STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Besliskunde en Vervoersproblemen

door

Jac. M. Anthonisse

februari 1968

Inleiding

De inhoud van dit rapport komt nagenoeg overeen met de kern van een lezing voor de Staf Inspectie Vervoerswezen van de Koninklijke Landmacht, d.d. 29-2-1968.

Allereerst wordt een algemene beschouwing over besliskunde gegeven, als voorbeeld volgen toepassingen van het transportprobleem en het handelsreizigersprobleem. Hierna wordt een algemeen voorkomend probleem geformuleerd dat betrekking heeft op de door een vervoersbedrijf dagelijks uit te voeren werkzaamheden. Aangegeven wordt welke consequenties de oplossing van dit probleem kan hebben voor de bedrijfsorganisatie.

Besliskunde

In elk bedrijf worden dagelijks beslissingen genomen die de bedrijfsresultaten beïnvloeden. Vele beslissingen neemt men intuïtief of gewoontegetrouw, vaak ook is men zich het nemen van een beslissing niet bewust. Wordt een beslissing als 'moeilijk' ervaren dan realiseert men zich dat het beslissen overeenkomt met het kiezen van één uit een aantal alternatieven.
Een beslisser die zich in een 'moeilijke' beslissingssituatie bevindt gaat er al gauw toe over een aantal alternatieven onder elkaar op te schrijven. Daarna tracht hij de consequenties van elk alternatief te noteren. Hierbij doen zich verschillende moeilijkheden voor.
Allereerst zal de beslisser slechts een beperkt aantal alternatieven opschrijven. Van sommige alternatieven is het bestaan hem niet bekend, van andere alternatieven 'weet' hij zonder meer dat de consequenties te ongunstig zijn.
In de tweede plaats kan het erg lastig zijn de consequenties van een alternatief te doorzien. Soms kan men naar de consequenties slechts raden. Onder deze omstandigheden is het een hachelijke zaak een alternatief zonder meer buiten beschouwing te laten.
Tenslotte is het niet altijd duidelijk hoe de consequenties van verschillende alternatieven tegen elkaar moeten worden afgewogen.
In vele gevallen is het mogelijk elk alternatief voor te stellen door een rijtje getallen, en de consequenties van een alternatief samen te vatten in één waarderings-cijfer. Doorgaans is het niet zo dat elk rijtje getallen als alternatief kan worden geïnterpreteerd, de getallen moeten aan bepaalde voorwaarden voldoen.

Kan elk alternatief worden voorgesteld door een rijtje getallen en de consequenties door één getal dan is er kennelijk een voorschrift om aan een alternatief een waardering toe te kennen.

Dit voorschrift en de voorwaarden tesamen vormen een mathematisch model van de beslissingssituatie.

Het model is mathematisch omdat binnen het model slechts gesproken wordt over (rijtjes) getallen die aan bepaalde relaties moeten voldoen.
De beslissingssituatie is vertaald in een wiskundig optimum-probleem:

zoek een rijtje getallen dat aan zekere voorwaarden voldoet en waarvoor een volgens zeker voorschrift berekend getal maximaal (of minimaal) is.

Met deze omzetting van de beslissingssituatie in een wiskundig probleem is nog geen antwoord gegeven op de vraag welke de beste beslissing is. Wel is een 'overzicht' van alle alternatieven geconstrueerd, bovendien is door het noteren van de voorwaarden meer inzicht in de structuur van de beslissingssituatie verkregen.

De mathematische besliskunde stelt zich ten doel een gegeven wiskundig optimum probleem tot een oplossing te brengen. Hierbij worden geen specifieke problemen beschouwd, er word getracht alle problemen die eenzelfde structuur bezitten tegelijkertijd 'op te lossen'. Dit oplossen bestaat dan doorgaans uit het construeren van een rekenmethode. Van deze rekenmethode moet dan worden aangetoond dat zij altijd de correcte oplossing van het wiskundig optimum probleem levert.

