STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Rapport S 202

Inleiding in de Mathematische Programmering

door

Prof.dr. G. de Leve

uitgewerkt door

H.C. Tijms

Deel II: Discrete en kwadratische programmering

2e druk oktober 1967

Hoofdstuk III

Discrete en gemengde lineaire programmering.

We spreken van een discreet L.P.-probleem (Engels: all integer problem) wanneer al de variabelen van het L.P.-probleem alléén gehele waarden mogen aannemen. Als in het L.P.-probleem slechts sommige variabelen beperkt zijn tot gehele getallen en de overige elke waarde aannemen mogen dan spreken we van een gemengd L.P.-probleem (mixed integer-continuous problem). Het discrete L.P.-probleem is dus een speciaal geval van een gemengd L.P.-probleem. Het meest algemeen gemengde L.P.-probleem is te schrijven als:

$$\begin{aligned} &\max z = \vec{c}\vec{x} \\ &\text{onder } A\vec{x} = \vec{b},\ \vec{x} \geq \vec{0} \qquad (3.1.1) \\ &x_j \text{ geheel voor } j \in J_1. \end{aligned}$$

Als J_1 leeg is dan is (3.1.1) een L.P.-probleem, bevat J_1 alle j dan is (3.1.1) een discreet L.P.-probleem.

Een groot aantal problemen uit de praktijk is te formuleren als een gemengd L.P.-probleem. Men heeft voor deze problemen oplossingstechnieken gevonden waarvan aangetoond is dat ze in een eindig aantal stappen naar een optimale oplossing leiden. Doch voor een probleem van realistische omvang zijn deze technieken gebrekkig, het aantal stappen om een optimale oplossing te bereiken is in vele gevallen zo groot dat het zelfs m.b.v. een computer ondoenlijk is het probleem op te lossen. De verwachting bestaat echter dat binnen enkele jaren een oplossingstechniek gevonden wordt die sneller tot een oplossing leidt.

Men kan natuurlijk (3.1.1) als een L.P.-probleem oplossen door de voorwaarde dat sommige x_j geheel moeten zijn buiten beschouwing te laten en dan in de eindoplossing de gevonden waarden van de betreffende x_j af te ronden tot het dichtstbijzijnde gehele getal dat aan $A\vec{x} = \vec{b}$ voldoet. Dit wordt ook vaak gedaan in de praktijk doch dit leidt alleen tot de juiste oplossing wanneer de variabelen voldoend grote waarden

aannemen zodat afronding geen invloed heeft. Maar in vele gemengde L.P.-problemen zijn de discrete variabelen (dat zijn de variabelen die gehele waarden aannemen moeten) kleine getallen, vaak 0 of 1.
We zullen nu een aantal beslissingsproblemen beschouwen die allen als een gemengd L.P.-probleem te formuleren zijn.
In ons eerste probleem beschouwen we een produktieproces waarin men op n manieren een produkt maken kan. De hoeveelheid volgens de j^{de} methode bedraagt x_j. De variabelen x_j moeten voldoen aan $\vec{Ax} = \vec{b}$, vanwege de beschikbare grondstoffen, de aanwezige capaciteiten enz.
Verder geldt uiteraard $\vec{x} \geq \vec{0}$.

$$\text{De kosten bedragen } z = \sum_{j=1}^{n} \left[A_j \delta_j + c_j x_j\right] \qquad (3.1.2)$$

$$\text{waarbij } \delta_j = \begin{cases} 1 \text{ als } x_j > 0 \\ 0 \text{ als } x_j = 0 \end{cases} \qquad (3.1.3)$$

De vorm van de kostenfunctie is een gevolg van het feit dat men vaste kosten A_j heeft als men een deel van het produkt volgens methode j maakt, ongeacht de hoeveelheid. Door de gedaante van de kostenfunctie is dit geen L.P.-probleem maar we zullen het probleem in de vorm van een gemengd L.P.-probleem brengen.
Het is realistisch om aan te nemen dat er voor elke x_j een bovengrens d_j bestaat. We nemen dus aan dat er constanten d_j bestaan zodat $x_j \leq d_j$, alle j. Om er voor te zorgen dat in het te formuleren gemengde L.P.-probleem δ_j alleen de waarde 0 of 1 aanneemt voeren we de bijvoorwaarden in:

$$0 \leq \delta_j \leq 1, \ \delta_j \text{ geheel } 1 \leq j \leq n.$$

Maar δ_j moet de waarde 0 of 1 aannemen in overeenstemming met (3.1.3). Daartoe voeren we de bijvoorwaarden in:

$$x_j \leq d_j \delta_j \quad \text{of} \quad x_j - d_j \delta_j \leq 0 \qquad 1 \leq j \leq n. \qquad (3.1.4)$$

Ons probleem is nu gelijkwaardig met het gemengde L.P.-probleem:

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} (A_j \delta_j + c_j x_j)$$

$$\text{onder } \vec{Ax} = \vec{b},\ \vec{x} \geq \vec{0} \qquad (3.1.5)$$

$$x_j - d_j \delta_j \leq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$0 \leq \delta_j \leq 1,\ \delta_j \text{ geheel} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Merk op dat er 2n bijvoorwaarden bijgekomen zijn.
Men ziet eenvoudig in dat de problemen gelijkwaardig zijn. Immers uit (3.1.4) volgt dat $x_j = 0$ als $\delta_j = 0$. Als $\delta_j = 1$ dan geldt $x_j \leq \delta_j$ of te wel x_j is aan geen beperking onderheving. (δ_j is een natuurlijke bovengrens).
We moeten aantonen dat $\delta_j = 1$ als $x_j > 0$. Dit volgt direct uit (3.1.4).
Verder moet gelden $\delta_j = 0$ als $x_j = 0$. Hoewel dit niet uit (3.1.4) volgt, ziet men direct in dat een optimale oplossing niet tegelijk geldt $\delta_j = 0$ en $x_j = 0$. Als $x_j = 0$ is de waarde van de kostenfunctie minimaal als tevens $\delta_j = 0$.

Dikwijls ontmoet men beslissingsproblemen die zeer veel lijken op L.P.-problemen maar het niet zijn omdat de beslisser een keuze moet maken tussen twee of meer voorwaarden.
Stel dat men een veevoeder wil maken waarin al of niet cocoskoeken verwerkt zijn. Wanneer men besluit cocoskoeken in het veevoeder te doen dan moet men minimaal b kg cocoskoeken in het veevoeder verwerken. Dus er geldt, als x_1 het aantal kg cocoskoeken in het veevoeder is:

$$x_1 = 0 \quad \text{of} \quad x_1 \geq b.$$

Het alternatief dat de grootste winst of laagste kosten garandeert kiest men.
Men kan natuurlijk het bewuste L.P.-probleem tweemaal oplossen en wel eenmaal met $x_1 = 0$ als bijvoorwaarde en eenmaal met $x_1 \geq b$ als bijvoorwaarde en uit de twee verkregen optimale oplossingen de gunstigste kiezen. Wanneer men echter k alternatieven uit n alternatieven kiezen moet

geeft de bovenstaande procedure bijzonder veel rekenwerk. Dit soort problemen kunnen we echter vaak tot een gemengd L.P.-probleem herleiden. Beschouw een L.P.-probleem waar de oplossing $\vec{x}$ moet voldoen aan één van de twee bijvoorwaarden $\vec{a}^{u}\vec{x} - b_u \leq 0$ of $\vec{a}^{v}\vec{x} - b_v \leq 0$, maar niet aan beide behoeft te voldoen. We willen de bijvoorwaarde kiezen die de gunstigste oplossing oplevert. We zullen aannemen dat er twee getallen L_u en L_v bepaald kunnen worden zodat voor elke toegelaten $\vec{x}$ geldt:

$$\begin{aligned} \vec{a}^{u}\vec{x} - b_u &\leq L_u \\ \vec{a}^{v}\vec{x} - b_v &\leq L_v. \end{aligned} \qquad (3.1.4)$$

In praktijkproblemen is hier bijna altijd aan voldaan. Laat de variabele δ alleen de waarde 0 of 1 kunnen aannemen. De bijvoorwaarden $\vec{a}^{u}\vec{x} - b_u \leq 0$ of $\vec{a}^{v}\vec{x} - b_v \leq 0$ kunnen nu vervangen worden door:

$$\vec{a}^{u}\vec{x} - b_u \leq \delta L_u,\ \vec{a}^{v}\vec{x} - b_v \leq (1 - \delta)L_v,\ 0 \leq \delta \leq 1,\ \delta \text{ geheel}.$$

Als $\delta = 0$ dan is de bijvoorwaarde $\vec{a}^{u}\vec{x} - b_u \leq 0$ vervuld en geldt er $\vec{a}^{v}\vec{x} - b_v \leq L_v$, hetgeen betekent dat $\vec{a}^{v}\vec{x} - b_v \leq 0$ niet vervuld behoeft te zijn. Als $\delta = 1$ is het omgekeerde waar. Dus in plaats van twee L.P.-problemen op te lossen kan men volstaan met het oplossen van één gemengd L.P.-probleem.

We kunnen dit generaliseren. Stel dat er q bijvoorwaarden $\vec{a}^{i}\vec{x} - b_i \leq 0$, $(i = 1,\ldots q)$, zijn en dat het vereist is dat er minstens k van deze bijvoorwaarden vervuld moeten zijn, waarbij elk k-tal toegelaten is. We kunnen $\binom{q}{k} = \frac{q!}{k!(q-k)!}$ L.P.-problemen oplossen en de meest gunstige oplossing eruit kiezen, maar we kunnen ons ook beperken tot het oplossen van één gemengd L.P.-probleem.

We stellen wederom dat bij elke i een bovengrens L_i bepaald kan worden voor $\vec{a}^{i}\vec{x} - b_i$. We voeren q discrete variabelen δ_i in, die alleen de waarde 0 of 1 aannemen kunnen. De voorwaarde dat minstens k van de bijvoorwaarden $\vec{a}^{i}\vec{x} - b_i \leq 0$ gelden moeten kan vervangen worden door:

$$\vec{a}^{i}\vec{x} - b_i \leq \delta_i L_i \quad (i = 1, \ldots, q)$$

$$\sum_{i=1}^{q} \delta_i = q = k \qquad (3.1.6)$$

$$0 \leq \delta_i \leq 1, \ \delta_i \text{ geheel} \quad (i = 1, \ldots, q).$$

We stellen $\sum_{i=1}^{q} \delta_i = q = k$ omdat k van de δ_i nul moeten zijn en dan zijn minstens k van de ongelijkheden $\vec{a}^{i}\vec{x} - b_i \leq 0$ vervuld.

Voorbeeld: $\max z = c_1x_1 + c_2x_2$

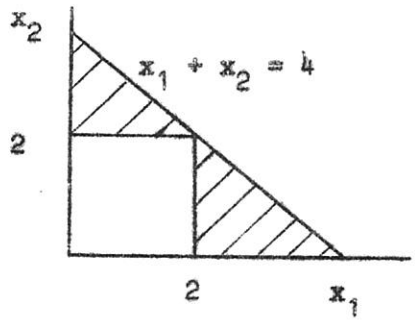
onder

$$x_1 + x_2 \leq 4, \ x_2 \geq 2, \ x_1 \geq 0 \qquad (3.1.7)$$

of

$$x_1 + x_2 \leq 4, \ x_1 \geq 2, \ x_2 \geq 0. \qquad (3.1.8)$$

Het niet-convexe gebied van toegelaten oplossingen is $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 \geq 2$ of $x_2 \geq 2$, $\vec{x} \geq \vec{0}$. Dit gebied is de vereniging van twee convexe verzamelingen.



Om de kriteriumfunctie over het niet-convexe gebied te maximaliseren kan men twee L.P.-problemen oplossen. De eerste maximaliseert z onder (3.1.7), de tweede maximaliseert Z onder (3.1.8). Een optimale oplossing van Z over het niet-convexe gebied wordt nu gegeven door de oplossing die de grootste waarde van Z oplevert.

Men kan ook het volgende gemengde L.P.-probleem oplossen:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

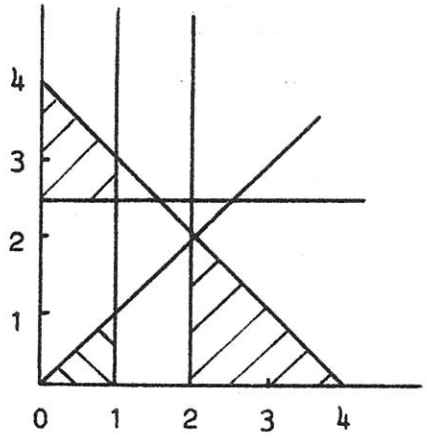
onder

$$\begin{aligned} 2 - x_1 &\leq 2\delta \\ 2 - x_2 &\leq 2(1 - \delta) \qquad (3.1.9) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ 0 \leq \delta &\leq 1,\ \delta \text{ geheel.} \end{aligned}$$

Dat (3.1.9) deze vorm moet hebben is eenvoudig in te zien. $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$ zijn te schrijven als $2 - x_1 \leq 0$ resp. $2 - x_2 \leq 0$. Daar $x_1, x_2 \geq 0$ volgt direct dat 2 zowel een bovengrens voor $2 - x_1$ als $2 - x_2$ is.
We zullen nu een voorbeeld geven waar tenminste k van q ongelijkheden vervuld moeten zijn.
De ongelijkheden zijn:

$$x_1 + x_2 \leq 4;\ x_2 \geq 2{,}5;\ x_1 \leq 1;\ x_1 \geq 2;\ x_1 - x_2 \geq 0. \qquad (3.1.10)$$

Er moet altijd gelden $x_1 + x_2 \leq 4$, $\vec{x} \geq \vec{0}$ en verder moeten er minstens twee van de overige ongelijkheden uit (3.1.10) gelijktijdig vervuld zijn.
Dit geeft aanleiding tot het volgende niet-convexe gebied waarover we de kriteriumfunctie maximaliseren.



We kunnen dit probleem formuleren als een gemengd L.P.-probleem. Voor $2,5 - x_1$; $x_1 - 1$, $2 - x_1$; $x_2 - x_1$ zijn de bovengrenzen resp. $2,5$; 3; 2; 4, zoals men eenvoudig nagaat. De optimale oplossing voor ons probleem is nu een optimale oplossing van:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

onder

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2,5 - x_1 \leq 2,5\delta_1$$

$$x_1 - 1 \leq 3\delta_2$$

$$2 - x_1 \leq 2\delta_3$$

$$x_2 - x_1 \leq 4\delta_4$$

$$\sum_{i=1}^{4} \delta_i = 2$$

$$0 \leq \delta_i \leq 1,\ \delta_i \text{ geheel.}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Het komt ook wel eens voor dat de beslissingsvektor $\vec{x}$ voldoen moet aan tenminste één van de volgende "blokken" ongelijkheden:

$$A_u\vec{x} \leq \vec{b}_u \quad (u = 1,\ldots, r) \qquad (3.1.11)$$

Hier is dus A_u een matrix en $\vec{x}$ moet dus liggen in tenminste één van de convexe verzamelingen $A_u\vec{x} \leq \vec{b}_u$ $(u = 1,\ldots,r)$. Om nu de kriteriumfunctie te optimaliseren onder de voorwaarde dat $\vec{x}$ tevens moet liggen in minstens één van de convexe verzamelingen (3.1.11) kan men telkens de kriteriumfunctie optimaliseren onder de bijvoorwaarden die steeds moeten gelden aangevuld met één van de voorwaarden uit (3.1.11). Kiest men dan van de verkregen oplossingen de meest gunstige dan heeft men een optimale oplossing voor het gegeven probleem. In plaats van deze werkwijze te volgen kan men zich beperken tot het oplossen van één gemengd L.P.-probleem.

Daartoe nemen we aan dat er twee eindige vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ zijn zodat voor elke $\vec{x}$ die in de gebieden van (3.1.11) ligt, geldt: $\vec{a}_1 \leq \vec{x} \leq \vec{a}_2$.
Verder nemen we aan dat er vektoren $\vec{L}_u$ aan te geven zijn zodat voor elke $\vec{x}$ met $\vec{a}_1 \leq \vec{x} \leq \vec{a}_2$ geldt

$$A_u\vec{x} - \vec{b}_u \leq \vec{L}_u \quad (u = 1,\ldots, r).$$

Als dit het geval is kunnen we het volgende gemengde L.P.-probleem formuleren:

$$\max z = \vec{c}\vec{x}$$

onder

$$D\vec{x} = \vec{d},\ \vec{x} \geq \vec{0}$$

$$A_u\vec{x} - \vec{b}_u \leq (1 - \delta_u)\vec{L}_u \quad (u = 1,\ldots, r) \qquad (3.1.12)$$

$$\sum_{u=1}^{r} \delta_u = 1$$

$$0 \leq \delta_u \leq 1,\ \delta_u \text{ geheel} \quad (u = 1,\ldots, r)$$

waarbij $D\vec{x} = \vec{d}$ een stelsel bijvoorwaarden is dat altijd vervuld moet zijn.
Een optimale oplossing van (3.1.12) is een optimale oplossing voor het gegeven probleem.

Voorbeeld:

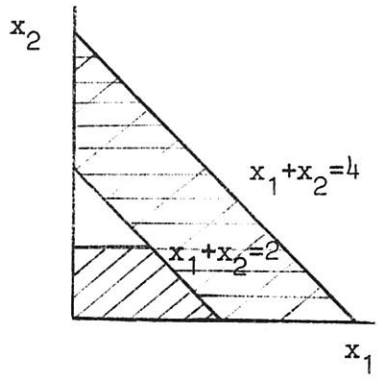
$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2$$

onder

$$x_1 + x_2 \leq 4,\ x_1 + x_2 \geq 2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

of

$$x_1 + x_2 \leq 2,\ x_2 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$



Om dit probleem als gemengd L.P.-probleem te formuleren merken we op dat er geldt:

$$\vec{a}_1 = (0,0) \leqq \vec{x} \leqq (4,4) = \vec{a}_2$$

$$A_1\vec{x} - \vec{b}_1 \leqq \vec{0}: \begin{cases} x_1 + x_2 - 4 \leqq 0 \\ -x_1 - x_2 + 2 \leqq 0 \end{cases} \qquad A_2\vec{x} - \vec{b}_2 \leqq \vec{0}: \begin{cases} x_2 - 1 \leqq 0 \\ x_1 + x_2 - 2 \leqq 0 \end{cases}$$

verder is $\vec{4} \geqq \vec{x} \geqq \vec{0}$ $\qquad$ $\vec{4} \geqq \vec{x} \geqq \vec{0}$.

