantal roosterpunten in het fijnste rooster. Hiermee is de multigrid-methode, voor discretisering met veel roosterpunten, de meest efficiënte techniek. Daar tegenover staat

dat de methode niet eenvoudig te implementeren is en dat vele varianten van de methode mogelijk zijn. Op een aantal aspecten hiervan zullen wij nu nader ingaan.

Een belangrijk deel van het onderzoek naar deze methode op het CWI betreft de bestudering van de samenhang tussen de gebruikte iteratiemethode en de "transfer-functies" die de communicatie verzorgen tussen de fijne en grove roosters. Hiermee hangt nauw samen de relatie tussen de discretisering op de verschillende roosters. Het doel is hier het vinden van combinaties die efficiënt werken voor grote klassen van problemen.

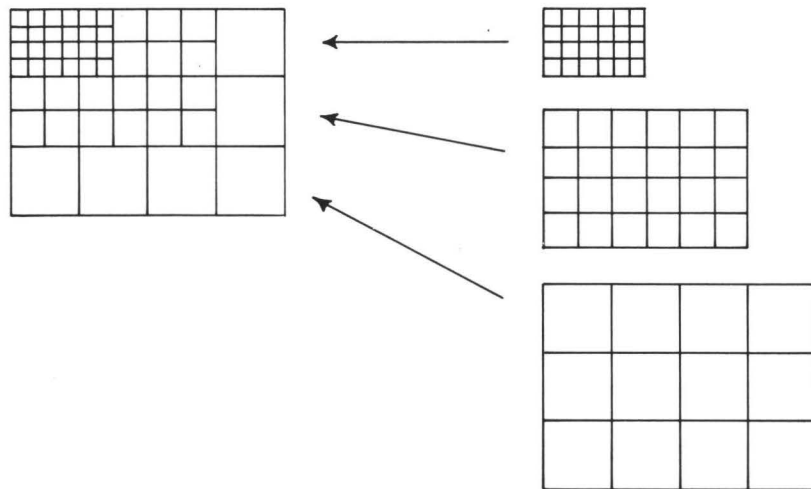
Bij de keuze van de algoritmen speelt niet alleen het op te lossen probleem, maar ook de computerarchitectuur een belangrijke rol. In de komende jaren zal daarom de implementatie van de multigrid-methode op supercomputers (vector processing) zeer belangrijk zijn. Dit heeft al geleid tot programma's waarmee stelsels vergelijkingen met vele tienduizenden onbekenden in een fractie van een seconde kunnen worden opgelost. In de toekomst zal dit onderzoek worden voortgezet met de bedoeling nog snellere programma's te ontwikkelen waarmee nog gecompliceerder en grootschaliger problemen opgelost kunnen worden.

Naast het vinden van efficiëntere technieken voor "gewone" elliptische partiële differentiaalvergelijkingen en integraalvergelijkingen wordt aandacht geschonken aan het numeriek oplossen van zgn. singuliere storingsproblemen. Hier gaat het om elliptische differentiaalvergelijkingen waarbij de hoogste afgeleiden met een klein getal $E > 0$ vermenigvuldigd worden. Aangezien het karakter van de vergelijking verandert door $E = 0$, treden bij het toepassen van de bekende technieken moeilijkheden op voor kleine E . Een voorbeeld van een singulier storingsprobleem is de Navier-Stokes-vergelijking met groot Reynolds-getal, $Re = 1/E$. Deze vergelijking beschrijft de stroming van een vloeistof (of gas) met een kleine viscositeit. In het kader van het multigrid-onderzoek worden mogelijkheden bestudeerd om singuliere storingsproblemen met behulp van verschillende discretisering op verschillende roosters zo nauwkeurig mogelijk op te lossen.

Dit onderzoek zal in de nabije toekomst worden uitgebreid. Daarbij zal dan aandacht worden geschonken aan hyperbolische vergelijkingen en de Euler-vergelijkingen. Deze vergelijkingen beschrijven gas- of vloeistofstromingen met een verwaarloosbare viscositeit en warmtegeleiding. Het efficiënt oplossen van deze vergelijkingen is onder andere van belang bij het ontwerpen van vliegtuigvleugels.

In de beschrijving van de multigrid-methode zoals die hierboven gegeven werd, zag men de discretisering op grove roosters als een middel om de iteratiemethode voor het oplossen van het fijn-rooster-probleem te versnellen. Ook een andere benaderingswijze is mogelijk. De fijne discretisering kan gezien worden als een correctie op de benadering zoals die

door het grove rooster bepaald wordt. Op deze wijze gezien is het niet noodzakelijk dat het fijne rooster zich over het gehele definitiegebied van de vergelijking uitstrekt. Het is voldoende het fijne rooster slechts dáár



toe te passen, waar de grof-rooster discretisering een niet voldoende nauwkeurige benadering van het continue probleem geeft. Hierdoor kan het aantal roosterpunten in de uiteindelijke discretisering beperkt worden. Deze zienswijze is de basis voor nog een ander onderwerp van lopend onderzoek: dat van de adaptieve rooster-verfijningen. Hierbij wordt er naar gestreefd een proces te ontwikkelen en te analyseren dat automatisch de discretisering aanpast aan de te berekenen oplossing.

november 1983

Piet Hemker