Volledigheidshalve zij opgemerkt dat een rijtje getallen niet altijd voldoende is om de alternatieven van een beslissingssituatie te beschrijven. Maar ook problemen waarbij elk alternatief overeenkomt met een oneindige rij getallen of met een functie kunnen, mits aan een aantal eisen is voldaan, worden opgelost.

Soms kunnen verschillende algorithmen voor eenzelfde probleem worden geconstrueerd. In dit geval zal men onderzoeken onder welke omstandigheden de ene methode rekentechnisch efficienter is dan de andere.

Voor een aantal wiskundige optimumproblemen zijn efficiente rekenmethoden bekend. De structuur van deze problemen blijkt zeer algemeen te zijn. Vele beslissingssituaties kunnen (soms via enkele kunstgrepen) als een zg. lineair programmeringsprobleem worden geformuleerd.

In het bovenstaande is nog geen aandacht geschonken aan de moeilijkheden die zich bij de formulering van een wiskundig model van de beslissingssituatie voordoen. Enerzijds zal men naar een model streven dat tenminste alle relevant geachte aspecten van de situatie op juiste wijze bevat. Anderzijds moet het model hanteerbaar blijven.
Vanzelfsprekend tracht men een gegeven beslissingssituatie te vertalen in een wiskundig optimumprobleem waarvan de oplossing bekend is.

Transportprobleem.

In de depots I resp. II liggen 100 resp. 200 eenheden van een bepaald product opgeslagen. In de plaatsen A, B resp. C zijn 75, 125 resp. 100 eenheden van dat product nodig. De vervoerskosten per eenheid worden door de volgende tabel gegeven:

	A	B	C
I	10	14	30
II	12	20	17

Hoe moeten het transport worden georganiseerd om de totale vervoerskosten te minimaliseren?

De verschillende alternatieven kunnen worden beschreven met behulp van de variabelen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 en x_6, waarbij x_1 het aantal eenheden voorstelt dat van I naar A wordt getransporteerd etc.

	A	B	C
I	x_1	x_2	x_3
II	x_4	x_5	x_6

De consequentie van een alternatief is dat kosten worden gemaakt, de kosten bedragen:

$$k = 10x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 12x_4 + 20x_5 + 17x_6. \qquad (0)$$

Niet elk rijtje van 6 getallen stelt een alternatief voor, met $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ is $k = 0$, maar er wordt niets vervoerd.

Aan de vraag in A, B en C moet worden voldaan, dit kan worden geformuleerd als:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 75 \\ x_2 + x_5 &= 125 \\ x_3 + x_6 &= 100 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Verder kan elk depot niet meer leveren dan er aanwezig is, omdat de totale voorraad gelijk is aan de totale vraag kan dit worden geschreven als:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$
$$x_4 + x_5 + x_6 = 200. \qquad (2)$$

Tenslotte kunnen geen negatieve aantallen worden vervoerd, dus:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0. \qquad (3)$$

Nu is eenvoudig in te zien dat elk rijtje van zes getallen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ dat aan (1), (2) en (3) voldoet een alternatief beschrijft, en ook dat elk alternatief door een zodanig rijtje wordt beschreven. Kortom:

(1), (2) en (3) beschrijven alle alternatieven, de consequentie van elk alternatief wordt door (0) gegeven.

Het probleem hoe de transporten te organiseren is nu vertaald in een wiskundig optimum-probleem:

minimaliseer (0), onder voorwaarden (1), (2) en (3).

Dit probleem kan met een standaard-methode worden opgelost, het gegeven voorbeeld heeft als uitkomst:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = 0 & x_2 = 100 & x_3 = 0 \\ x_4 = 75 & x_5 = 25 & x_6 = 100 \end{array}\right\}$$

met k = 4500.

Handelsreizigersprobleem

In stad A woont een handelsreiziger die elk van de steden B, C, D en E moet bezoeken. Nadat hij deze vier plaatsen heeft bezocht keert hij naar A terug.
De reistijden tussen elk tweetal steden is bekend en de reiziger wil graag weten in welke volgorde hij de steden moet bezoeken om zo vlug mogelijk weer thuis te zijn.