We kunnen dus b.v. stellen:

$$\vec{L}_1 = (4,2) \qquad \vec{L}_2 = (3,6)$$

Het gemengde L.P.-probleem luidt nu:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2$$

onder

$$x_1 + x_2 - 4 \leqq 4\delta_1$$

$$-x_1 - x_2 + 2 \leqq 2\delta_1$$

$$x_2 - 1 \leqq 3\delta_2$$

$$x_1 + x_2 - 2 \leqq 6\delta_2$$

$$\sum_{i=1}^{2} \delta_i = 1$$

$$0 \leqq \delta_i \leqq 1,\ \delta_i \text{ geheel} \quad (i = 1, 2)$$

$$\vec{x} \geqq \vec{0}.$$

In de praktijk komt het vaak voor dat een projekt uitgevoerd moet worden waarvoor een groot aantal karweien nodig zijn, die op hun beurt verschillende soorten arbeid, materiaal e.d. vereisen. Men denke b.v. aan het bouwen van een kantoor of een schip.
Dit soort projekten heeft de eigenschap dat er een zekere volgorde is waarin de verschillende karweien moeten worden uitgevoerd. Dit laatste maakt het vaak onmogelijk om het probleem als een L.P.-probleem te formuleren. Meestal kunnen dit soort problemen wel als een gemengd L.P.-probleem worden geformuleerd.
We zullen een mathematisch model proberen op te zetten dat vertelt hoe we het projekt uitvoeren moeten zodat de totale kosten geminimaliseerd worden. M.b.v. het model zullen we bepalen hoe lang het projekt duurt, hoeveel van elk soort arbeid, materiaal e.d. iedere dag nodig is.
We zullen het probleem deterministisch behandelen. Een dag zal de kleinste tijdsperiode zijn die we beschouwen en op basis hiervan zullen we ons schema opstellen. De verschillende soorten arbeid, materiaal e.d. geven we kortweg aan met produktiefactoren, waarvan we aannemen dat er in totaal K zijn. We nemen aan dat hetgeen elke dag van deze factoren beschikbaar is beperkt is. Verder nemen we aan dat het werk van elke dag of tijdens de normale werktijden of tijdens overwerk gedaan kan worden. Het kan immers b.v. in verband met het zo snel mogelijk opleveren van het projekt voordelen bieden om overwerk te verrichten. Het behoeft geen betoog dat in het algemeen voor overwerk andere normen zullen gelden dan voor werk op de normale werktijd. We nemen aan dat gespecificieerd is hoeveel van elke produktiefactor voor beide werktijdcategorieën beschikbaar is. Laat a_{kj} en b_{kj} de hoeveelheid van factor k beschikbaar op de j^{de} dag voor de normale werktijd resp. overwerktijd.
Stel dat men bepaald heeft dat het projekt maximaal N dagen en minimaal n dagen duurt, hoe men het projekt ook uitvoert. Laat het projekt bestaan uit I verschillende karweien. We veronderstellen dat de volgorde waarin de karweien uitgevoerd moeten worden bekend is. Voor men met karwei i kan beginnen zal een zekere deelverzameling I(i) van karweien voltooid moeten zijn. In het algemeen zal een aantal karweien gelijktijdig uitgevoerd kunnen worden. Laat α_{ik} en β_{ik} de hoeveelheden van factor k zijn

om karwei i tijdens de normale werktijd resp. overwerktijd uit te voeren.
De belangrijkste variabelen die in ons nog te formuleren gemengd L.P.-probeem optreden zijn x_{ij} en y_{ij}, de fractie van karwei i gedaan op de j^{de} dag tijdens de normale werktijd en de overwerktijd, respectievelijk.
We zullen aannemen dat de hoeveelheid van factor k gebruikt voor het i^{de} karwei op de j^{de} dag tijdens de normale werktijd $\alpha_{ik}x_{ij}$ is, de hoeveelheid tijdens overwerktijd gebruikt is $\alpha_{ik}y_{ij}$. Het feit dat we van elke produktiefactor niet meer kunnen gebruiken dan beschikbaar is geeft aanleiding tot de volgende ongelijkheden:

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_{ik}x_{ij} \leq a_{kj}, \quad (k = 1,\ldots, K;\ j = 1,\ldots, N) \qquad (3.1.13)$$

$$\sum_{i=1}^{I} \beta_{ik}y_{ij} \leq b_{kj}, \quad (k = 1,\ldots, K;\ j = 1,\ldots, N). \qquad (3.1.14)$$

Verder moeten alle karweien volbracht worden, dit geeft

$$\sum_{j=1}^{N} (x_{ij} + y_{ij}) = 1 \quad (i = 1,\ldots, I) \qquad (3.1.15)$$

We kunnen niet met karwei i op de j^{de} dag beginnen tenzij alle karweien uit I(i) op de voorgaande dagen uitgevoerd zijn. Dit geeft voor $x_{ij} \neq 0$ de volgende noodzakelijke voorwaarden:

$$\sum_{u=1}^{j-1} (x_{su} + y_{su}) = 1, \quad s \in I(i) \qquad (3.1.16)$$

en voor $y_{ij} \neq 0$ de noodzakelijke voorwaarden:

$$\sum_{u=1}^{j} x_{su} + \sum_{u=1}^{j-1} y_{su} = 1, \quad s \in I(i). \qquad (3.1.17)$$

(3.1.16) en (3.1.17) geven aanleiding tot een situatie van het type als op blz. 159 beschreven.
Voer de discrete variabelen δ_{sj} in, die alléén de waarden 0 of 1 aannemen kunnen.
De noodzakelijke voorwaarden (3.1.16) voor $x_{ij} \neq 0$ vervangen we door:

$$x_{ij} \leq \delta_{sj}, \quad s \in I(i) \quad , \text{ alle } i,j. \qquad (3.1.18)$$

$$\sum_{u=1}^{j-1} (x_{su} + y_{su}) \geq \delta_{sj}, \text{ alle } s,j. \qquad (3.1.19)$$

$$\delta_{sj} \geq 0, \ \delta_{sj} \text{ geheel} \quad , \text{ alle } s,j. \qquad (3.1.20)$$

We hoeven in (3.1.20) niet te eisen $\delta_{sj} \leq 1$, daar dit een direct gevolg is van (3.1.15) en (3.1.19). We zullen nu laten zien dat uit (3.1.18) t/m (3.1.20) volgt dat x_{ij} alléén dan positief kan zijn als (3.1.16) geldt voor elke $s \in I(i)$.

Als een $\delta_{sj} = 1$ dan volgt uit (3.1.19) dat (3.1.16) geldt. Verder zegt de bij δ_{sj} behorende ongelijkheid uit (3.1.18) dat $x_{ij} \leq 1$, hetgeen ons niets over x_{ij} zegt ($x_{ij} \leq 1$ geldt altijd daar x_{ij} de fractie is van karwei i op de j^{de} dag gedaan).

Als echter een $\delta_{sj} = 0$ dan volgt uit (3.1.18) dat $x_{ij} \leq 0$, dus $x_{ij} = 0$ daar altijd $x_{ij} \geq 0$. We kunnen nu concluderen dat x_{ij} alléén dan positief kan zijn als (3.1.16) geldt voor elke $s \in I(i)$. Immers stel $x_{ij} > 0$ en $\sum_{u=1}^{j-1} (x_{su} + y_{su}) < 1$ voor een zekere s dan volgt uit (3.1.19) dat $\delta_{sj} = 0$, waarna (3.1.18) ons zegt $x_{ij} = 0$, in tegenspraak met $x_{ij} > 0$.

Evenzo kunnen we de discrete variabelen ψ_{sj} invoeren en de voor $y_{ij} \neq 0$ noodzakelijke voorwaarden (3.1.17) vervangen door:

$$y_{ij} \leq \psi_{s,j}, \quad s \in I(i) \quad , \text{ alle } i,j. \qquad (3.1.21)$$

$$\sum_{u=1}^{j} x_{su} + \sum_{u=1}^{j-1} y_{su} \geq \psi_{s,j}, \text{ alle } s,j \qquad (3.1.22)$$

$$\psi_{s,j} \geq 0, \ \psi_{s,j} \text{ geheel} \quad , \text{ alle } s,j. \qquad (3.1.23)$$

We moeten nu alleen nog de structuur van de kostenfunctie nagaan. Laten c_{kj} en d_{kj} de kosten voorstellen van een eenheid van factor k gebruikt op de j^{de} dag gedurende de normale werktijd en overwerktijd, respektievelijk. We veronderstellen dat de kosten voortvloeiend uit het gebruik van een factor op een gegeven dag evenredig is met de hoeveelheid die van de fac-

tor gebruikt is.
De kosten van factor k op de j^{de} dag bedragen dus:

$$c_{kj} \sum_{i=1}^{I} \alpha_{ik} x_{ij} + d_{kj} \sum_{i=1}^{I} \beta_{ik} y_{ij} \qquad (3.1.24)$$

Soms komt het voor dat men in de kostenfunctie de kosten in rekening wenst te brengen die het gevolg zijn van een verandering van de gebruikte hoeveelheid van een factor op een dag vergeleken met de vorige dag.
We stellen dat, wanneer men op de j^{de} dag een éénheid meer van factor k gebruikt dan op de $j = 1^{e}$ dag, de kosten e_{kj} en g_{kj} bedragen voor de normale werktijd resp. de overwerktijd. Gebruikt men een éenheid van factor k minder dan zijn de kosten f_{kj} en h_{kj}.
We merken eerst op dat de verandering in de hoeveelheid gebruikt op de j^{de} dag vergeleken met de $j = 1^{e}$ dag bedraagt, wat de normale werktijd betreft:

$$t_{kj} = \sum_{i=1}^{I} \alpha_{ik}(x_{ij} - x_{i,j-1}) \qquad (3.1.25)$$

Een zelfde uitdrukking is voor de overwerktijd van kracht.
We voeren nu de variabelen v'_{kj} en v''_{kj} in, met

$$v'_{kj} - v''_{kj} = t_{kj} = \sum_{i=1}^{I} \alpha_{ik}(x_{ij} - x_{i,j-1})$$

en (3.1.26)

$$v'_{kj}, v''_{kj} \geq 0, \quad (k = 1, \ldots, K;\ j = 2, \ldots, N).$$

Verder voeren we w'_{kj} en w''_{kj} in.

$$w'_{kj} - w''_{kj} = \sum_{i=1}^{I} \beta_{ik}(y_{ij} - y_{i,j-1})$$

en (3.1.27)

$$w'_{kj}, w''_{kj} \geq 0 \quad (k = 1, \ldots, K;\ j = 2, \ldots, N)$$

Wanneer de hoeveelheid van factor k gebruikt op de j^{de} dag verschillend is van de op de $j = 1^{e}$ dag gebruikte hoeveelheid dan kunnen we de hieruit voortvloeiende kosten weergeven door:

$$e_{kj}v'_{kj} + f_{kj}v''_{kj} + g_{kj}w'_{kj} + k_{kj}w''_{kj}. \qquad (3.1.28)$$

We zullen deze uitdrukking toelichten.

We beschouwen daartoe eerst de normale werktijd. We zullen nu laten zien dat uit (3.1.28) volgt dat voor de normale werktijd de veranderingskosten $e_{kj}t_{kj}$ óf $-f_{kj}t_{kj}$ bedragen al naar gelang t_{kj} positief of negatief is. Omdat we (3.1.28) minimaliseren zal (3.1.28) minimaal zijn voor $v'_{kj} = t_{kj}$, $v''_{kj} = 0$ óf $v'_{kj} = 0$, $v''_{kj} = -t_{kj}$, al naar gelang $t_{kj} > 0$ resp. $t_{kj} < 0$ is. (Stel $t_{kj} > 0$, er geldt $v'_{kj} - v''_{kj} = t_{kj}$, laat nu $v'_{kj} = t_{kj} + \alpha$, $v''_{kj} = \alpha$, $\alpha \geq 0$ zijn, dan is (3.1.28) minimaal als $\alpha = 0$). Dus uit (3.1.28) volgt dat de veranderingskosten óf $e_{kj}t_{kj}$ óf $-f_{kj}t_{kj}$ bedragen. Analoog beschouwt men de overwerktijd.

We zullen tenslotte nog een bepaald soort kosten beschouwen, die zich vaak voordoen. Men kan zich indenken dat b.v. bij het bouwen van een schip de opdrachtgever het schip het liefst zo snel mogelijk afgeleverd ziet. Elke dag dat het schip eerder klaar is betekent exploitatiewinst voor hem. We zullen voor elke dag dat het projekt nog in uitvoering is een vast bedrag D aan kosten in rekening brengen. We hebben aangenomen dat het projekt minimaal n dagen en maximaal N dagen vergt. De kosten nD kunnen dus niet vermeden worden en deze zullen we niet in onze kostenfunctie vermelden. Voor elke dag $j > n$ waarop het projekt nog niet klaar is moeten we de kosten D rekenen.

Het projekt is op de j^{de} dag nog niet klaar als

$$\sum_{u=j}^{N} \sum_{i=1}^{I} (x_{iu} + y_{iu}) > 0 \qquad (3.1.29)$$

Als dus voor $j > n$ (3.1.29) van toepassing is brengen we dus de vaste kosten D in rekening. We zullen dit nu in onze formulering van het gemengde L.P.-probleem inpassen. Daartoe voeren we de discrete variabelen ρ_j in die alléén de waarden 0 of 1 aannemen kunnen. We stellen

$$\sum_{u=j}^{N} \sum_{i=1}^{I} (x_{iu} + y_{iu}) \leq I\rho_j \quad (j = n+1, \ldots, N) \qquad (3.1.30)$$

$$0 \leq \rho_j \leq 1, \ \rho_j \text{ geheel} \quad (j = n+1, \ldots, N) \qquad (3.1.31)$$

De vaste kosten gemaakt op dag j geven we weer door:

$$D\rho_j \quad (j = n+1, \ldots, N) \qquad (3.1.32)$$

We zullen nu laten zien dat uit (3.1.30) t/m (3.1.32) volgt dat de vaste kosten D alléén dan in rekening gebracht worden als (3.1.29) geldt.
Als (3.1.29) geldt, dan volgt uit (3.1.30) en (3.1.31) dat $\rho_j = 1$ (merk op I is een natuurlijke bovengrens (3.1.29)), dus de kosten D worden berekend.
Als (3.1.29) niet geldt, d.w.z. $\sum_{u=j}^{N} \sum_{i=1}^{I} (x_{iu} + y_{iu}) = 0$ of te wel het project is klaar op de j^{de} dag, dan volgt weliswaar niet uit (3.1.30) en (3.1.31) dat $\rho_j = 0$, maar $\rho_j = 0$ volgt uit het feit dat de waarde van de kostenfunctie verminderd wordt als $\rho_j = 0$. Dus de vaste kosten voor de j^{de} dag worden dus correct weergegeven m.b.v. (3.1.30) t/m (3.1.32).
Wanneer we nu (3.1.24), (3.1.28) en (3.1.32) combineren dan zien we dat de kostenfunctie gegeven wordt door:

$$z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{I} (c_{kj}\alpha_{ik}x_{ij} + d_{kj}\beta_{ik}y_{ij}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=2}^{N} (e_{kj}v'_{kj} + f_{kj}v''_{kj} + g_{kj}w'_{kj} + h_{kj}w''_{kj}) + D \sum_{j=n+1}^{N} \rho_j .$$

We minimaliseren z onder (3.1.13) t/m (3.1.15), (3.1.18) t/m (3.1.23), (3.1.26), (3.1.27), (3.1.30) en (3.1.31), waarbij natuurlijk $x_{ij}, y_{ij} \geq 0$.
We hebben dus een gemengd L.P.-probleem. Het is duidelijk uit het voorgaande voor een probleem van enige omvang, het aantal bijvoorwaarden enorm groot zal zijn, en een oplossing kan men op dit moment nog niet bepalen.
Niettemin is het interessant om te laten zien hoe men het gegeven probleem kan formuleren als een gemengd L.P.-probleem.
Het aantal bijvoorwaarden, zoals (3.1.16, 17), kan vaak aanzienlijk gereduceerd worden. Als karwei i" gedaan moet worden voor karwei i' en dit karwei moet karwei i voorgaan dan kan men de bijvoorwaarde weglaten die eist dat i" voor i uitgevoerd moet worden.
Maar ook deze vereenvoudiging maakt een praktijkprobleem nog niet hanteerbaar voor berekeningen.

Het volgende probleem dat we beschouwen is een beleggingsprobleem. Men kan sommige eenvoudige problemen die verband houden met de wijze waarop een firma een zeker kapitaal in verschillende projekten steken kan, formuleren als gemengde L.P.-problemen.

We zullen eerst het eenvoudigste geval beschouwen. Laat een firma een bedrag D als investeringskapitaal ter beschikking staan.

Er zijn n verschillende projekten waarin geld gestoken kan worden. Stel dat projekt j een investering van d_j gulden eist en dat p_j de huidige waarde aangeeft van de toekomstige winst afkomstig van projekt j. Wanneer men met een projekt begint dan moet men het afmaken. Als men projekt j onderneemt dan is men verplicht d_j gulden te investeren. Verder geldt dat men in elk projekt slechts éénmaal geld kan steken, het is dus niet toegestaan twee of meer keer een zelfde projekt te ondernemen.

Nu wil men bepalen welke projekten men ondernemen moet opdat de winst maximaal is, waarbij men niet meer dan kapitaal D kan investeren. Om het probleem als een gemengd L.P.-probleem te formuleren voeren we de discrete 0 - 1 variabelen δ_j in.

Beschouw nu het gemengde L.P.-probleem

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} p_j \delta_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j \delta_j \leq D \qquad (3.1.33)$$

$$0 \leq \delta_j \leq 1, \ \delta_j \text{ geheel} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Een optimale oplossing van dit probleem geeft aan welke projekten ondernomen moeten worden opdat de huidige waarde van de toekomstige winsten maximaal is.

Daar de getallen d_j en D geheel zijn zal de verschilvariabele toegevoegd aan $\sum_{j=1}^{n} d_j \delta_j \leq D$ ook geheel zijn en we hebben dan met een discreet L.P.-probleem te maken. We merken op dat probleem (3.1.33) opgelost kan worden m.b.v. dynamische programmering.

We zullen nu enkele eenvoudige generalisaties van (3.1.33) beschouwen. Het kan b.v. voorkomen dat voor een zekere groep J van projekten slechts één projekt uit deze groep gekozen mag worden. Dit leidt tot de bijvoorwaarde:

$$\sum_{j \in J} \delta_j \leq 1. \qquad (3.1.34)$$

Men kan nu voor $j \in J$ de bijvoorwaarden $\delta_j \leq 1$ weglaten daar deze direct uit (3.1.34) volgen.

Een andere mogelijkheid is dat men projekt i moet ondernemen wanneer men besluit projekt j te ondernemen, maar projekt i mag zonder projekt j ondernomen worden. Deze situatie wordt uitgedrukt door:

$$\delta_i - \delta_j \geq 0. \qquad (3.1.35)$$

(3.1.33) is een bijzonder eenvoudig mathematisch model voor een beleggingsprobleem. Men kan zich indenken dat voor elk projekt geldt dat er geld geïnvesteerd moet worden gedurende een aantal perioden. Stel dat er een beperkt investeringskapitaal D_k is voor elk van de K perioden en laat d_{kj} het geld zijn nodig voor projekt j gedurende periode k. We willen nu de projekten kiezen waarvoor de toekomstige winsten maximaal zijn en waarbij voor elke periode k de investering niet het bedrag D_k mag overschrijden.

Het gemengde L.P.-probleem wordt nu:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} p_j \delta_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{kj} \delta_j \leq D_k \quad (k = 1, \ldots, K) \qquad (3.1.36)$$

$$0 \leq \delta_j \leq 1, \ \delta_j \text{ geheel} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Van dit soort problemen bestaan er veel algemenere gevallen.

Het laatste probleem dat we zullen behandelen staat bekend onder de naam handelsreizigersprobleem.

Stel dat een vertegenwoordiger een rayon bezit bestaande uit n plaatsen. Hij vertrekt uit zijn woonplaats, plaats 1, om de andere n - 1 plaatsen te bezoeken en keert daarna weer naar huis terug. Nu wil de handelsreizi-

ger een routeschema ontwerpen, dat hem zegt in welke volgorde hij de diverse plaatsen bezoeken moet, zodat de totaal afgelegde afstand minimaal is. De afstanden tussen elk tweetal plaatsen wordt bekend verondersteld, we geven de afstand van plaats i tot plaats j aan met d_{ij}. Er hoeft niet noodzakelijk te gelden $d_{ij} = d_{ji}$.
We kunnen de door de handelsreiziger gevolgde route opvatten als een rij van n etappes, waarbij de handelsreiziger in de k^{de} etappe van plaats i naar plaats j gaat.
Om nu het probleem te formuleren voeren we de variabelen δ_{ijk} in:

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{als de reiziger van plaats i naar plaats j gaat op de } k^{de} \text{ etappe van de reis.} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Bij elke etappe k behoort slechts één tweetal plaatsen, dit geeft de voorwaarden:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} \delta_{ijk} = 1 \quad k = 2,\ldots, n-1 \\ &\sum_{j} \delta_{1j1} = 1 \\ &\sum_{i} \delta_{i1n} = 1 \end{aligned} \qquad (3.1.37)$$

Voor elke plaats i is er slechts één etappe van de route aan te geven die in i begint en in een andere plaats eindigt. Bij het formuleren van de bijvoorwaarden moeten we de gevallen i = 1, i = n apart beschouwen.
Het bovenstaande geeft aanleiding tot de volgende voorwaarden:

$$\sum_{j,k} \delta_{ijk} = 1 \quad (i = 2,\ldots, n) \qquad (3.1.38)$$

$$j = 1 \leftrightarrow k = n$$

waarbij in de sommatie gelden moet dat k = n als j = 1 en omgekeerd.
Voor i = 1 wordt de bijvoorwaarde:

$$\sum_{j} \delta_{1j1} = 1,$$ en deze voorwaarde is al be-

vat in (3.1.37).

Verder geldt er voor elke plaats j dat er slechts één etappe van de route in j eindigt.
Dit geeft de voorwaarden:

$$\sum_{i,k} \delta_{ijk} = 1 \quad j = 2,\ldots, n \qquad (3.1.39)$$

$$i = 1 \leftrightarrow k = 1$$

In de sommatie geldt dat k = 1 als i = 1, en omgekeerd.
Voor j = 1 wordt de voorwaarde: $\sum_{i} \delta_{i1n} = 1$ en deze voorwaarde staat reeds in (3.1.37).
Als etappe k van de route in plaats j eindigt dan moet etappe k + 1 beginnen in plaats j, dit geeft:

$$\sum_{i} \delta_{ijk} = \sum_{j'} \delta_{jj',k+1} \quad j = 2,\ldots, n;\ k = 2,\ldots, n-1$$

$$\delta_{1j1} = \sum_{j'} \delta_{jj'2} \qquad (3.1.40)$$

$$\sum_{i} \delta_{ij,n-1} = \delta_{j1n}$$

We hebben nu alle voorwaarden geformuleerd. We hoeven niet de voorwaarden $\delta_{ijk} \leq 1$ toe te voegen, daar deze direct uit (3.1.37) t/m (3.1.39) volgen.
We willen nu de niet-negatieve gehele δ_{ijk} bepalen die voldoen aan (3.1.37) t/m (3.1.40), zodat

$$z = \sum_{i,j,k} d_{ij}\delta_{ijk} \qquad (3.1.41)$$

geminimaliseerd wordt.
We zullen nu een variant van het handelsreizigersprobleem behandelen. Laat een n-tal plaatsen en hun onderlinge afstanden gegeven zijn. Stel dat men wil bepalen in welke plaats men beginnen moet om de andere plaatsen te bezoeken en de volgorde waarin dit laatste gebeuren moet, zó dat de totaal afgelegde afstand minimaal is, waarbij men niet in de laatste etappe naar de uitgangsplaats terugkeert. (we vinden dus een niet-gesloten route).
De oplossing van dit probleem is eenvoudig. Men voert een denkbeeldige

plaats in die gelijke afstand bezit tot elk der n plaatsen. Deze denkbeeldige plaats stellen we als woonplaats van de handelsreiziger. We kunnen het probleem nu opvatten als een handelsreizigersprobleem, waarin n + 1 plaatsen optreden. We lossen dit probleem op en als we van de oplossing de eerste en laatste etappe weglaten dan hebben we een optimale oplossing voor ons probleem gevonden, die ons zegt, in welke plaats we beginnen en in welke volgorde we dan van de ene naar de andere plaats reizen.
Ga zelf na dat de zo verkregen oplossing inderdaad een optimale oplossing is.

We zullen nu een oplossingstechniek gaan afleiden voor het gemengde L.P.-probleem.
Het gemengde L.P.-probleem luidt:

$$\max z = \vec{c}\vec{x}$$

onder

$$\vec{A}\vec{x} = \vec{b} \qquad (3.1.42)$$

$$\vec{x} \geq \vec{0}$$

x_j geheel, $j \in J$.

Laten we de voorwaarde weg dat sommige x_j gehele waarden aannemen moeten, dan geeft dit het L.P.-probleem

$$\max z = \vec{c}\vec{x}$$

$$\text{onder } \vec{A}\vec{x} = \vec{b},\ \vec{x} \geq \vec{0} \qquad (3.1.43)$$

We zullen voor het gemak het gemengde L.P.-probleem in het vervolg aangeven door (3.1.42) en het L.P.-probleem door L.P.(3.1.43). Het grondidee om (3.1.42) op te lossen is afkomstig van Dantzig, hij stelde voor om i.p.v. (3.1.42) L.P.(3.1.43) op te lossen. Wanneer voor de verkregen optimale oplossing van L.P.(3.1.43) geldt dat x_j geheel is, $j \in J$, dan is de optimale oplossing een optimale oplossing voor (3.1.42). Als de optimale oplossing niet een toegelaten oplossing is voor (3.1.42) dan stelde Dantzig voor om aan L.P.(3.1.43) een extra voorwaarde toe te voegen en wel zodanig dat de verzameling van toegelaten oplossingen van het

verkregen nieuwe L.P.-probleem de toegelaten oplossingen van (3.1.42) bevat, maar niet de gevonden optimale oplossing van L.P.(3.1.43). Het L.P.-probleem met de toegevoegde bijvoorwaarde wordt nu opgelost. Als de optimale oplossing van dit laatste probleem een toegelaten oplossing is van (3.1.42) dan is het een optimale oplossing van (3.1.42). Is het geen toegelaten oplossing van (3.1.42) dan voegt men opnieuw een bijvoorwaarde toe met de eigenschap dat de verzameling van toegelaten oplossingen van het nieuwe L.P.-probleem elke toegelaten oplossing van (3.1.42) bevat, maar niet de optimale oplossing van het vorige L.P.-probleem.
De toegevoegde bijvoorwaarden noemen we sneden. Geometrisch bezien snijdt elk van de sneden een deel van de verzameling van toegelaten oplossingen van L.P.(3.1.43) af. Het is mogelijk de sneden zo te kiezen dat we in een eindig aantal stappen een optimale oplossing van (3.1.42) bereiken.

Gomory's algorithme voor discrete L.P.-problemen

We beschouwen eerst het discrete L.P.-probleem, dus in (3.1.42) bevat J alle j.
Laat voor $A\vec{x} = \vec{b}$ gelden dat $r(A) = r(A_b) = m$, $m < n$.
Stel dat het L.P.(3.1.43) opgelost is en dat we gevonden hebben dat B de basismatrix is behorende bij de optimale basisoplossing. Als $\vec{x}_\beta$ de basisvariabelen behorende bij B bevat, $\vec{x}_\gamma$ de overige variabelen en C bestaat uit de kolomvektoren van A die niet in B zitten dan is elke oplossing van $A\vec{x} = \vec{b}$ te schrijven als:

$$B\vec{x}_\beta + C\vec{x}_\gamma = \vec{b}$$

$$\text{of} \quad \vec{x}_\beta = B^{-1}\vec{b} - B^{-1}C\vec{x}_\gamma \qquad (3.1.44)$$

Stellen we $B^{-1}\vec{b} = \vec{y}_0$, herinneren we ons dat $\vec{y}_j = B^{-1}\vec{a}_j$ en geven we de verzameling van de indices j behorende bij de niet-basisvariabelen aan met R, dan kunnen we (3.1.44) ook schrijven als:

$$\vec{x}_\beta = \vec{y}_0 - \sum_{j \in R} \vec{y}_j x_j \qquad (3.1.45)$$

Er is slechts één oplossing van (3.1.45) met $x_j = 0$, $j \in R$ en dat is de optimale basisoplossing $\vec{x}_\beta = B^{-1}\vec{b} = \vec{y}_0$, $\vec{x}_R = \vec{0}$. Hieruit volgt onmiddellijk

dat wanneer van de gevonden optimale $\vec{y}_0$ van L.P.(3.1.43) niet alle componenten gehele waarden aannemen, dat dan elke toegelaten oplossing van (3.1.42) tenminste één $x_j > 0$, $j \in R$ heeft. Daar alle x_j geheel moeten zijn is het dus noodzakelijk voor iedere toegelaten oplossing van (3.1.42) dat tenminste één $x_j \geq 1$, $j \in R$. Beschouw nu de bijvoorwaarde:

$$\sum_{j \in R} x_j \geq 1. \qquad (3.1.46)$$

Iedere toegelaten oplossing van (3.1.42) moet aan (3.1.46) voldoen, als van $\vec{y}_0$ niet alle componenten geheel zijn.
Het is duidelijk dat $\vec{x}_R = \vec{0}$ niet aan (3.1.46) voldoet. Dus wanneer we een nieuw L.P.-probleem vormen door aan L.P.(3.1.43) de voorwaarde (3.1.46) toe te voegen, dan krijgen we een nieuw L.P.-probleem, waarvan de verzameling van toegelaten oplossingen elke toegelaten oplossing van (3.1.42) bevat, maar niet de optimale basisoplossing $\vec{x}_\beta = \vec{y}_0$, $\vec{x}_R = \vec{0}$ van L.P.(3.1.43).
Als van de optimale basisoplossing van het nieuwe L.P.-probleem alle componenten geheelwaardig zijn, dan is de oplossing een optimale oplossing voor (3.1.42).
Als niet alle componenten geheel zijn, dan voegen we opnieuw een bijvoorwaarde van de vorm (3.1.46) toe en herhalen het procédé. Dantzig stelde bovenstaande procedure, gebaseerd op het invoeren van sneden van de vorm (3.1.46), het eerst voor. Op enkele problemen is deze procedure toegepast en heeft men in een eindig aantal stappen een optimale oplossing verkregen, maar men heeft aangetoond dat er gevallen mogelijk zijn waarbij men niet de optimale oplossing bereikt.
Doch het is Gomory gelukt een procedure te ontwikkelen waarvan aangetoond kan worden dat deze in een eindig aantal stappen naar een optimale oplossing leidt.
Voor een probleem van enige omvang is het aantal stappen zo groot dat het rekentechnisch in de meeste gevallen nog onmogelijk is om een oplossing te bepalen.
We zullen nu Gomory's algorithme afleiden.
Stel dat het L.P.(3.1.43) opgelost is en dat de optimale basisoplossing $\vec{y}_0 = B^{-1}\vec{b}$ gevonden is. Als alle componenten van $\vec{y}_0$ geheel zijn dan is $\vec{y}_0$

optimaal voor (3.1.42). Veronderstel echter dat niet alle componenten van $\vec{y}_0$ geheel zijn, laat b.v. y_{u0} niet geheel zijn. We hebben reeds in het voorgaande laten zien dat elke toegelaten oplossing $\vec{x}$ van (3.1.42) voldoet aan:

$$\vec{x}_\beta = \vec{y}_0 - \sum_{j \in R} \vec{y}_j x_j \qquad (3.1.47)$$

waarbij $\vec{x}_\beta$ bestaat uit de basisvariabelen behorende bij B, en R de indices-verzameling is van de niet-basisvariabelen. Beschouw de u^{de} vergelijking van (3.1.47)

$$x_{\beta u} = y_{u0} - \sum_{j \in R} y_{uj} x_j \qquad (3.1.48)$$

We voeren de gehele getallen δ_{uj} in, waarbij δ_{uj} het grootste gehele getal is kleiner dan of gelijk aan y_{uj}, $j \in R$ en $j = 0$.
Vervolgens stellen we:

$$y_{uj} = \delta_{uj} + f_{uj}, \; j \in R; \; y_{u0} = \delta_{u0} + f_{u0} \qquad (3.1.49)$$

Uit de definitie van δ_{uj} volgt dat $0 \leq f_{uj} < 1$, $j \in R$ en verder is $0 < f_{u0} < 1$, omdat y_{u0} niet geheel is.
Substitueer (3.1.49) in (3.1.48):

$$x_{\beta u} = \delta_{u0} - \sum_{j \in R} \delta_{uj} x_j + f_{u0} - \sum_{j \in R} f_{uj} x_j \qquad (3.1.50)$$

Voor iedere <u>toegelaten</u> oplossing $\vec{x}$ van (3.1.42) is

$$x_{\beta u} - \delta_{u0} - \sum_{j \in R} \delta_{uj} x_j \qquad (3.1.51)$$

een geheel getal.
Nu volgt direct uit (3.1.50) en (3.1.51) dat voor iedere toegelaten oplossing $\vec{x}$ van (3.1.42)

$$f_{u0} - \sum_{j \; R} f_{uj} x_j \qquad (3.1.52)$$

geheel is.
Er geldt $\sum_{j \in R} f_{uj} x_j \geq 0$, en $0 < f_{u0} < 1$, dit impliceert dat (3.1.52) een niet-positief geheel getal is.

We zien dus dat elke toegelaten oplossing $\vec{x}$ van (3.1.42) voldoen moet aan:

$$f_{u0} - \sum_{j \in R} f_{uj} x_j \leq 0 \qquad (3.1.53)$$

of

$$\sum_{j \in R} (-f_{uj}) x_j \leq -f_{u0} \qquad (3.1.54)$$

De gevonden optimale basisoplossing $\vec{y}_0 = B^{-1}\vec{b}$, $\vec{x}_R = \vec{0}$ van L.P.(3.1.43) voldoet niet aan (3.1.54), omdat $x_j = 0$, $j \in R$ en $f_{u0} > 0$.
Dus als we (3.1.54) toevoegen aan de bijvoorwaarden van L.P.(3.1.43) dan krijgen we een nieuw L.P.-probleem, waarvan de verzameling van toegelaten oplossingen elke toegelaten oplossing van (3.1.42) bevat, maar niet de gevonden optimale basisoplossing van L.P.(3.1.43).
Gomory stelde nu voor om de snede (3.1.54) aan L.P.(3.1.43) toe te voegen en het nieuwe L.P.-probleem op te lossen.
In hoofdstuk 2, §5, blz. 151, hebben we laten zien hoe men eenvoudig een L.P.-probleem, waaraan een extra voorwaarde toegevoegd wordt, oplossen kan als het probleem zonder de extra voorwaarde opgelost is.
De verschilvariabele toegevoegd aan (3.1.54) is s_1, waarbij het aanhangsel 1 aangeeft dat s_1 de verschilvariabele is, die bij de eerste snede behoort.
Na toevoegen van s_1 wordt (3.1.54)

$$\sum_{j \in R} (-f_{uj}) x_j + s_1 = -f_{u0} \qquad (3.1.55)$$

We hebben reeds aangetoond dat (3.1.52) geheel is voor iedere toegelaten oplossing $\vec{x}$ van (3.1.42), dus s_1 is geheel voor elke toegelaten oplossing van (3.1.42).
M.b.v. (3.1.55) ziet men eenvoudig in dat een basismatrix voor het nieuwe L.P.-probleem is:

$$B_1 = \begin{bmatrix} B & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.1.56)$$

met dan

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.1.57)$$

En een basisoplossing voor het nieuwe L.P.-probleem wordt gegeven door:

$$B_1^{-1}[\vec{b}, -f_{u0}] = [\vec{y}_0, -f_{u0}] \qquad (3.1.58)$$

Deze basisoplossing is niet toegelaten, daar $-f_{u0} < 0$.
De vektor die de c-waarden bevat van de basisvariabelen behorende bij B_1 is $(\vec{c}_B, 0)$. De vektoren $\vec{y}_j$ van het nieuwe L.P.-probleem geven we aan met $\vec{y}_j^{(1)}$ en er geldt:

$$\vec{y}_j^{(1)} = B_1^{-1}[\vec{a}_j, -f_{uj}] = [\vec{y}_j, -f_{uj}], \; j \in R. \qquad (3.1.59)$$

Met behulp van de definitie van z_j ziet men direct dat de getallen $z_j - c_j$ voor het nieuwste L.P.-probleem hetzelfde zijn als de getallen $z_j - c_j$ die behoren bij de gevonden optimale basisoplossing van L.P.(3.1.43), waarbij men bedenke dat voor de basisvariabelen behorende bij B_1 geldt dat $z_j - c_j = 0$.
We kunnen nu concluderen dat we voor het nieuwe L.P.-probleem een basisoplossing bezitten met alle $z_j - c_j \geq 0$. Men kan nu het duale simplex algorithme toepassen om een optimale basisoplossing voor het nieuwe L.P.-probleem te bepalen. M.b.v. (3.1.55), (3.1.58) en (3.1.59) kunnen we direct de begintabel voor het nieuwe L.P.-probleem opschrijven.
Aan de tabel die bij de gevonden optimale oplossing van L.P.(3.1.43) behoort, voegen we nog een rij en een kolom toe. In het hokje van de nieuwe rij, dat staat onder de kolom met hoofd x_0 (de kolom waarin $\vec{y}_0$ vermeld is) schrijven we $-f_{u0}$, in de hokjes staande onder de $j \in R$-kolommen schrijven we $-f_{uj}$. De getallen f_{uj}, f_{u0} zijn gedefinieerd volgens (3.1.49). In de nieuwe kolom, die bij s_1 behoort, schrijven we nullen behalve in het hokje dat tot de nieuwe rij behoort.
Tenslotte worden van de nieuwe rij de nog niet ingevulde hokjes gevuld met nullen. Als de tabel ingevuld is, passen we vervolgens het duale simplex algorithme toe. Vaak zijn slechts een betrekkelijk klein aantal stappen nodig (soms slechts één) om de nieuwe optimale oplossing te bepalen.
Als de optimale oplossing van het nieuwe L.P.-probleem niet-toegelaten is voor (3.1.42), dan herhalen we de gehele procedure door een nieuwe snede aan te brengen.

Dit wordt voortgezet tot een toegelaten, en dus dan een optimale oplossing van (3.1.42) verkregen is.

We hebben nog geen regel gegeven die ons zegt welke vergelijking van (3.1.47) de snede bepaalt, wanneer meer dan één component van $\vec{y}_0$ niet geheel is. Gomory heeft een methode voor de keuze van de snedes aangegeven, waardoor men er zeker van is dat de optimale oplossing van (3.1.42) in een eindig aantal stappen bereikt wordt. Deze methode is in de praktijk moeilijk hanteerbaar, en past men dan ook in de praktijk een meer eenvoudige regel toe.

Intuïtief is het duidelijk dat we de snede willen kiezen, die zoveel als mogelijk is van de verzameling van toegelaten oplossingen van het vorige L.P.-probleem (dus met weglating van de voorwaarde x_j geheel!) afsnijdt. Ruwweg geformuleerd wensen we de doorsnee van het vlak $\sum_{j\in R} - f_{uj}x_j = - f_{u0}$ met de x_j-as, $j \in R$ zo groot als mogelijk is. Dit komt hierop neer dat we de u kiezen waarvoor de quotiënten $\frac{f_{u0}}{f_{uj}}$ zo groot mogelijk zijn.

Het komt echter vaak voor, dat voor elke u met y_{u0} niet geheel, sommige quotiënten groot zijn terwijl andere klein zijn. Bij de regel, in de praktijk toegepast kiest men eenvoudig de vergelijking van (3.1.47) waarvoor f_{u0} het grootst is.