Hier zal niet op de wiskundige formulering van dit probleem worden ingegaan. Het type 'handelsreizigerprobleem' is gemakkelijk in een eenvoudig vervoersprobleem te herkennen.

In A is een vervoerder gevestigd die vier transporten moet uitvoeren:

transport	van	naar
1	F	G
2	H	I
3	J	F
4	H	I

De rijtijd tussen elk tweetal plaatsen is bekend:

	A	F	G	H	I	J
A	0	28	57	72	81	85
F	28	0	28	45	54	57
G	57	28	0	20	30	28
H	72	45	20	0	10	20
I	81	54	30	10	0	22
J	85	57	28	20	22	0

Elk transport kan in één beladen rit worden uitgevoerd, en de vervoerder vraagt zich af in welke volgorde hij de opdrachten zal uitvoeren om de totale rijtijd te minimaliseren.

Deze vraag wordt als handelsreizigersprobleem geformuleerd door de uit te voeren transporten als fictieve steden te beschouwen:

B = transport 1
C = " 2
D = " 3
E = " 4

en de rijtijd tussen deze steden geschikt te kiezen

		naar				
		A	B	C	D	E
van	A	0	28	72	85	72
	B	57	28	20	28	20
	C	81	54	10	22	10
	D	28	0	45	57	45
	E	81	54	10	22	10

Deze rijtijden zijn als volgt verkregen:

rijtijd AB = rijtijd AF = rijtijd van A naar het beginpunt van B = 28,
rijtijd BA = rijtijd GA = rijtijd van het eindpunt van B naar A = 57,
rijtijd CD = rijtijd IJ = rijtijd van het eindpunt van C naar het beginpunt van D = 22,

de overige rijtijden analoog.

Daar afstand AB niet gelijk is aan afstand BA moet de handelsreiziger uit dit probleem kennelijk steden bezoeken die door één-richtings-verkeers-wegen met elkaar zijn verbonden.
De oplossing van dit handelsreizigersprobleem is:

A, B, C, E, D, A,

zodat de vervoerder de route

A, F, G, H, I, H, I, J, F, A

aflegt, met totale rijtijd 213.

Algemeen Vervoersprobleem

Een vervoersonderneming kan worden gekarakteriseerd door de plaatsen waar garages zijn gevestigd en de beschikbare aantallen en typen voertuigen per garage. Elke type voertuig is gekarakteriseerd door laadvermogen, snelheid en kosten per kilometer.

De vervoersonderneming moet dagelijks een aantal transporten verzorgen. De belangrijkste gegevens over elk transport zijn: hoeveelheid, beginpunt en eindpunt. Hieraan kunnen nog het tijdstip gereed voor verzending en het tijdstip waarop het transport voltooid moet zijn worden toegevoegd.

Op grond van bovenstaande gegevens betreffende het bedrijf en de uit te voeren werkzaamheden zal de vervoerder dagelijks de transporten zódanig willen uitvoeren dat de totaal kosten minimaal zijn. Deze beslissingssituatie kan als wiskundig optimum-probleem worden geformuleerd, en een optimale oplossing kan worden berekend.

Omdat het wiskundig model slechts de structuur van de beslissingssituatie beschrijft is het mogelijk een fictief vervoersprobleem op te lossen. Dit fictieve probleem kan uit het werkelijke probleem ontstaan door een aantal garages toe te voegen, garages te laten vervallen, of door de karakteristieken van de voertuigen te wijzigen. Op deze wijze verkrijgt men informatie over een mogelijk betere plaatsing van de garages, een mogelijk betere verdeling van de voertuigen over de garages en over de karakteristieken van een voertuig dat beter bij de uit te voeren transporten past.

samenstelling OR groep.

N.S.

netwerken maximale stroom, samenhang.

suboptimaliseren

ontstaan O.R. science at war

simulatie

computers