Men kan natuurlijk ook andere regels bedenken. Men zou tegelijk voor elke niet-gehele y_{u0} een snede kunnen aanbrengen, dus aan het vorige L.P.-probleem worden dan meerdere bijvoorwaarden toegevoegd. Het is ook nu eenvoudig voor het verkregen nieuwe L.P.-probleem een basisoplossing aan te geven met alle $z_j - c_j \geq 0$, en men kan dan de duale simplex methode toepassen. Het is niet bekend of deze laatste benaderingswijze enig voordeel biedt. De procedure, waar we bij elke stap een snede aanbrengen is een iteratieproces waarbij we eerst L.P.(3.1.43) oplossen. We noemen dit probleem P_0. Als de van dit probleem verkregen oplossing toegelaten is voor (3.1.42), dan is het een optimale oplossing voor (3.1.42). Is de oplossing niet toegelaten voor (3.1.42) dan bepalen we een snede (3.1.54) en verkrijgen dan een nieuw L.P.-probleem P_1 dat een voorwaarde meer bezit dan P_0 en waarin de verschilvariabele s_1 optreedt. M.b.v. de duale simplex methode lossen we P_1 op. Als de ge-

vonden optimale basisoplossing van P_1 een toegelaten oplossing is voor (3.1.42) dan is de oplossing tevens optimaal voor (3.1.42), wanneer echter de oplossing niet toegelaten is voor (3.1.42) dan brengen we opnieuw een snede aan, hetgeen een nieuw L.P.-probleem P_2 oplevert. Als men zo verder gaat is men geneigd aan te nemen dat probleem P_v steeds meer bijvoorwaarden zal bezitten, naarmate v groter is. We zullen echter laten zien dat P_v nooit meer dan n+1 bijvoorwaarden behoeft te bezitten, ongeacht hoe groot v is.

Stel dat $\vec{x}_{v-1}$ de gevonden optimale basisoplossing van P_{v-1} is, waarbij B_{v-1} de bijbehorende optimale basis is.

Als in $\vec{x}_{v-1}$ de verschilvariabele s_k als basisvariabele optreedt dan laten we uit probleem P_{v-1} de bij s_k behorende bijvoorwaarde (= snede) weg. Als we dit doen voor elke verschilvariabele die in $\vec{x}_{v-1}$ als basisvariabele optreedt dan verkrijgen we een L.P.-probleem P_{v-1}^*. In de bij $\vec{x}_{v-1}$ behorende eindtabel van P_{v-1} schrappen we voor elke als basisvariabele optredende verschilvariabele s_k de kolom s_k en de rij behorende bij de in de B-kolom vermelde s_k. Wanneer we dit doen, dan houden we een <u>gereduceerde tabel</u> over. We zullen aantonen dat deze gereduceerde tabel de eindtabel is van een optimale basisoplossing van P_{v-1}^*.

<u>Bewijs</u>: Na herschikken van de bijvoorwaarden is P_{v-1} te schrijven als:

$$\begin{aligned} &\max z = \vec{c}\vec{x} \\ &\text{onder} \\ &A\vec{x} = \vec{b},\ \vec{x} \geq \vec{0} \\ &\text{(en de snedes)} \\ &\sum_{j \in R^{(t)}} - f_{uj}^{(t)} x_j + s^{(t)} = -f_{u0}^{(t)} \qquad (3.1.60) \\ &s^{(t)} \geq 0 \quad (t = 1, \ldots, k) \end{aligned}$$

waarbij de verschilvariabelen $s^{(h)}, s^{(h+1)}, \ldots, s^{(k)}$ als basisvariabelen in $\vec{x}_{v-1} = (\vec{x}, \vec{s})$ optreden.

We geven (3.1.60), d.w.z. probleem P_{v-1}, kortweg aan met

$$\begin{aligned} &\max z = \vec{\vec{c}}\vec{\vec{x}} \\ &\text{onder} \\ &D[\vec{x},\vec{s}] = \vec{d} \\ &\vec{x},\vec{s} \geq \vec{0} \end{aligned} \tag{3.1.61}$$

met $\vec{s} = (s^{(1)}, \ldots, s^{(k)})$.

Uit de definitie van P_{v-1} volgt, dat probleem P_{v-1}^{*} luidt:

$$\begin{aligned} &\max z = \vec{\vec{c}}\vec{\vec{x}} \\ &\text{onder} \\ &A\vec{x} = \vec{b},\ \vec{x} \geq \vec{0} \\ &\sum_{j \in R^{(t)}} - f_{uj}^{(t)} x_j + s^{(t)} = -f_{u0}^{(t)} \\ &s^{(t)} \geq 0 \quad (t = 1, \ldots, h-1) \end{aligned} \tag{3.1.62}$$

(3.1.62) geven we kortweg weer door:

$$\begin{aligned} &\max z = \vec{\vec{c}}\vec{\vec{x}} \\ &\text{onder} \\ &D^{*}[\vec{x},\vec{\vec{s}}] = \vec{\vec{d}} \\ &\vec{x},\vec{\vec{s}} \geq 0 \end{aligned} \tag{3.1.63}$$

$$\text{met } \vec{\vec{s}} = (s^{(1)}, \ldots, s^{(h-1)})$$

Men ziet eenvoudig in dat de bij $\vec{x}_{v-1}$ behorende optimale basis B_{v-1} van probleem P_{v-1} de volgende vorm bezit:

$$B_{v-1} = \begin{bmatrix} B^{*} & 0 \\ G & J \end{bmatrix} \tag{3.1.64}$$

Merk op dat $[B^{*}0]$ een deelmatrix van D^{*} is. *)

Nu geldt $|B_{v-1}| = |B^{*}J - 0G| = |B^{*}|$. Daar B_{v-1} een basis is voor P_{v-1} geldt $|B_{v-1}| \neq 0$. Dus $|B^{*}| \neq 0$, waaruit volgt dat B^{*} een basis voor probleem P_{v-1}^{*} is. (zie blz. 41, laatste regels)

$$B_{v-1}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{*-1} & 0 \\ -GB^{*-1} & J \end{bmatrix} \tag{3.1.65}$$

(zie blz. 33)

*) B^{*} en D^{*} hebben hetzelfde aantal rijen.

De gevonden optimale basisoplossing van P_{v-1} is $\vec{x}_{v-1}$.
Splits nu $\vec{d}$ als

$$\vec{d} = (\vec{d}^{**}, \vec{d}^{***}) \tag{3.1.66}$$

waarbij $\vec{d}^{**} = (b_1, \ldots, b_m, -f_{u0}^{(1)}, \ldots, -f_{u0}^{(h-1)})$;

$\vec{d}^{***} = (-f_{u0}^{(h)}, \ldots, -f_{u0}^{(k)})$.

$$\text{Nu is } \vec{x}_{v-1} = B_{v-1}^{-1}\vec{d} = \begin{bmatrix} B^{*-1} & 0 \\ -GB^{*-1} & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{d}^{**} \\ \vec{d}^{***} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{*-1}\vec{d}^{**} \\ \vec{d}^{***} - GB^{*-1}\vec{d}^{**} \end{bmatrix} \tag{3.1.67}$$

De bij B^* behorende basisoplossing $\vec{x}_B^*$ van L.P.-probleem P_{v-1}^* wordt gegeven door:

$$\vec{x}_B^* = B^{*-1}\vec{d}^{**} \tag{3.1.68}$$

Uit (3.1.67) volgt direct dat $\vec{x}_B^*$ in de x_0-kolom van de gereduceerde tabel staat. Door de kolomvektoren $\vec{d}_j$ van D analoog als $\vec{d}$ in (3.1.66) te splitsen gaat men direct na dat de bij B^* behorende $\vec{y}_j^* = B^{*-1}\vec{d}_j^*$ in de overige kolommen van de gereduceerde tabel gegeven worden. Uit dit laatste en het feit dat de c-waarden van verschilvariabelen gelijk nul is volgt dat de getallen $z_j - c_j$ $(= \vec{c}_B^*\vec{y}_j^* - c_j)$ behorende bij $\vec{x}_B^*$ gegeven worden door de getallen $z_j - c_j$ in de gereduceerde tabel. Deze getallen $z_j - c_j \geq 0$, alle j, dus $\vec{x}_B^*$ is optimaal voor P_{v-1}^*. We hebben hiermee aangetoond dat de gereduceerde tabel de eindtabel is van een optimale oplossing van P_{v-1}^*. Daar in L.P.(3.1.43) slechts n variabelen x_j optreden kan P_{v-1}^* hoogstens n bijvoorwaarden bezitten. Immers stel P_{v-1}^* bezit meer dan n bijvoorwaarden, dan geeft dit tegenspraak met het feit dat de basisoplossing $\vec{x}_B^*$ van P_{v-1}^* geen variabelen s_k bevat. Om probleem P_v te verkrijgen voegen we aan P_{v-1}^* een snede van de vorm (3.1.54) toe, waarna we P_v m.b.v. het duale simplex algorithme oplossen. We zien dus dat P_v nooit meer dan n+1 bijvoorwaarden behoeft te bezitten.

Opmerking. Bij het oplossen van de problemen P_v kan het voorkomen dat meerdere malen dezelfde basis optreedt.

Eindige oplossingsmethode.*) Voor de fijnproevers geven we een bewijsschets. We zullen laten zien dat men door het oplossen van een eindig aantal problemen P_v de optimale oplossing van (3.1.42) vinden kan. Daartoe moet men op een speciale wijze de snedes van de vorm (3.1.54) aanbrengen.

We zullen aannemen dat de c_j in (3.1.42) geheel zijn. Dit is geen beperking, daar men hier altijd voor zorgen kan door de eenheden waarin de c_j gemeten worden geschikt te kiezen. Voor elke toegelaten oplossing $\vec{x}$ van (3.1.42) is z dus geheel. Verder veronderstellen we dat z begrensd is, hetgeen voor elk realistisch probleem vervuld is.

Laat $\vec{y}_0 = B^{-1}\vec{b} = \vec{x}_B$ de gevonden optimale basisoplossing van L.P.(3.1.43) zijn. We hebben reeds aangetoond dat elke toegelaten oplossing $\vec{x}$ van (3.1.42) te schrijven is als:

$$\vec{x}_\beta = \vec{y}_0 - \sum_{j\in R} \vec{y}_j x_j \qquad (3.1.69)$$

waar $\vec{y}_j = B^{-1}\vec{a}_j$, R de indices j bevat behorende bij de variabelen x_j die niet als basisvariabelen in $\vec{y}_0$ optreden en $\vec{x}_\beta$ de basisvariabelen van $\vec{y}_0$ bevat.

De kriteriumfunctie $z = \vec{c}\vec{x} = \vec{c}_B\vec{x}_\beta + \vec{c}_R\vec{x}_R =$

$$= \vec{c}_B(\vec{y}_0 - \sum_{j\in R} \vec{y}_j x_j) + \sum_{j\in R} c_j x_j =$$

$$= \vec{c}_B\vec{y}_0 - \sum_{j\in R} (z_j - c_j)x_j$$

Stel nu $\vec{c}_B\vec{y}_0 = y_{00}$, $z_j - c_j = y_{0j}$.

Dus

$$z = y_{00} - \sum_{j\in R} y_{0j}x_j. \qquad (3.1.70)$$

Triviaal is de gelijkheid

$$\vec{x}_R = \vec{0} - \sum_{j\in R} (-\vec{e}_j)x_j \qquad (3.1.71)$$

*) zie Hadley, Nonlineair and dynamic programming, blz. 276 e.v.

Voeg (3.1.69) t/m (3.1.71) samen tot:

$$\begin{aligned} z &= y_{00} - \sum_{j\in R} y_{0j}x_j \\ \vec{x} &= \vec{y}_0 - \sum_{j\in R} \vec{y}_j x_j \\ \vec{x}_R &= \vec{0} - \sum_{j\in R} (-\vec{e}_j)x_j \end{aligned} \qquad (3.1.72)$$

We geven de volgende definities:

Een vektor $\vec{x}$ heet lexicografisch positief, notatie $\vec{x} \succ \vec{0}$, als de eerste ongelijk aan nul zijnde component positief is. Wij schrijven: $\vec{x} \succ \vec{y}$ als $\vec{x} - \vec{y} \succ \vec{0}$. In (3.1.72) stellen we:

$$\vec{p}_0 = [y_{00}, \vec{y}_0, \vec{0}], \quad \vec{p}_j = [y_{0j}, \vec{y}_j, -\vec{e}_j], \quad j \in R. \qquad (3.1.73)$$

We nemen aan dat het vergelijkingenstelsel $\vec{x}_\beta = \vec{y}_0 - \sum_{j\in R} \vec{y}_j x_j$ zodanig te rangschikken is dat elke $\vec{p}_j \succ \vec{0}$, $j \in R$. Als dit niet het geval is dan kunnen we er altijd voor zorgen dat $\vec{p}_j \succ \vec{0}$, $j \in R$, door aan te nemen dat de convexe verzameling van toegelaten oplossingen van L.P.(3.1.43) begrensd is. We voegen de overbodige, schijnbijvoorwaarde

$$\sum_{j\in R} x_j + x_{n+1} = M \qquad (3.1.74)$$

toe, waarbij M geheel is en zo groot gekozen dat elke toegelaten oplossing van (3.1.42) aan (3.1.74) voldoet met $x_{n+1} > 0$. Dus x_{n+1} zal dus in elke basisoplossing voorkomen. We nemen x_{n+1} steeds als eerste basisvariabele, en schrijven de vergelijking $x_{n+1} = M - \sum_{j\in R} x_j$ direct onder de z-vergelijking in (3.1.72).

Als we (3.1.74) toevoegen is de tweede component van elke $\vec{p}_j$ gelijk aan 1, zodat $\vec{p}_j \succ \vec{0}$, $j \in R$, daar voor de optimale L.P.-oplossing $y_{0j} = z_j - c_j \geq 0$, alle j. We hebben gezien dat we een snede aanbrengen als de gevonden optimale basisoplossing $\vec{y}_0$ niet toegelaten is voor (3.1.42). Bij het aanbrengen van de snedes zullen we iets anders te werk gaan dan op blz. 180.

Als y_{00} niet geheel is, dan gebruiken we de vergelijking van z uit

(3.1.72) om een snede aan te brengen. Als we een snede aanbrengen, dan schrijven we deze bijvoorwaarde steeds onder (3.1.72). We kiezen dus op de volgende wijze de snedes: we onderzoeken de vergelijkingen uit (3.1.72) volgens de volgorde waarin ze gegeven worden en bepalen de snede m.b.v. de vergelijking die behoort bij de eerste y_{i0}, $i = 0, 1, \ldots, m$, die niet geheel is. We zien dus dat zolang y_{00} niet geheel geworden is, we m.b.v. de z-vergelijking de snede bepalen. Stel dat $\vec{p}_0$ een niet toegelaten oplossing is van (3.1.42). M.b.v. de gegeven keuzeregel voor de snedes bepalen we een snede, hetgeen een nieuw L.P.-probleem P_1 geeft. P_1 lossen we op m.b.v. het duale simplex algorithme. Bij dit algorithme bepalen we eerst de vektor die de basis uitgaat. Als $x_{Br} = y_{r0}$ de meest negatieve basisvariabele is, dan gaat de bij x_{Br} behorende basisvektor de basis uit. Om de vektor te bepalen die de basis inkomt zullen we volgens een bepaalde wijze te werk gaan. We berekenen eerst (het tweede kriterium van het duale simplex algorithme):

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \max_{j \in R} \frac{y_{0j}}{y_{rj}} \left(= \max_{j} \frac{z_j - c_j}{y_{rj}}\right), \; y_{rj} < 0. \qquad (3.1.75)$$

Als k uniek is, dan komt kolomvektor k de basis in. Als k niet uniek is dan beschouwen we de indices j waarvoor het maximum in (3.1.75) aangenomen wordt en voor deze indices j bepalen we:

$$\max \frac{y_{1j}}{y_{rj}} \qquad (3.1.76)$$

Als de index waarvoor dit maximum bereikt wordt uniek is, dan gaat de bij de index behorende kolom de basis in. Is de index niet uniek, dan bepalen we $\frac{y_{2j}}{y_{rj}}$ voor die j waarvoor het maximum in (3.1.76) aangenomen wordt. Als we zo tewerk gaan, dan wordt tenslotte éénduidig de kolom bepaald, welke de basis ingaat. Immers stel dat het laatste niet het geval is dan zou een vektor $\vec{p}_j$ een scalair veelvoud van een andere vektor $\vec{p}_i$ zijn en uit (3.1.73) volgt dat dit onmogelijk is. (door het optreden van de $\pm \vec{e}_j$).

De bovenstaande procedure houdt in dat we de vektor $\vec{p}_k$ met $y_{rk} < 0$ be-

palen zodat

$$(-\frac{1}{y_{rj}})\vec{p}_j - (\frac{1}{y_{rk}})\vec{p}_k \succ \vec{0}, \text{ voor } j \in R \text{ met } y_{rj} < 0$$

of $$\vec{p}_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}\vec{p}_k \succ \vec{0}, \qquad j \in R \text{ met } y_{rj} < 0. \qquad (3.1.75a)$$

Ook voor de $\vec{p}_j$, $j \in R$ met $y_{rj} \geq 0$ geldt:

$$\vec{p}_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}\vec{p}_k \succ \vec{0}.$$

Dit is een gevolg van het feit dat $\vec{p}_j, \vec{p}_k \succ \vec{0}$. Daar de eerste niet nul zijnde component van $\vec{p}_k$ positief is en voor y_{rk} komt (immers $y_{rk} < 0$), geldt dat voor de $j \in R$ met $y_{rj} \geq 0$ de eerste niet nul zijnde, dus positieve, component van $\vec{p}_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}\vec{p}_k$ voor de r^{de} component valt (×)

<u>Er geldt dus:</u>

$$\vec{p}_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}\vec{p}_k \succ \vec{0}, \; j \in R, \; j \neq k \qquad (3.1.76a)$$

Bij de iteraties van de duale simplex methode worden na elke stap de getallen y_{00}, y_{0j}, y_{ij} en de vektor $\vec{y}_0$ getransformeerd volgens de formules op blz. 91 gegeven. We zullen deze grootheden, dus $\vec{p}_0$ en $\vec{p}_j$ bij elke stap van het oplossingsprocédé van de L.P.-problemen beschouwen. Wanneer x_{Br} als basisvariabele door x_k vervangen wordt gaan $\vec{p}_0$, $\vec{p}_j$ over in $\vec{p}_0^{\,*}$, $\vec{p}_j^{\,*}$.

M.b.v. definitie van $\vec{p}_j$ en de transformatieformules op blz. 91 ziet men dat $\vec{p}_j^{\,*}$, $j \in R$, $j \neq k$; gelijk is aan $\vec{p}_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}\vec{p}_k$, behalve voor de r^{de} component.

De r^{de} component van $\vec{p}_j^{\,*}$ is $\frac{y_{rj}}{y_{rk}}$.

Wanneer men (3.1.76), (×) en $\frac{y_{rj}}{y_{rk}} > 0$ als $y_{rj} < 0$ combineert dan ziet men in dat

$$\vec{p}_j^{\,*} \succ \vec{0}, \text{ voor } j \in R,\ j \neq k. \qquad (3.1.77)$$

Laat Br de index s voorstellen dan vervangt s in R de index k en de bijbehorende $\vec{p}_s^{\,*}$ wordt gegeven door:

$$-\frac{1}{y_{rk}} y_{ik} \quad i \neq r, \ \frac{1}{y_{rk}} \text{ voor } i = r. \qquad (3.1.78)$$

Daar $\vec{p}_k$ lexicografisch positief is, is de eerste niet nul zijnde component positief en dit geldt ook voor (3.1.78) omdat $y_{rk} < 0$ en dus niet de eerste niet nul zijnde component van $\vec{p}_k$ is. Dus $\vec{p}_j^{\,*} \succ \vec{0}$ voor alle j in de nieuwe indicesverzameling R^* verkregen uit R door $j = k$ te vervangen door de j die met Br correspondeert.
Verder geldt:

$$\vec{p}_0^{\,*} = \vec{p}_0 - \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \vec{p}_k + \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \vec{e}_r.$$

Nu is $\frac{x_{Br}}{y_{rk}} > 0$ en de eerste positieve component van $\vec{p}_k$ valt voor y_{rk},

dus $$\vec{p}_0^{\,*} - \vec{p}_0 \succ \vec{0}. \qquad (3.1.79)$$

Na elke stap in de duale simplex methode neemt $\vec{p}_0$ lexicografisch af. Dit geldt voor elke stap, dus ook wanneer we overgaan van probleem P_{v-1} op P_v. Immers de componenten van de laatste $\vec{p}_0$ uit P_{v-1} zijn de eerste n+1 componenten van $\vec{p}_0$ waarmee we in P_v starten. Doordat bij elke stap geldt $\vec{p}_0^{\,*} \succ \vec{p}_0$ kan cycling niet optreden wanneer we de L.P.-problemen oplossen.
Zodra er sneden aan (3.1.72) toegevoegd worden (deze worden aan de onderkant toegevoegd) zal het aantal componenten van $\vec{p}_j$ toenemen. Wanneer een verschilvariabele als basisvariabele wordt dan laten we snede behorende bij de verschilvariabele weg. Als we dit doen dan blijven alle $\vec{p}_j \succ \vec{0}$, $j \in R$. Het bewijs geven we niet.
Als tijdens het oplossen van P_v de situatie zich voordoet dat alle $y_{rj} \geq 0$, dan weten we dat het duale probleem een onbegrensde oplossing bezit en het oorspronkelijke probleem geen oplossing (blz. 147). In dit geval bestaat er geen toegelaten oplossing voor (3.1.42).

Ontmoeten we nimmer het geval $y_{rj} \geq 0$, alle $j \in R$ dan zullen we na een eindig aantal stappen een optimale oplossing voor (3.1.42) bereiken. Door het voortdurend toepassen van de duale simplex methode op de problemen P_v krijgen we een rij vektoren $\vec{p}_0$, geef de rij aan door $\{\vec{p}_0(t)\}$. Hierbij neemt t met één toe bij elke uitgevoerde stap van de duale simplex methode. We hebben reeds aangetoond, (3.1.79), dat $\vec{p}_0(t) \succ \vec{p}_0(t+1)$ is. We zullen bewijzen dat de rij $\vec{p}_0(t)$ eindig is. Stel dat de rij $\vec{p}_0(t)$ niet eindig is. Daar $\vec{p}_0(t) \succ \vec{p}_0(t+1)$ geldt $y_{00}(t) \geq y_{00}(t+1)$. We hebben verondersteld dat z van onder begrensd is. Dus de rij getallen $y_{00}(t)$ vormt een monotoon niet stijgende rij die van onder begrensd is. Dus de rij bezit een limiet z^*, zodat elke ε-omgeving van z^* alle getallen $y_{00}(t)$ bevat, op een eindig aantal na. Verder is $z^* \leq y_{00}(t)$, alle t. Laat δ_{00} het grootste gehele getal zijn zodat $\delta_{00} \leq y_{00}(t)$, alle t. We tonen nu aan dat er een t_0 bestaat zodat $y_{00}(t) = \delta_{00}$ voor $t \geq t_0$. Uit de definitie van δ_{00} volgt dat na een zeker t, er geldt $y_{00}(t) = \delta_{00} + f_{00}(t)$, $0 \leq f_{00}(t) < 1$. Stel dat dit geldt wanneer we probleem P_v oplossen. Nadat P_v opgelost is, hebben we

$$y_{00}(t') = \delta_{00} + f_{00}(t'),\ f_{00}(t') \leq f_{00}(t) \qquad (3.1.80)$$

Als $f_{00}(t') \neq 0$, dan, in overeenstemming met de keuzeregel voor de snedes, bepalen we de snede m.b.v. de z-vergelijking. De snede heeft de vorm:

$$\sum_{j \in R(t')} -f_{0j}(t')x_j \leq -f_{00}(t). \qquad (3.1.81)$$

Deze snede wordt dus ingevoerd om P_{v+1} te vormen uit P_v.
De enige negatieve variabele in de begintabel van P_{v+1} is s_{v+1}. Dus in de eerste stap van de duale simplex-methode toegepast op P_{v+1} wordt s_{v+1} niet-basisvariabele en vervangen door x_k. $y_{00}(t'+1)$ wordt gegeven door (zie 2.3.47):

$$y_{00}(t'+1) = y_{00}(t') - \frac{f_{00}(t')}{f_{0k}(t')}\, y_{0k}(t') \qquad (3.1.82)$$

Uit het tweede kriterium van de duale simplex methode ((3.1.75), (3.1.76)) volgt $-f_{0k}(t') < 0$, dus $f_{0k}(t') > 0$. $y_{0k}(t')$ is een $z_k - c_k$ en deze ge-

tallen zijn in de duale simplex methode altijd ≥ 0. Dus $y_{0k}(t') \geq 0$.
Er geldt $y_{0k}(t') = \delta_{0k}(t') + f_{0k}(t')$, $\delta_{0k}(t')$ is grootste gehele getal kleiner dan $y_{0k}(t')$. Daar $f_{0k}(t') > 0$ en $y_{0k}(t') \geq 0$ geldt dus $y_{0k}(t') > 0$. (Als $y_{0k}(t') = 0$ dan is ook $f_{0k}(t') = 0$, tegenspraak.)
Daar $y_{0k}(t') > 0$ volgt uit de definitie van $\delta_{0k}(t')$ dat $\delta_{0k}(t') \geq 0$.
Hetgeen impliceert: $y_{0k}(t') \geq f_{0k}(t')$.
Uit (3.1.82) volgt dan:

$$y_{00}(t'+1) \leq y_{00}(t') - f_{00}(t') = \delta_{00}. \qquad (3.1.83)$$

Altijd geldt $\delta_{00} \leq y_{00}(t)$, alle t.
Dus $y_{00}(t) = \delta_{00}$ voor $t \geq t'+1$.
De eerste component van $\vec{p}_0(t)$ is dus vast en geheel voor $t \geq t'+1$. De kriteriumfunctie is dan geheelwaardig geworden en heeft zijn maximumwaarde bereikt. Bij elke volgende stap blijft deze waarde van z ongewijzigd. Wanneer bij een volgende stap x_s basisvariabele wordt dan wordt x_s positief (geldt altijd bij duale simplex methode, $x_{Br}^* = \frac{x_{Br}}{y_{rk}} > 0$, omdat $x_{Br} < 0$, $y_{rk} < 0$) dan moet dus gelden $y_{0s}(t) = 0$, anders zou z veranderen. Stel nu dat de basisvariabele in de eerste vergelijking na de z-vergelijking niet geheel is, als z de waarde δ_{00} bereikt. Als we nu overgaan van probleem P_v naar P_{v+1} dan bepalen we m.b.v. deze vergelijking de snede en wel net zolang totdat de basisvariabele geheel geworden is.
Als nu x_s basisvariabele wordt dan geldt $y_{1s}(t) \neq 0$, en daar $y_{0s}(t) = 0$ en $\vec{p}_s \succ \vec{0}$ geldt dus $y_{1s}(t) > 0$. Verder is $\vec{p}_0(t) \succ \vec{p}_0(t+1)$. Na $t'+1$ is de eerste component van $\vec{p}_0(t)$ steeds δ_{00}, dus de tweede component van $\vec{p}_0(t)$ vormt een monotoon niet stijgende rij die begrensd van onder is. Analoog toont men nu aan dat de tweede component van $\vec{p}_0(t)$ geheel wordt na een eindig aantal stappen. Zo voortgaand toont men aan dat elke component van $\vec{p}_0(t)$ in een eindig aantal stappen geheel wordt. De vektoren $\vec{p}_i(t)$ hebben slechts een eindig aantal componenten. Dus na een eindig aantal stappen verkrijgen we een optimale oplossing voor (3.1.42) of we vinden dat er geen toegelaten oplossing voor (3.1.42) bestaat.
De voorgaande procedure om een optimale oplossing in een eindig aantal stappen te verkrijgen is in de praktijk moeilijk hanteerbaar. Voor prak-

tische doeleinden past men dan ook de procedure toe beschreven op blz. 182. Ook deze laatste procedure stelt ons in het algemeen niet in staat om een probleem van realistische omvang in een redelijk snelle tijd op te lossen. Er zijn problemen van de vorm (3.1.42) aangepakt, waarvan de oplossing van L.P.(3.1.42) in 20 stappen bereikt was, maar na 2000 stappen nog geen toegelaten oplossing voor (3.1.42).

Algorithme voor het gemengde L.P.-probleem

Gomory's algorithme om discrete L.P.-problemen op te lossen hebben we gegeven. Gomory heeft ook een algorithme ontwikkeld om gemengde L.P.-problemen op te lossen. J uit (3.1.42) bevat nu dus niet alle j. Om het gemengde L.P.-probleem op te lossen beginnen we met het oplossen van L.P.(3.1.43). Als de gevonden optimale basisoplossing van L.P.(3.1.43) toegelaten is voor (3.1.42) dan is de oplossing optimaal voor (3.1.42). Als de oplossing niet toegelaten is, dan brengen we een snede aan. De snedes worden op een andere wijze bepaald dan in het discrete geval. We zullen een aantal verschillende bijvoorwaarden afleiden, die elk als snede kunnen worden aangebracht.
Laat $\vec{y}_0$ de gevonden optimale basisoplossing van L.P.(3.1.43) zijn. Elke toegelaten oplossing van (3.1.42) is te schrijven als:

$$\vec{x}_\beta = \vec{y}_0 - \sum_{j \in R} \vec{y}_j x_j$$

$\vec{x}_\beta$ bevat de basisvariabelen van $\vec{y}_0$, R is de verzameling van de indices j behorende bij de niet-basisvariabelen.
Stel dat y_{u0} niet geheel is, maar geheel behoort te zijn in elke toegelaten oplossing van (3.1.42). Beschouw dan:

$$x_{\beta u} = y_{u0} - \sum_{j \in R} y_{uj} x_j \qquad (3.1.83)$$

We stellen $y_{u0} = \delta_{u0} + f_{u0}$, waarbij δ_{u0} het grootste gehele getal kleiner dan y_{u0}. Er geldt dus $0 < f_{u0} < 1$.
Voor elke toegelaten oplossing van (3.1.42) is

$$f_{u0} - \sum_{j \in R} y_{uj} x_j = \text{geheel} = x_{\beta u} - \delta_{u0} \qquad (3.1.84)$$

Laat R_+ de deelverzameling van R zijn met $y_{uj} \geq 0$, R_- de verzameling van de indices j uit R met $y_{uj} < 0$.
Voor $\sum_{j\in R} y_{uj}x_j$ zijn twee mogelijkheden: $\sum_{j\in R} y_{uj}x_j \geq 0$ of $\sum_{j\in R} y_{uj}x_j < 0$.

1e geval: $\sum y_{uj}x_j \geq 0$.
Voor elke toegelaten oplossing van (3.1.42) is $\sum_{j\in R} y_{uj}x_j - f_{u0}$ geheel, verder $0 < f_{u0} < 1$, dus

$$\sum_{j\in R} y_{uj}x_j = \delta + f_{u0} \qquad (3.1.85)$$

met $\delta = 0$ of 1, of 2,...

Daar $\delta \geq 0$ volgt uit (3.1.85)

$$\sum_{j\in R} y_{uj}x_j \geq f_{u0}$$

Nu is $\sum_{j\in R} y_{uj}x_j = \sum_{j\in R_+} y_{uj}x_j + \sum_{j\in R_-} y_{uj}x_j$.
Uit de definitie van R_- volgt $\sum_{j\in R_-} y_{uj}x_j \leq 0$, dus voor elke toegelaten oplossing van (3.1.42) geldt:

$$\sum_{j\in R_+} y_{uj}x_j \geq f_{u0} \qquad (3.1.86)$$

2e geval: $\sum_{j\in R} y_{uj}x_j < 0$

Uit (3.1.84) volgt dan:

$$\sum_{j\in R} y_{uj}x_j = f_{u0} - \delta$$

met $\delta = 1$, of 2, of 3,...

Hetgeen impliceert dat voor elke toegelaten oplossing van (3.1.42) geldt:

$$\sum_{j\in R_+} y_{uj}x_j + \sum_{j\in R_-} y_{uj}x_j \leq f_{u0} - 1$$

en, daar $\sum_{j\in R_+} y_{uj}x_j \geq 0$,

$$\sum_{j\in R_-} y_{uj}x_j \leq f_{u0} - 1 \qquad (3.1.87)$$

Vermenigvuldig (3.1.87) met het negatieve getal $\frac{f_{u0}}{f_{u0} - 1}$ en bedenk voor $j \in R_-$ is $y_{uj} < 0$, dus $-y_{uj} = |y_{uj}|$.

Dit geeft: $$\sum_{j\in R_-} \frac{f_{u0}}{1 - f_{u0}} |y_{uj}| x_j \geq f_{u0} \qquad (3.1.88)$$

Combineer (3.1.86) en (3.1.88), dan geldt zowel voor geval 1 als geval 2, dat elke toegelaten oplossing van (3.1.42) voldoen moet aan:

$$\sum_{j\in R_+} y_{uj}x_j + \sum_{j\in R_-} \frac{f_{u0}}{1 - f_{u0}} |y_{uj}| x_j \geq f_{u0} \qquad (3.1.89)$$

immers de termen uit het linkerlid van (3.1.89) zijn beiden niet-negatief, en minstens één van beiden is groter dan of gelijk aan f_{u0}.

De gevonden optimale basisoplossing van L.P.(3.1.43) $\vec{y}_0 = B^{-1}\vec{b}$, $\vec{x}_R = \vec{0}$ voldoet niet aan (3.1.89), daar $f_{u0} > 0$.

Men kan (3.1.89) dus als snede gebruiken.

Bij de afleiding van deze snede hebben we alleen gebruikt dat $x_{\beta u}$ geheel moet zijn. Wanneer meer x_j, $j \in R$ geheel moeten zijn dan kunnen we een andere snede bepalen, die mogelijk "beter" is. Beschouw de $x_j, j \in R \cap J$. Voor $j \in R \cap J$ stellen we $y_{uj} = \delta_{uj} + f_{uj}$, δ_{uj} is het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan y_{uj}. Er geldt dan $0 \leq f_{uj} < 1$.

Laat R^* de verzameling van de indices j uit R zijn die niet tot $R \cap J$ behoren.

Nu is $f_{u0} - \sum_{j\in R} y_{uj}x_j = f_{u0} - \sum_{j\in R\cap J} d_{uj}x_j - \sum_{j\in R\cap J} f_{uj}x_j - \sum_{j\in R^*} y_{uj}x_j$.

$\sum d_{uj}x_j$ is geheel voor elke toegelaten oplossing van (3.1.42), en nu volgt uit (3.1.84) dat voor elke toegelaten oplossing van (3.1.42):

$$f_{u0} - \sum_{j\in R\cap J} f_{uj}x_j - \sum_{j\in R^*} y_{uj}x_j = \text{geheel}. \qquad (3.1.90)$$

Verder is $\sum_{j \in R \cap J} f_{uj} x_j \geq 0$. Laat R_+^* en R_-^* de deelverzamelingen van R^* zijn met $y_{uj} \geq 0$ resp. $y_{uj} < 0$.
Onderscheid wederom:

Geval 1: $\sum_{j \in R^*} y_{uj} x_j \geq 0$.

Voor elke toegelaten oplossing van (3.1.42) geldt:

$$\sum_{j \in R^*} y_{uj} x_j + \sum_{j \in R \cap J} f_{uj} x_j = \delta + f_{u0}.$$

Het linkerlid is groter dan of gelijk aan 0, verder $0 < f_{u0} < 1$, dus $\delta = 0$, of 1, of 2,...
Waaruit volgt $\sum_{j \in R_+^*} y_{uj} x_j + \sum_{j \in R \cap J} f_{uj} x_j \geq f_{u0}$.

Geval 2: $\sum_{j \in R^*} y_{uj} x_j < 0$.

Nu geldt voor elke toegelaten oplossing van (3.1.42):

$$\sum_{j \in R^*} y_{uj} x_j = f_{u0} - \left(\sum_{j \in R \cap J} f_{uj} x_j + \delta \right)$$

met $\delta = 1$, of 2,...

Dus $\sum_{j \in R^*} y_{uj} x_j \leq f_{u0} - 1$,

waaruit men analoog als in vorige geval 2 afleidt:

$$\sum_{j \in R_-^*} \frac{f_{u0}}{1 - f_{u0}} |y_{uj}| x_j \geq f_{u0}$$

Zodat we kunnen concluderen dat elke toegelaten oplossing van (3.1.42) moet voldoen aan:

$$\sum_{j \in R \cap J} f_{uj} x_j + \sum_{j \in R_+^*} y_{uj} x_j + \sum_{j \in R_-^*} \frac{f_{u0}}{1 - f_{u0}} |y_{uj}| x_j \geq f_{u0} \qquad (3.1.91)$$

De gevonden optimale basisoplossing van L.P.(3.1.43) voldoet niet aan (3.1.90). We zien dus dat (3.1.90) een andere snede is die we kunnen aanbrengen.

Een derde manier om een snede te verkrijgen is de volgende. Laat δ_{uj}^* het kleinste gehele getal groter dan y_{uj} zijn. Er geldt dan $y_{uj} = \delta_{uj}^* - (1 - f_{uj})$. We schrijven y_{uj} in deze vorm voor $j \in R \cap J$. Analoog aan (3.1.90) leidt men af:

$$f_{u0} + \sum_{j \in R \cap J} (1 - f_{uj})x_j - \sum_{j \in R}^{*} y_{uj}x_j = \text{geheel} \quad (3.1.92)$$

voor elke toegelaten oplossing van (3.1.42).

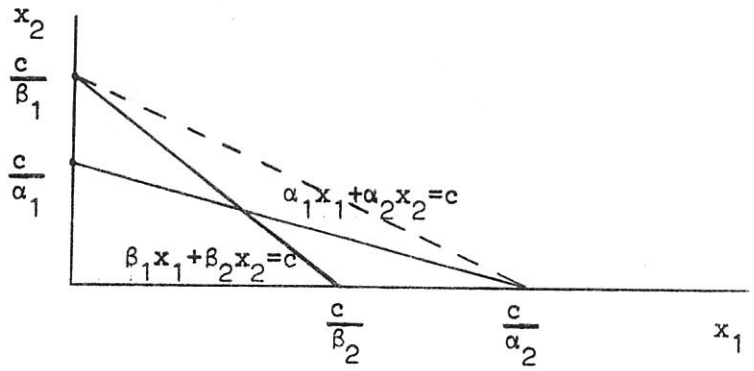
Verder is $- \sum_{j \in R \cap J} (1 - f_{uj})x_j \leq 0$.

Op dezelfde wijze waarop (3.1.91) afgeleid is, vindt men dat elke toegelaten oplossing van (3.1.42) voldoen moet aan:

$$\sum_{j \in R_+}^{*} y_{uj}x_j + \sum_{j \in R_-}^{*} \frac{f_{u0}}{1 - f_{u0}} |y_{uj}| x_j + \sum_{j \in R \cap J} \frac{f_{u0}}{1 - f_{u0}} (1 - f_{uj})x_j \geq f_{u0} \quad (3.1.93)$$

De gevonden optimale basisoplossing van L.P.(3.1.43) voldoet niet aan (3.1.93). We hebben hiermee een derde snede gevonden, die aangebracht kan worden. Wanneer we de afleiding van de laatste twee snedes en de snedes zelf nader beschouwen, dan opent zich mogelijkheid om nog een snede af te leiden.

Men ziet dat de snedes (3.1.91) en (3.1.93) alléén verschillen in de coëfficiënten van x_j, $j \in R \cap J$. Nu is $f_{uj} \leq \frac{f_{u0}}{1 - f_{u0}} (1 - f_{uj})$ alléén dan als $f_{uj} \leq f_{u0}$. Als we (3.1.91) en (3.1.93) combineren door als coëfficiënt van x_j, $j \in R \cap J$ de kleinste van de getallen f_{uj} en $\frac{f_{u0}}{1 - f_{u0}} (1 - f_{uj})$ te nemen, dan vinden we een nieuwe snede. De bij deze nieuwe snede (= geometrisch een halfruimte) behorend begrenzend hypervlak snijdt meer van de x_j-assen, $j \in R \cap J$, af dan de begrenzende hypervlakken behorende bij de snedes (3.1.91) en (3.1.93). Geometrisch ziet men dit eenvoudig in aan een voorbeeld in de E^2. Laten de twee snedes $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \geq c$, $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \geq c$ zijn, waarbij $c, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$.



$\max(\frac{c}{\beta_i},\frac{c}{\alpha_i})$ wordt bepaald door $\min(\beta_i,\alpha_i)$.

Men toont eenvoudig aan dat elke toegelaten oplossing van (3.1.42) aan de nieuwe snede voldoet, en dat de gevonden optimale basisoplossing van L.P.(3.1.43) niet voldoet. Men kan deze nieuwe snede namelijk afleiden door voor $j \in R \cap J$ te stellen $y_{uj} = \delta_{uj} + f_{uj}$ als $f_{uj} \leq f_{u0}$, en $y_{uj} = \delta^*_{uj} - (1 - f_{uj})$ te stellen als $f_{uj} > f_{u0}$.
Stel $\Pi_1 = \{j \mid j \in R \cap J,\ f_{uj} \leq f_{u0}\}$,

$\Pi_2 = \{j \mid j \in R \cap J,\ f_{uj} > f_{u0}\}$. $\Pi_1 \cup \Pi_2 = R \cap J$.

Dan wordt:

$$f_{u0} - \sum_{j\in R} y_{uj}x_j = f_{u0} - \sum_{j\in\Pi_1} (\delta_{uj} + f_{uj})x_j - \sum_{j\in\Pi_2} \{\delta^*_{uj} - (1 - f_{uj})\}x_j + \sum_{j\in R^*} y_{uj}x_j.$$

Daar δ_{uj}, δ^*_{uj} en x_j voor $j \in R \cap J$ geheel zijn volgt m.b.v. (3.1.84) dat voor elke toegelaten oplossing van (3.1.42) geldt:

$$f_{u0} - \sum_{j\in\Pi_1} f_{uj}x_j + \sum_{j\in\Pi_2} (1 - f_{uj})x_j + \sum_{j\in R^*} y_{uj}x_j = \text{geheel}.$$

Door analoog te werk te gaan als bij de afleiding van de snedes (3.1.91) en (3.1.93) vindt men de nieuwe snede:

$$\sum_{j \in R} d_{uj} x_j \geq f_{u0} \qquad (3.1.94)$$

met

$$d_{uj} = \begin{cases} y_{uj}, \; j \in R_+^* \\ \dfrac{f_{u0}}{1 - f_{u0}} |y_{uj}|, \; j \in R_-^* \\ f_{uj}, \; j \in R \cap J, \; f_{uj} \leq f_{u0} \\ \dfrac{f_{u0}}{1 - f_{u0}} (1 - f_{uj}), \; j \in R \cap J, \; f_{uj} > f_{u0} \end{cases} \qquad (3.1.95)$$

Het is gebruikelijk om (3.1.94) te schrijven als:

$$\sum_{j \in R} (-d_{uj}) x_j \leq -f_{u0} \qquad (3.1.96)$$

Deze laatste snede is de beste van de gegeven snedes.
Wanneer eenmaal een snede bepaald is, dan bepaalt men de oplossing van het gemengde L.P.-probleem precies op dezelfde wijze als bij het discrete L.P.-probleem. We lossen steeds een nieuw L.P.-probleem op. We merken op dat (3.1.96) ook als snede gebruikt kan worden in het discrete geval.
Onder bepaalde voorwaarden kan men ook voor het gemengde L.P.-probleem aantonen dat de optimale oplossing in een eindig aantal stappen bereikt wordt.
We geven tenslotte een voorbeeld.

$$\begin{aligned} &\max z = 0{,}25x_1 + x_2 \\ &\text{onder} \\ &0{,}50x_1 + x_2 \leq 1{,}75 \\ &x_1 + 0{,}30x_2 \leq 1{,}50 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \\ &x_1, x_2 \text{ geheel.} \end{aligned} \qquad (3.1.97)$$

Dit is een gemengd L.P.-probleem, daar de verschilvariabelen, die we invoeren om de bijvoorwaarden in vorm $A\vec{x} = \vec{b}$ te brengen, niet geheelwaardig behoeven te zijn.

Na invoeren van de verschilvariabelen wordt het probleem:

$$\max z = 0{,}25x_1 + x_2$$

onder

$$\begin{aligned} 0{,}50x_1 + x_2 + x_3 &= 1{,}75 \\ x_1 + 0{,}30x_2 + x_4 &= 1{,}50 \qquad (3.1.98) \\ x_i \geq 0 \quad (i &= 1, \ldots, 4) \\ x_1, x_2 &\text{ geheel.} \end{aligned}$$

Om dit gemengde L.P.-probleem op te lossen, laten we de voorwaarde x_1, x_2 geheel weg en lossen eerst het verkregen L.P.-probleem op.

Begintabel L.P.(3.1.98), tabel 1

			0,25	1	0	0	
$\vec{c}_B$	B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	1,75	0,50	1	1	0	←
0	x_4	1,50	1	0,30	0	1	
$z_j - c_j$		0	-0,25	-1	0	0	
			↑				

Optimale oplossing L.P.(3.1.98), tabel 2

			0,25	1	0	0
$\vec{c}_B$	B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_2	1,75	0,50	1	1	0
0	x_4	0,975	0,85	0	-0,30	1
z_j-c_j	X	1,75	0,25	0	1	0

In de gevonden optimale basisoplossing van L.P.(3.1.98) is x_2 niet geheel. Dus we moeten een snede bepalen die we aan L.P.(3.1.98) toevoegen, en dan het verkregen L.P.-probleem P_1 oplossen. We brengen een snede van de vorm (3.1.96) aan.
We gaan eerst na welke indices in de verschillende indexverzamelingen bevat zijn.
$J = \{1,2\}$, $R = \{1,3\}$. Waaruit $R \cap J = \{1\}$, $R^* = \{3\}$.
Nu is x_2 niet geheel in de gevonden optimale basisoplossing, terwijl x_2 geheel moet zijn. Om de snede te bepalen beschouwen we vgl.(3.1.83), dit betekent in ons geval dat u = 1 en dat we de eerste rij in tabel 2 beschouwen. R_+^*, R_-^* zijn de deelverzamelingen van R^* met $y_{1j} \geq 0$, resp. $y_{1j} < 0$. $R^* = \{3\}$. Uit tabel 2: $y_{13} = 1 > 0$. Hetgeen impliceert $R_+^* = \{3\}$, $R_-^* = \phi$, $d_{13} = 1$.
Daar $y_{10} = 1,75$ geldt $f_{10} = 0,75$. $1 \in R \cap J$, nu is $f_{11} = 0,50$ daar $y_{11} = 0,50$. Omdat $f_{11} < f_{10}$, geldt $d_{11} = f_{11} = 0,50$.
We hebben dus $f_{10} = 0,75$, $d_{11} = 0,50$, $d_{13} = 1$.
We kunnen nu de snede geven:

$$-0,50x_1 - x_3 \leq -0,75 \qquad (3.1.99a)$$

Na toevoegen van de verschilvariabele s_1:

$$-0,50x_1 - x_3 + s_1 = -0,75. \qquad (3.1.99)$$

We voegen (3.1.99) toe aan L.P.(3.1.98), dit geeft het L.P.-probleem P_1. P_1 lossen we op m.b.v. de duale simplex methode. Om dit uit te voeren voegen we aan tabel 2 een rij en een kolom toe.

Begintabel van P_1, tabel 3

			0,25	1	0	0	0	
$\vec{c}_B$	B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	
1	x_2	1,75	0,50	1	1	0	0	
0	x_4	0,975	0,85	0	-0,30	1	0	
0	s_1	-0,75	-0,50	0	-1	0	1	← $\min(x_{Bi}, x_{Bi}<0)$
z_j-c_j	X	1,75	0,25	0	1	0	0	
			↑					

Eerste verbeterde oplossing van P_1, tabel 4

			0,25	1	0	0	0	
$\vec{c}_B$	B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	
1	x_2	1	0	1	0	0	1	
0	x_4	-0,30	0	0	-2	1	1,70	←
0,25	x_1	1,50	1	0	2	0	-2	
z_j-c_j	X	1,375	0	0	0,50	0	0,50	
					↑			

Optimale oplossing van P_1, tabel 5

			0,25	1	0	0	0
$\vec{c}_B$	B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1
1	x_2	1	0	1	0	0	1
0	x_3	0,15	0	0	1	-0,50	-0,85
0,25	x_1	1,20	1	0	0	1	-0,30
z_j-c_j		1,30	0	0	0	0,25	0,925

In de optimale basisoplossing van P_1 is x_2 geheel maar x_1 niet. We moeten dus opnieuw een snede aanbrengen. $J = \{1,2\}$. Nu is $R = \{4,5\}$. Index 5 slaat op s_1. Dus $R \cap J = \phi$, $R^* = \{4,5\}$. Om de snede te bepalen beschouwen we de x_1-rij, $u = 3$.

Uit tabel 5: $y_{34} = 1 > 0$, $y_{35} = -0,30 < 0$. Dus $R_+^* = \{3\}$, $R_-^* = \{5\}$.

Verder zien we uit de tabel $y_{30} = 1,20$, dus $f_{30} = 0,20$.

Volgens (3.1.95): $d_{34} = 1$, $d_{35} = \frac{0,20}{1 - 0,20}\, 0,30 = 0,075$.

Verder is $R \cap J = \phi$.

De nieuwe snede heeft de vorm:

$$-x_4 - 0,075s_1 \leq -0,20. \qquad (3.1.100a)$$

We voegen (3.1.100) aan P_1 toe, dit geeft het L.P.-probleem P_2. P_2 lossen we op volgens de duale simplex methode.

Begintabel voor P_2, tabel 6

			0,25	1	0	0	0	0	
$\vec{c}_B$	B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
1	x_2	1	0	1	0	0	1	0	
0	x_3	0,15	0	0	1	-0,50	-0,85	0	
0,25	x_1	1,20	1	0	0	1	-0,30	0	
0	s_2	-0,20	0	0	0	-1	-0,075	1	←
z_j-c_j	X	1,30	0	0	0	0,25	0,925	0	
						↑			

Optimale oplossing voor P_2, tabel 7

$\vec{c}_B$	B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2
1	x_2	1	0	1	0	0	1	0
0	x_3	0,25	0	0	1	0	-0,8125	-0,50
0,25	x_1	1	1	0	0	0	-0,375	1
0	x_4	0,20	0	0	0	1	0,075	-1
z_j-c_j	X	1,25	0	0	0	0	0,90625	0,25

In de gevonden optimale basisoplossing van P_2 zijn x_1 en x_2 beiden geheel, dus deze oplossing $x_1 = x_2 = 1$, $z = 1,25$ is een optimale oplossing voor het gemengde L.P.-probleem (3.1.97). In dit voorbeeld gaf het

algorithme ons snel een optimale oplossing, slechts twee problemen P_v behoefden opgelost te worden. Niettemin was de hoeveelheid rekenwerk ongeveer vier maal de hoeveelheid nodig om L.P.(3.1.98) op te lossen. We zullen tenslotte de snedes grafisch interpreteren. Beschouw eerst de snede (3.1.99a). We elimineren x_3 uit deze snede m.b.v. de eerste voorwaarde uit (3.1.98), dit geeft

$$-0{,}50x_1 - 1{,}75 + 0{,}50x_1 + x_2 \leq -0{,}75$$

$$\text{of} \qquad x_2 \leq 1 \qquad (3.1.101)$$

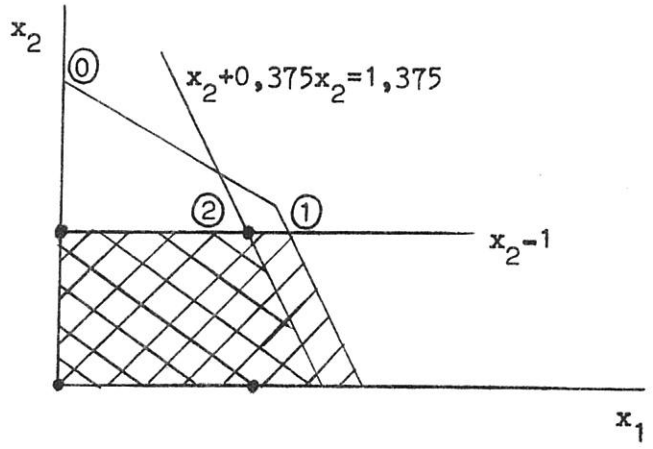
De snede (3.1.99a) is dus equivalent met $x_2 \leq 1$. De snede (3.1.99a) reduceert de verzameling van toegelaten oplossingen van L.P.(3.1.98) tot het //// gearceerde gebied.

Beschouw vervolgens de snede (3.1.100a). Uit (3.1.99) volgt $s_1 = -0{,}75 + 0{,}50x_1 - x_3$ en m.b.v. de eerste voorwaarde uit (3.1.98) volgt $s_1 = 1 - x_2$. Uit de tweede voorwaarde van (3.1.98) volgt $x_4 = 1{,}50 - x_1 - 0{,}30x_2$. Dus snede (3.1.100a) is equivalent met

$$-1{,}50 + x_1 + 0{,}30x_2 - 0{,}075 + 0{,}075x_2 \leq -0{,}20$$

$$\text{of} \qquad x_1 + 0{,}375x_2 \leq 1{,}375.$$

Snede (3.1.100a) reduceert het //// tot het XXXX gearceerde gebied. De punten waarin de optimale oplossingen van P_0, P_1 en P_2 aangenomen worden zijn aangegeven door ⓪, ① en ②, resp.



Hoofdstuk IV. Kwadratische programmering

1. Inleiding

Een optimalisatieprobleem is een probleem waarbij men een functie van één of meer variabelen (of functies) maximaliseert of minimaliseert, waarbij de variabelen (of functies) onafhankelijk zijn òf door bijvoorwaarden op een zekere wijze met elkaar verbonden zijn. Bepaalde optimalisatieproblemen kan men oplossen m.b.v. de klassieke methoden, zoals differentiaalrekening en variatierekening. Maar er is een grote klasse van optimalisatieproblemen die in het algemeen niet met behulp van de klassieke methoden op te lossen zijn. Deze problemen noemt men vaak programmeringsproblemen. De eenvoudigste typen hebben we reeds ontmoet, nl.

$$\max z = \vec{c}\vec{x}$$

$$\text{onder } A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\vec{x} \geq \vec{0}$$

$$x_j \text{ geheel, } j \in J_1.$$

Als J_1 leeg is, dan spreken we van een L.P.-probleem, als J_1 niet leeg is dan hebben we met een gemengd L.P.-probleem te maken.
Het algemene programmeringsprobleem luidt als volgt:

maximaliseer (of minimaliseer)

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) \qquad (4.1.1)$$

onder

$$g_i(x_1, \ldots, x_n)\{\leq = \geq\}b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \qquad (4.1.2)$$

Hierbij zijn aan m en n geen eisen opgelegd.
Gewoonlijk zullen sommige of alle variabelen x_j niet-negatief moeten zijn. We kunnen aan (4.1.2) ook nog de voorwaarden toevoegen, die inhouden dat sommige x_j alléén bepaalde waarde aannemen mogen.
Elk programmeringsprobleem dat niet een L.P.-probleem is noemen we een niet-lineair programmeringsprobleem.

Niet-lineaire programmeringsproblemen zijn bijna altijd lastiger op te lossen dan L.P.-problemen. Slechts voor een kleine klasse van niet-lineaire programmeringsproblemen zijn methoden ontworpen, die ons in staat stellen een optimale oplossing te berekenen. In het hierna volgende zullen we aannemen dat de optredende variabelen niet beperkt zijn tot discrete waarden, tenzij we het anders aangeven.
De klasse van niet-lineaire programmeringsproblemen waarin de bijvoorwaarden lineair zijn en de objectfunctie niet-lineair is, is het meest uitgebreid bestudeerd. Het algemene probleem uit deze klasse is te schrijven als

$$\max \text{ of } \min\ z = f(x_1, \ldots, x_n) \qquad (4.1.3)$$

onder

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \{\leq = \geq\} b_i, \quad (i = 1, \ldots, m) \qquad (4.1.4)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Tot nu toe heeft men alléén een oplossingsmethode gevonden voor dit soort problemen als de objectfunctie z speciale eigenschappen bezit. We zullen twee speciale gevallen van (3.1.3) aangeven:

1. De objectfunctie is te schrijven als een som van n functies, die elk een functie van één variabele zijn, d.w.z.

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \qquad (4.1.5)$$

In dit geval zegt men dat de objectfunctie <u>separabel</u> is.
Om er voor te zorgen dat een optimale oplossing gevonden kan worden moet men nog verdere eisen aan de functies $f_j(x_j)$ opleggen. Op dit type problemen gaan we niet nader in. Wel zullen we het volgende speciale geval van (4.1.3)-(4.1.4) behandelen:

2. De objectfunctie is een som van een lineaire en een kwadratische vorm, d.w.z.

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j \qquad (4.1.6)$$

Een dergelijk niet-lineair programmeringsprobleem noemt men een kwadratisch programmeringsprobleem. Opdat in dit geval een optimale oplossing gevonden kan worden, moeten de getallen d_{ij} aan bepaalde eisen voldoen.

De basisideëen voor de oplossingsmethode van het kwadratische programmeringsprobleem leren we kennen, als we de klassieke optimalisatieproblemen nader beschouwen. De klassieke optimalisatieproblemen verkrijgen we uit (4.1.1)-(4.1.2) als we onderstellen a) in de bijvoorwaarden treden geen ongelijkheden op, b) de variabelen zijn niet beperkt tot niet-negatieve of discrete waarden, c) $m < n$, d) de functies $g_i(x_1,\ldots, x_n)$ en $f(x_1,\ldots, x_n)$ zijn continu en bezitten partiële afgeleiden van tenminste de tweede orde.

Het klassieke optimalisatieprobleem wordt dus gegeven door

$$\begin{aligned} &\max \text{ of } \min\ z = f(x_1,\ldots, x_n) \\ &\text{onder} \qquad\qquad (4.1.7) \\ &g_i(x_1,\ldots, x_n) = b_i,\ (i = 1,\ldots, m;\ m < n) \end{aligned}$$

In principe kan men deze problemen m.b.v. de klassieke optimalisatietechnieken oplossen. In het algemeen is het echter ondoenlijk om op deze manier een numerieke oplossing te bepalen.

De klassieke optimalisatiemethoden kunnen gegeneraliseerd worden voor het geval de variabelen niet-negatief zijn en de bijvoorwaarden ongelijkheden kunnen zijn. De theoretische resultaten die we bij de afleiding van de klassieke optimalisatiemethoden en de generalisaties hiervan vinden, zullen ons indirect een methode geven om een optimale oplossing te berekenen voor het kwadratische programmeringsprobleem. Voor we de klassieke optimalisatiemethoden behandelen zullen we eerst enkele definities en stellingen memoreren betreffende reële functies van meer variabelen.

Def. 4.1.1. Laat $f(\vec{x}) = f(x_1,\ldots, x_n)$ een reële functie op een open verzameling V in de E^n zijn. Onder de partiële afgeleide naar x_j in het punt $\vec{x}^0$ van V verstaan we (als deze bestaat)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j^0 + h, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{e}_j) - f(\vec{x}_0)}{h} \qquad (4.1.8)$$

Notaties: $\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_j}$, $(\frac{\partial f}{\partial x_j})_{\vec{x}_0}$, $f_{x_j}(\vec{x}_0)$, $D_j f(\vec{x}_0)$

Def. 4.1.2. De reële functie $f(\vec{x})$ heet differentieerbaar op een open verzameling V van de E_n, indien er op V n functies $A_j(\vec{x})$, $j = 1, \ldots, n$, bestaan, zó dat voor elke $\vec{x} \in V$ geldt:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{n} A_j(\vec{x})h_j + o(|\vec{h}|) \quad \text{als} \quad |\vec{h}| \to 0$$

Zoals bekend gelden de volgende stellingen:

Stelling 4.1.1. Als $f(\vec{x})$ differentieerbaar op V dan is $f(\vec{x})$ continu op V en verder bestaan $D_j f(\vec{x})$ op V, waarbij $D_j f(\vec{x}) = A_j(\vec{x})$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Stelling 4.1.2. Als van een functie $f(\vec{x})$ alle partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ bestaan en continu zijn op een open verzameling V van de E_n dan is $f(\vec{x})$ differentieerbaar op V.

Als een functie $f(\vec{x})$ continu is op een deelverzameling van de E_n, dan geven we dit aan door de notatie $f(\vec{x}) \in C$.
Bestaan tevens de partiële afgeleiden van f en zijn deze continu dan geven we dit weer door $f(\vec{x}) \in C^1$.
Uit stelling (4.1.2) volgt dat $f(\vec{x})$ differentieerbaar is in x als $f(\vec{x}) \in C^1$.

Def. 4.1.3. Als $f(\vec{x}) \in C^1$ voor een zekere deelverzameling van de E^n dan kunnen we voor elk punt $\vec{x}$ in deze deelverzameling de n-component **kolomvektor** ∇f definiëren door

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}). \qquad (4.1.5)$$

∇f heet de gradiënt vektor van f.

Onder $\nabla f(\vec{x}_0)$ verstaan we natuurlijk $\left(\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n}\right)$.

Elk van de partiële afgeleiden van f naar x_j $(j = 1, \ldots, n)$ is weer een functie van n variabelen, en van elk van deze functies kunnen we de partiële afgeleiden vormen als ze bestaan. Dit geeft dan de functies

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = D_{ij} f(\vec{x}).$$

$f \in C^2$ als alle partiële afgeleiden van de tweede orde continu zijn.

Voor de partiële afgeleiden van de tweede orde geldt de volgende stelling:

Stelling 4.1.3. Als $f \in C^2$ voor een zekere deelverzameling van de E^n, dan geldt voor elk punt $\vec{x}$ van deze deelverzameling

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{alle } i,j.$$

De n^2 partiële afgeleiden van f kunnen beschouwd worden als de elementen van een $n \times n$ matrix $H_f = \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right)$. H_f heet de Hessian matrix voor f. Als $f \in C^2$ dan is H_f symmetrisch.

Kettingregel. Veronderstel dat elke variabele x_j $(j = 1, \ldots, n)$ in de functie $f(\vec{x})$ een functie van m variabelen y_i is, dus $x_j = \phi_j(y_1, \ldots, y_m) = \phi_j(\vec{y})$. In dit geval heet f een samengestelde functie, in werkelijkheid is $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ een functie van $y_1, \ldots, y_m$.

Stelling 4.1.4. Laat $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ differentieerbaar zijn op een open verzameling V in de E_n en $x_j = \phi_j(y_1, \ldots, y_m)$ differentieerbaar op een open W in de E_m. $(j = 1, \ldots, n)$. Stel $(x_1, \ldots, x_n) \in V$ als $(y_1, \ldots, y_m) \in W$.

Dan is $z = f[\phi_1(\vec{y}), \ldots, \phi_n(\vec{y})]$ differentieerbaar op W en er geldt

$$\frac{\partial z}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \quad (j = 1, \ldots, m) \qquad (4.1.10)$$

Bij het bepalen van $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ beschouwen we f als een functie van $x_1, \ldots, x_n$.

Reeksontwikkeling van Taylor

We geven deze reeksontwikkeling voor het geval $f \in C^1$ en voor het geval $f \in C^2$ voor een open convexe verzameling in de E^n. (X convex, d.w.z. als $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ dan ook $\lambda\vec{x}_1 + (1 - \lambda)\vec{x}_2 \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$).
Deze stellingen zijn directe generalisaties van de stellingen voor reële functies van één variabele.

Stelling 4.1.5a. Als $f(\vec{x}) \in C^1$ voor een open convexe verzameling V in de E_n dan bestaat bij elk tweetal punten $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ een getal θ, $0 \leq \theta \leq 1$, zodat

$$f(\vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)' \cdot \nabla f[\theta\vec{x}_1 + (1 - \theta)\vec{x}_2] \qquad (4.1.11)$$

Stelling 4.1.5b. Als $f(\vec{x}) \in C^2$ voor een open convexe verzameling V in de E^n dan bestaat bij elk tweetal punten $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ een getal θ, $0 \leq \theta \leq 1$, zodat

$$f(\vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)' \cdot \nabla f(\vec{x}_1) + \\ + \frac{1}{2!}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)' \cdot H_f[\theta\vec{x}_1 + (1 - \theta)\vec{x}_2] \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \qquad (4.1.12)$$

In stelling (3.1.4) is $\nabla f[\theta\vec{x}_1 + (1 - \theta)\vec{x}_2]$ de gradiëntvektor van f ontwikkeld in het punt $\theta\vec{x}_1 + (1 - \theta)\vec{x}_2$ en in stelling 3.1.5 is $H_f[\theta\vec{x}_1 + (1 - \theta)\vec{x}_2]$ de Hessian matrix van f in $\theta\vec{x}_1 + (1 - \theta)\vec{x}_2$.

Impliciete functies

Laat $A\vec{x} = \vec{b}$ een stelsel van m lineaire vergelijkingen in n onbekenden zijn, waarbij $r(A) = r(Ab) = m$. Wanneer B een niet-singuliere deelmatrix van de rang m van A is, dan weten we dat de m variabelen, behorende bij de kolomvektoren van B éénduidig in de overige n-m variabelen uitgedrukt kunnen worden (zie Lineaire programmering, blz. 48).
Stel nu eens dat een stelsel van m vergelijkingen (niet noodzakelijk lineair) in n variabelen gegeven is,

$$g_i(\vec{x}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \qquad (4.1.13)$$

waarbij $m < n$. Nu willen we weten of het mogelijk is m variabelen te kiezen, stel $x_1,\ldots, x_m$, zodat deze variabelen te schrijven zijn als functies van de overige variabelen.
Dus we willen nagaan of er functies

$$x_i = \phi_i(x_{m+1},\ldots, x_n),\ i = 1,\ldots, n \qquad (4.1.14)$$

bestaan, zó dat, als we aan $x_{m+1},\ldots, x_n$ willekeurige waarden toekennen en de x_i $(i = 1,\ldots, m)$ d.m.v. (4.1.14) berekenen, de gevonden $\vec{x} = (x_1,\ldots, x_m)$ aan (4.1.13) voldoet.
Van elk van de functies $g_i(\vec{x})$ kan men de partiële afgeleiden $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ van de eerste orde bepalen. De zo verkregen mn partiële afgeleiden zijn op te vatten als de elementen van een m×n matrix $G = ((\frac{\partial g_i}{\partial x_j}))$.
Van deze matrix G kan men $\binom{m}{m}$ verschillende m×m deelmatrices vormen.
Zo'n deelmatrix heet een Jacobiaan matrix.
We zullen nu de hoofdstelling betreffende impliciete functies formuleren. Opdat de lezer de structuur van deze stelling eenvoudiger inziet, geven we de stelling eerst voor functies van twee variabelen.

Stelling 4.1.6. Laat de reële functie $f(x_1,x_2) \in C^1$ voor een open verzameling V in de E_2. Stel dat (a_1,a_2) een punt van V is, waarvoor

$$f(a_1,a_2) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f(a_1,a_2)}{\partial x_2} \neq 0.$$

Dan bestaan twee positieve getallen ρ en σ, zodat:

1. de rechthoek R: $|x_1 - a_1| < \rho$, $|x_2 - a_2| < \sigma$ in V bevat is en $\frac{\partial f}{\partial x_2} \neq 0$ op R
2. bij elk getal $x_1 \in (a_1 - \rho, a_1 + \rho)$ bestaat één en slechts één getal $x_2 = \phi(x_1) \in (a_2 - \sigma, a_2 + \sigma)$ met $f(x_1,x_2) = 0$
3. de in 2. bepaalde functie $\phi(x_1)$ is differentieerbaar op $(a_1 - \rho_1 a_2 + \rho)$ en er geldt

$$\frac{d\phi(x_1)}{dx_1} = -\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} / \frac{\partial f}{\partial x_2}\right]_{x_2=\phi(x_1)}$$

Stelling 4.1.7. Laten de m reële functies $g_i(x_1,\ldots, x_k, y_1,\ldots, y_m) \in C^1$ voor een open verzameling V in de E_{m+k}.
Zij $D(\vec{x},\vec{y})$ de m×k matrix met als elementen $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ en $E(\vec{x},\vec{y})$ de m×m matrix met als elementen $\frac{\partial g_i}{\partial y_i}$.
Zij verder $(\vec{a},\vec{b}) = (a_1,\ldots, a_k, b_1,\ldots, b_m)$ een punt van V en veronderstel dat

$$g_i(\vec{a},\vec{b}) = 0 \quad (i = 1,\ldots, m)$$

$E(\vec{a},\vec{b})$ niet-singulier, d.w.z. de rang van $E(\vec{a},\vec{b})$ is m.

Dan bestaan twee positieve getallen ρ en σ met

1. het gebied G: $|\vec{x} - \vec{a}| < \rho$, $|\vec{y} - \vec{b}| < \sigma$ in de E_{m+k} is bevat in V en $E(\vec{x},\vec{y})$ is niet-singulier voor elk punt $(\vec{x},\vec{y}) \in G$.
2. bij elk punt $\vec{x}$ met $|\vec{x} - \vec{a}| < \rho$ bestaat één en slechts één punt $\vec{y} = \phi(\vec{x})$ met

$$|\vec{y} - \vec{b}| < \sigma, g_i(\vec{x},\vec{y}) = 0 \quad (i = 1,\ldots, m)$$

3. de in 2 bepaalde m functies $y_i = \phi_i(x_1,\ldots, x_k)$ zijn differentieerbaar op $|\vec{x} - \vec{a}| < \rho$, terwijl de m×k matrix der partiële afgeleiden gegeven wordt door:

$$\left(\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)\right) = -\left[E(\vec{x},\vec{y})\right]^{-1} D(\vec{x},\vec{y}) \qquad (4.1.15)$$

Opmerking: Na vermenigvuldiging van (4.1.15) met de matrix $E(\vec{x},\vec{y})$ volgt:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = -\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_\mu} \cdot \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_j} \quad (i = 1,\ldots, m;\ j = 1,\ldots, k) \qquad (4.1.16)$$

Maxima en minima

Def. 3.1.4. Laat $f(\vec{x})$ gedefinieerd zijn op een verzameling W in de E_n.
Men zegt dat $f(\vec{x})$ voor $\vec{x} = \vec{a}$ op W een sterk maximum aanneemt, als $\vec{a} \in W$ en er een omgeving U van $\vec{a}$ bestaat zó dat voor elke $\vec{x} \neq \vec{a}$, $\vec{x} \in W \cap U$ geldt:

$$f(\vec{x}) < f(\vec{a}) \qquad (4.1.17)$$

Geldt in (4.1.17) het $\leq$ teken dan spreekt men van een zwak maximum.

Geldt (4.1.17), eventueel met het gelijkteken, voor elke $\vec{x} \in W$, $\vec{x} \neq \vec{a}$, dan spreekt men van een absoluut maximum, anders van een locaal maximum. Analoge definities gelden voor minimum. Maxima en minima heten tezamen extrema.

Stelling 4.1.8. Heeft $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ voor een inwendig punt $\vec{a}$ van W een extremum en bestaat $(\frac{\partial f}{\partial x_j})_{\vec{a}}$, $1 \leq j \leq n$, dan is noodzakelijk

$$(\frac{\partial f}{\partial x_j})_{\vec{a}} = 0 \quad \text{voor} \quad 1 \leq j \leq n \qquad (4.1.18)$$

Zoals uit het volgende voorbeeld blijkt is (4.1.18) geen voldoende voorwaarde. Laat $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ zijn. Stel $W = E_2$. Voor $\vec{a} = (0,0)$ geldt $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, maar (0,0) is geen extremum.
Uit stelling 4.1.8 volgt dus dat wanneer $f(\vec{x})$ differentieerbaar is op een verzameling W en als we weten dat $f(\vec{x})$ een extreme waarde in een inwendig punt van W aanneemt, dat dit punt dan een oplossing moet zijn van het vergelijkingenstelsel

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \text{ anders geschreven}$$

$$\nabla f(\vec{x}) = \vec{0} \qquad (4.1.19)$$

Verder weten we dat niet elke oplossing van (4.1.19) een extremum is. Men kan voldoende voorwaarden voor een extremum aangeven, we zullen dit niet doen. In vele gevallen kan men op grond van de structuur van het gegeven probleem eenvoudig nagaan of de gevonden oplossing van (4.1.18) een extremum is of niet.
Om de oplossingen van (4.1.19) te bepalen bestaan geen algemene numerieke oplossingsmethoden. Een iteratieve procedure welke soms tot een numerieke oplossing leidt is Newton's methode. Om deze methode toe te passen veronderstellen we $f \in C^2$. Dan geldt dat de functies $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} \in C^1$, $1 \leq j \leq n$. Stel verder dat we een schatter $\vec{x}_1$ van een oplossing van (3.1.19) kennen. Laat $\vec{x}^{**}$ een werkelijke oplossing van (3.1.19) zijn. Pas nu stelling 3.1.9a) toe op $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ en bedenk $\frac{\partial f(\vec{x}^{**})}{\partial x_j} = 0$, $1 \leq j \leq n$.

Men vindt dan

$$\frac{\partial f(\vec{x}^{**})}{\partial x_j} = 0 = \frac{\partial f(\vec{x}_1)}{\partial x_j} + (\vec{x}^{**} - \vec{x}_1)' \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial x_j} f\left[\theta \vec{x}^{**} + (1 - \theta)\vec{x}_1\right], \quad 1 \leq j \leq n$$

Beschouw nu i.p.v. dit stelsel, het volgende stelsel vergelijkingen

$$0 = \frac{\partial f(\vec{x}_1)}{\partial x_j} + (\vec{x} - \vec{x}_1)' \cdot \nabla \frac{\partial f(\vec{x}_1)}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq n$$

of (zie definitie Hessian matrix)

$$(\vec{x} - \vec{x}_1)' \cdot H_f(\vec{x}_1) = -\nabla f(x_1) \qquad (4.1.20)$$

Dit is een verzameling van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden x_j, en dit stelsel bezit een unieke oplossing als $H_f(\vec{x}_1)$ niet-singulier is. Als dit laatste zo is, noem dan de oplossing $\vec{x}_2$. Vervolgens gebruiken we $\vec{x}_2$ als schatter van $\vec{x}^{**}$ en herhalen het procédé. Dit geeft een rij $\{\vec{x}_n\}$ en soms convergeert deze rij naar een oplossing van 4.1.19.

Wanneer W open is of $W = E_2$ en $f(\vec{x})$ is differentieerbaar op W en het is bekend dat $f(\vec{x})$ extreme waarden op W aanneemt, dan weten we dat elk punt (met $|\vec{x}|$ eindig), waarvoor $f(\vec{x})$ op W een extremum aanneemt, voldoen moet aan $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$.
Wanneer W niet open is, dan moet men het gedrag van $f(\vec{x})$ op de randpunten van W apart onderzoeken. Het kan nu zijn dat $f(\vec{x})$ op W een extremum aanneemt voor een randpunt, en zo'n randpunt zal in het algemeen niet aan (4.1.19) voldoen. We zullen in een voorbeeld laten zien hoe men de rand onderzoekt. Laat $f(\vec{x})$ differentieerbaar zijn over de E_n. Stel nu dat we niet het absolute maximum van $f(\vec{x})$ over de E_n willen bepalen, maar over het niet-negatieve orthant ($= \{\vec{x} \mid \vec{x} \geq \vec{0}\}$). Om het absolute maximum te bepalen gaat men als volgt te werk. Eerst bepaalt men alle oplossingen van (4.1.19) die in het niet-negatieve orthant liggen. Vervolgens beschouwt men de n functies f_j van n-1 variabelen, f_j verkregen uit $f(\vec{x})$ door $x_j = 0$ te stellen. Bepaal dan voor elke f_j de oplossingen van het stelsel vergelijkingen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0$, $1 \leq i \leq n$, $i \neq j$. Wanneer men deze oplossingen aanvult met $x_j = 0$ dan vindt men punten uit de E_n die liggen op de rand van het negatieve orthant. Beschouw

daarna de $\binom{n}{2}$ functies f_{ij} van n-2 variabelen, f_{ij} verkregen uit f door $x_i = x_j = 0$ te stellen. Bepaal dan de oplossingen van het stelsel $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} = 0$, $1 \leq k \leq n$, $k \neq i,j$. Vult men deze oplossingen aan met $x_i = 0$ en $x_j = 0$ dan vindt men punten op de rand van het niet-negatieve orthant van de E_n. Deze procedure zet men voort. Beschouw alle functies met drie van de variabelen nul gesteld, vier van de variabelen nul gesteld, en tenslotte beschouwt men de waarde van $f(\vec{x})$ in $\vec{0}$. Bepaal de waarde van $f(\vec{x})$ in elk punt dat we volgens de beschreven procedure verkregen hebben. Als we weten dat $f(\vec{x})$ het absolute maximum aanneemt in een punt $\vec{x}$ met $|\vec{x}|$ eindig, dan is het absolute maximum van $f(\vec{x})$ de grootste van de berekende waarden. Het hoeft geen betoog dat het in het algemeen ondoenlijk is om op deze wijze het absolute maximum van $f(\vec{x})$ te bepalen, vooral wanneer $f(\vec{x})$ een functie van veel variabelen is.
Los van voorgaande geven we tenslotte een stelling uit de Lineaire algebra, die we bij het bewijs van een stelling uit §2 zullen gebruiken.

<u>Stelling 4.1.9.</u> Zij $A\vec{x} = \vec{b}$ een stelsel van m lineaire vergelijkingen in n onbekenden. Neem aan het stelsel is oplosbaar, d.w.z. $r(A) = r(Ab)$. Zij $r = r(A)$. Zoals we weten geldt $r \leq \min(m,n)$. Als nu,

1. $r = n$. Dan is er één en slechts één oplossing $\vec{x}_0$ van $A\vec{x} = \vec{b}$
2. $r < n$. Dan zijn er $n-r$ lineaire onafhankelijke vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-r}$ (de $\vec{x}_i$ zijn onafhankelijk, dus $\vec{x}_i \neq \vec{0}$) met $A\vec{x}_i = \vec{0}$, $1 \leq i \leq n - r$. Verder is elke oplossing $\vec{x}$ van $A\vec{x} = \vec{b}$ te schrijven als $\vec{x} = \vec{x}_0 + \mu_1\vec{x}_1 + \ldots + \mu_{n-r}\vec{x}_{n-r}$, waarbij $\vec{x}_0$ een particuliere oplossing van $A\vec{x} = \vec{b}$ is.

Als $\vec{b} = \vec{0}$ wordt de stelling:

1. $r = n$, dan is $\vec{x} = \vec{0}$ de enige oplossing van $A\vec{x} = \vec{0}$.
2. $r < n$. Dan zijn er $n-r$ lineaire onafhankelijke vektoren $\vec{x}_i$ met $A\vec{x}_i = \vec{0}$, $1 \leq i \leq n - r$, en elke oplossing van $A\vec{x} = \vec{0}$ is te schrijven als $\mu_1\vec{x}_1 + \ldots + \mu_{n-r}\vec{x}_{n-r}$. Men zegt ook wel de oplossingen van $A\vec{x} = \vec{0}$ spannen een $n-r$-dimensionale deelruimte van de E_n op.

§2. Multiplicatorenmethode van Lagrange

Bij het bepalen van maxima en minima van een functie $f(\vec{x})$ van meer variabelen komt het vaak voor dat de variabelen $x_1,\ldots, x_n$ niet onafhankelijk zijn, maar met elkaar verbonden zijn door de voorwaarden $g_i(\vec{x}) = b_i$, $i = 1,\ldots, m$; $m < n$. We zullen aannemen dat $f(\vec{x}) \in C^1$ en $g_i(\vec{x}) \in C^1$ voor de E_n. Laat $\mathcal{V}$ de verzameling van de punten $\vec{x}$ zijn die voldoen aan $g_i(\vec{x}) = b_i$ $(i = 1,\ldots, m)$. We zullen nu noodzakelijke voorwaarden afleiden opdat voor $\vec{x} = \vec{x}_0 \in \mathcal{V}$ de functie $f(\vec{x})$ op $\mathcal{V}$ een extremum bezit. We zullen eerst het eenvoudigste geval beschouwen en wel het geval dat $f(\vec{x})$ een functie van twee variabelen x_1, x_2 is die voldoen aan de voorwaarde $g(x_1,x_2) = b$.

Stelling 4.2.1. Laat $f(x_1,x_2)$ en $g(x_1,x_2) \in C^1$ over de E_2. Zij b een constante. Laat verder $\mathcal{V}$ de verzameling van de punten (x_1,x_2) zijn waarvoor $g(x_1,x_2) = b$. Als $f(x_1,x_2)$ voor $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$ een extremum op $\mathcal{V}$ aanneemt en $\frac{\partial g(\vec{x}_0)}{\partial x_1} \neq 0$ of $\frac{\partial g(\vec{x}_0)}{\partial x_2} \neq 0$ dan bestaat er een getal λ^* zodanig dat de twee vergelijkingen

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1} - \lambda^* \frac{\partial g(\vec{x}_0)}{\partial x_1} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_2} - \lambda^* \frac{\partial g(\vec{x}_0)}{\partial x_2} = 0 \qquad (4.2.1)$$

zijn vervuld, tezamen met de vergelijking

$$g(\vec{x}_0) = b.$$

Bewijs: Stel $\frac{\partial g(\vec{x}_0)}{\partial x_2} \neq 0$. Er geldt $g(\vec{x}_0) = b$, ofwel $g(\vec{x}_0) - b = 0$. Uit stelling 4.1.6 volgt dat in een ε-omgeving van $\vec{x}_0$ de functie $g(x_1,x_2) - b = 0$ de variabele x_2 éénduidig bepaalt als een differentieerbare functie van $x_1, x_2 = \phi(x_1)$. Verder geldt dat voor elk punt uit deze omgeving $[x_1,\phi(x_1)] \in \mathcal{V}$. Elimineren we voor deze punten x_2 in $f(x_1,x_2)$ dan krijgen we

$$z = h(x_1) = f[x_1,\phi(x_1)].$$

De functie $h(x_1)$ neemt in x_1^0 een (vrij) extreem aan. Immers stel $f(x_1,x_2)$ neemt voor $\vec{x}_0$ een maximum op $\mathcal{V}$ aan. Dan bestaat er een δ,

$0 < \delta < \varepsilon$ zodat voor elke x_1 in de δ-omgeving van x_1^0 geldt: $h(x_1) \leq h(x_1^0)$. Analoog beschouwt men het geval dat $f(\vec{x})$ een minimum op $\mathcal{V}$ aanneemt voor $\vec{x}_0$. Dus $h(x_1)$ bezit een (vrij) extreem in x_1^0, d.w.z. $\frac{dh(x_1^0)}{dx_1} = 0$. (de functie $h(x_1)$ is differentieerbaar).

Daar $f(x_1,x_2)$ differentieerbaar is en ook $\phi(x_1)$ kunnen we op $z = h(x_1)$ de kettingregel toepassen (stelling 4.1.4):

$$\frac{dh}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{d\phi}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2},$$

daar uit stelling 4.1.6, 3^e volgt

$$\frac{d\phi}{dx_1} = -\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2}$$

Nu is $\frac{dh(x_1^0)}{dx_1} = 0$, dus

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_2}\frac{\partial g(\vec{x}_0)/\partial x_2}{\partial g(\vec{x}_0)/\partial x_2} = 0 \qquad (4.2.3)$$

Stel nu

$$\lambda^* = \frac{\partial f(\vec{x}_0)/\partial x_2}{\partial g(\vec{x}_0)/\partial x_2} \qquad (4.2.4)$$

dus

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_2} - \lambda^*\frac{\partial g(\vec{x}_0)}{\partial x_2} = 0.$$

Vul (4.2.4) in (4.2.3) in, dan zien we dat het noodzakelijk is dat het punt $\vec{x}_0$ voldoet aan de vergelijkingen:

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} - \lambda^*\frac{\partial g(\vec{x}_0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{en} \quad g(\vec{x}_0) = b \qquad (4.2.5)$$

Evenzo leidt men het stelsel (4.2.5) af als $\frac{\partial g(\vec{x}_0)}{\partial x_1} \neq 0$. We kunnen de noodzakelijke voorwaarden (4.2.5) eenvoudig verkrijgen. Vorm de functie $F(x_1,x_2,\lambda) = f(x_1,x_2) + \lambda[b - g(x_1,x_2)]$ en stel de partiële afgeleiden

van $F(x_1,x_2,\lambda)$ naar de variabelen x_1, x_2 en λ gelijk aan nul. Bij het nemen van de partiële afgeleiden behandelen we x_1, x_2 en λ als onafhankelijke variabelen, dus

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0,\ j = 1,\ 2;\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = b - g(x_1,x_2) = 0 \qquad (4.2.6)$$

De functie $F(x_1,x_2,\lambda)$ heet de <u>Lagrange functie</u>, λ heet een <u>Lagrange multiplicator</u>.

<u>Opmerkingen</u>. Niet elke oplossing van het stelsel (4.2.6) behoeft een extremum van $f(\vec{x})$ op $\mathcal{V}$ op te leveren (zie voorbeeld 1). Wel geldt dat de verzameling S van punten $\vec{x}$, waarvoor een getal λ bestaat zodat (x_1,x_2,λ) aan het stelsel (4.2.6) voldoet, de punten $\vec{x}$ bevat met tenminste één $\frac{\partial g}{\partial x_j} \neq 0$ $(j = 1, 2)$ waarvoor $f(\vec{x})$ op $\mathcal{V}$ een extremum bezit. Maar niet behoeft te gelden dat S elk punt $\vec{x}$ bevat waarvoor $f(\vec{x})$ op een extremum aanneemt. Als $f(\vec{x})$ voor $\vec{x}_0$ een extremum op $\mathcal{V}$ aanneemt en $\frac{\partial g(x_0)}{\partial x_j} = 0$ $(j = 1, 2)$ dan zal in het algemeen geen getal λ^* te vinden zijn, zó dat $(\vec{x}_0,\lambda^*)$ aan (4.2.6) voldoet. (zie voorbeeld 2). In principe zou men de verzameling S kunnen beschouwen verenigd met de verzameling van punten $\vec{x} \in \mathcal{V}(\mathcal{V} = \{\vec{x} \mid g(\vec{x}) = b\})$ waarvoor $\frac{\partial g}{\partial x_j} = 0$, $(j = 1, 2)$. De verzameling T van al deze punten $\vec{x}$ bevat nu de punten $\vec{x}$ waarvoor $f(\vec{x})$ op $\mathcal{V}$ een extremum aanneemt. Hierbij nemen we aan dat $f(\vec{x})$ de extrema op $\mathcal{V}$ bereikt voor punten $\vec{x}$ met $|\vec{x}|$ eindig. Berekent men de waarde van $f(\vec{x})$ in elk punt $\vec{x} \in T$ dan neemt $f(\vec{x})$ het absolute maximum resp. minimum aan op $\mathcal{V}$ in de punten waar $f(\vec{x})$ de grootste resp. de kleinste waarde bezit.

We zullen later zien hoe men stelling 4.2.1 uitbreiden kan voor het geval $\frac{\partial g(\vec{x}_0)}{\partial x_j} = 0$ $(j = 1, 2)$.

Men kan ook voldoende voorwaarden voor een punt $\vec{x}_0$ afleiden opdat $f(\vec{x})$ op $\mathcal{V}$ een extremum voor $\vec{x}_0$ aanneemt. We zullen dit niet doen. Vaak kan men op grond van de aard van het gestelde probleem eenvoudig nagaan of een punt $\vec{x} \in T$ al of niet een extreme waarde van $f(\vec{x})$ op $\mathcal{V}$ geeft.

We geven twee voorbeelden over stelling 4.2.5.

Voorbeeld 1. Bepaal de extreme waarden van de functie

$$z = x_1 x_2$$

onder

$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

$\mathcal{V} = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$.
We merken eerst op dat er geen punt $(x_1,x_2) \in \mathcal{V}$ is met $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1 = 0$ én $\frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2 = 0$.
We bepalen vervolgens de oplossingen van het stelsel (3.2.6)

$$x_2 - 2\lambda x_1 = 0,\ x_1 - 2\lambda x_2 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

Wanneer men deze vergelijkingen oplost, vindt men de oplossingen

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ x_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad (\lambda = \tfrac{1}{2})$$

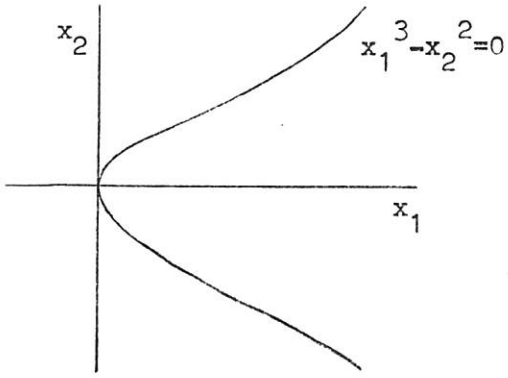
$$x_1 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ x_2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad (\lambda = \tfrac{1}{2})$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ x_2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad (\lambda = -\tfrac{1}{2})$$

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ x_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad (\lambda = -\tfrac{1}{2})$$

De waarde van de functie $z = x_1 x_2$ is voor de eerste twee punten (x_1,x_2) gelijk aan $z = \frac{1}{2}$, voor de laatste twee punten is $z = -\frac{1}{2}$. De vraag is nu of dit extrema van z op $\mathcal{V}$ zijn. Daartoe moet men weten of z op $\mathcal{V}$ extrema aanneemt. Nu,dit is het geval, daar een continue functie op een begrensde, gesloten verzameling zowel een grootste waarde als een kleinste waarde aanneemt. In dit voorbeeld is $\mathcal{V}$ de cirkelrand van de eenheidscirkel met de oorsprong als middelpunt, dus $\mathcal{V}$ is begrensd en gesloten. Dus $z = x_1 x_2$ neemt voor de eerste twee gevonden punten (x_1,x_2) een (absoluut) maximum op $\mathcal{V}$ aan, en voor de laatste twee punten een (absoluut) minimum.
In dit voorbeeld is elke oplossing van (3.2.6) een extremum voor f op $\mathcal{V}$, hoewel dit in het algemeen niet het geval is.

Voorbeeld 2. We geven een voorbeeld van een functie $f(x_1,x_2)$ die voor $\vec{x}_0$ op een extremum bezit, waarbij $\frac{\partial g(\vec{x}_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial g(\vec{x}_0)}{\partial x_2} = 0$ en geen getal λ^* bestaat zodat $(\vec{x}_0,\lambda^*)$ aan (4.2.6) voldoet. Zij $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1$, en laat $g(x_1,x_2) = b$ voorgesteld worden door $x_1^3 - x_2^2 = 0$



$\mathcal{V} = \{(x_1,x_2) \mid x_1^3 - x_2^2 = 0\}$.
Men ziet direct in m.b.v. de figuur dat $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1$ een absoluut minimum op $\mathcal{V}$ aanneemt voor $(0,0)$. Dit is het enige punt $\vec{x}$ met $|\vec{x}|$ eindig waarvoor $f(x_1,x_2)$ op $\mathcal{V}$ een extremum bezit ($f(\vec{x})$ bereikt het maximum ∞ op $\mathcal{V}$ voor punten $\vec{x}$ met $|\vec{x}| \to \infty$).
Het stelsel (4.2.6) wordt:

$$2x_1 + 1 - 3\lambda x_1^2 = 0,\ 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0,\ x_1^3 - x_2^2 = 0.$$

De enige oplossingen van deze vergelijkingen zijn

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1 \quad (\lambda = 1)$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1 \quad (\lambda = 1)$$

Zoals men m.b.v. de figuur ziet neemt $x_1^2 + x_2^2 + x_1$ geen extremum aan op $\mathcal{V}$ voor deze twee gevonden punten.
In het punt $(0,0)$ neemt $x_1^2 + x_2^2 + x_1$ het minimum aan op $\mathcal{V}$. $(0,0) \in \mathcal{V}$.
Verder is $\frac{\partial g(0,0)}{\partial x_1} = \frac{\partial g(0,0)}{\partial x_2} = 0$.
En we hebben gezien dat bij $(0,0)$ geen getal λ bestaat zodat $(0,0,\lambda)$ gelijktijdig aan $2x_1^2 + 1 - 3\lambda x_1^2 = 0,\ 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0,\ x_1^3 - x_2 = 0$ voldoet. (Vult men $(0,0,\lambda)$ in, dan vindt men de vergelijkingen $1 = 0,\ 0 = 0,\ 0 = 0$).

We beschouwen vervolgens het geval dat $f(\vec{x})$ een functie van n variabelen is, waarbij de n variabelen aan m<n voorwaarden $g_i(\vec{x}) = b_i$ voldoen.

Stelling 4.2.2. Zijn $f(\vec{x})$ en $g_i(\vec{x})$ $(i = 1,\ldots, m) \in C^1$ over de E_n, en laten $b_1,\ldots, b_m$ constanten zijn. Hierbij is $m < n$.
$\mathcal{V}$ is de verzameling van punten $\vec{x}$ waarvoor $g_i(\vec{x}) = b_i$ $(i = 1,\ldots, m)$.
Stel $f(\vec{x})$ neemt voor $\vec{x}_0$ op $\mathcal{V}$ een extremum aan en stel $r(G) = m$ in $\vec{x}_0$, waarbij G de matrix is van de eerste partiële afgeleiden van de functies g_i naar de variabelen x_j, dus $G = \left(\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)\right)$.
Dan bestaat er een vektor $\vec{\lambda}^*$ (uniek bepaald) zó dat $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}^*)$ aan de volgende vergelijkingen voldoet:

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\vec{x}_0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,\ldots, n$$

$$g_i(\vec{x}_0) = b_i, \qquad (i = 1,\ldots, m) \tag{4.2.7}$$

Bewijs: Er geldt $r(G) = m$ in $\vec{x}_0$. Dit is een essentieel gegeven. Hieruit volgt dat minstens één Jacobiaan van G aan te geven is, die rang m bezit voor het punt $\vec{x}_0$. We nemen aan (door hernummeren van de variabelen x_j altijd voor te zorgen) dat de Jacobiaan

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{array}\right)_{\vec{x}_0} \quad \text{niet-singulier is.} \tag{4.2.8}$$

Terwille van de notatie stellen we $(x_{m+1},\ldots, x_n) = \vec{w}$.
Er geldt $g_i(\vec{x}_0) - b_i = 0$ $(i = 1,\ldots, m)$.
Uit stelling 4.1.7 volgt dat er een ε-omgeving van $\vec{x}_0$ is waar de vergelijkingen $g_i(\vec{x}) = b_i$, $1 \leq i \leq m$, de variabelen $x_1,\ldots, x_m$ éénduidig bepalen als differentieerbare functies van $x_{m+1},\ldots, x_n$:

$$x_i = \phi_i(x_{m+1},\ldots, x_n) \quad (i = 1,\ldots, m)$$

Dus elk punt uit de ε-omgeving van $\vec{x}_0$ is te schrijven als $[\phi_1(\vec{w}),\ldots,\phi_m(\vec{w}),\vec{w}]$ en verder geldt $[\phi_1(\vec{w}),\ldots,\phi_m(\vec{w}),\vec{w}] \in \mathcal{V}$.
Elimineer voor elk punt uit de ε-omgeving van $\vec{x}_0$ de variabelen $x_1,\ldots,x_m$ in $f(\vec{x})$, dit geeft

$$h(\vec{w}) = f[\phi_1(\vec{w}),\ldots,\phi_m(\vec{w}),\vec{w}], \text{ waarbij } \vec{w} = (x_{m+1},\ldots,x_n).$$

De functie $h(\vec{w})$ heeft een (vrij) extreem in $\vec{w}_0 = ({x_{m+1}}^0,\ldots,{x_n}^0)$, dus

$$\frac{\partial h(\vec{w}_0)}{\partial x_j} = 0 \quad (j = m+1,\ldots,n) \qquad (4.2.9)$$

daar $h(x_{m+1},\ldots,x_n)$ differentieerbaar is in de ε-omgeving van $\vec{w}_0$.
Pas de kettingregel (stelling 4.1.4) toe op $h(x_{m+1},\ldots,x_n)$:

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (j = m+1,\ldots,n) \qquad (4.2.10)$$

Uit stelling 4.1.7 volgt dat de afgeleiden $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$, $i = 1,\ldots,m$ bij een vaste j de unieke oplossing zijn van de verzameling vergelijkingen

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial g_i}{\partial x_j}, \quad (i = 1,\ldots,m) \qquad (4.2.11)$$

Voor elke $j = m+1,\ldots,n$ geldt een vergelijking (4.2.11). We hebben dus n-m verzamelingen van vergelijkingen (4.2.11). Men kan natuurlijk proberen de verzamelingen van vergelijkingen (4.2.11) voor $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$ op te lossen en dan in (4.2.10) te substitueren, maar we zullen anders te werk gaan.
Beschouw het stelsel van m lineaire vergelijkingen in m onbekenden λ_i

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\vec{x}_0)}{\partial x_k} = \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_k} \quad (k = 1,\ldots,m) \qquad (4.2.12)$$

Dit stelsel bezit een unieke oplossing $\vec{\lambda}^*$, daar de matrix van de coëfficiënten van de λ_i de Jacobiaan (4.2.8) is, die niet-singulier is. (zie ook stelling 4.1.9). Vermenigvuldig vergelijking i in (4.2.11) met λ_i en sommeer over i. Dit geeft voor elke j, $j = m+1,\ldots,n$,

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \qquad (4.2.13)$$

Uit (4.2.9) en (4.2.10) volgt:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_k(\vec{w}_0)}{\partial x_j} + \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_j} = 0 \quad (j = m+1, \ldots, n) \qquad (4.2.14)$$

Beschouw vervolgens (4.2.13) voor $\vec{x} = \vec{x}_0$ en trek het van (4.2.14) af, dit geeft

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\vec{x}_0)}{\partial x_k} \right] \frac{\partial \phi_k(\vec{w}_0)}{\partial x_j} + \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\vec{x}_0)}{\partial x_j} = 0$$

$$(j = m+1, \ldots, n) \qquad (4.2.15)$$

Substitueert men (4.2.12) in (4.2.15), dan volgt

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\vec{x}_0)}{\partial x_j} = 0, \quad (j = m+1, \ldots, n) \qquad (4.2.16)$$

Combineren we (4.2.16) met (4.2.12) en de voorwaarden dan zien we dat, wanneer voor $\vec{x} = \vec{x}_0$ $f(\vec{x})$ een extremum op $\mathcal{V}$ aanneemt en $r(G) = m$ in $\vec{x}_0$, het punt $\vec{x}_0$ dan voldoen moet aan de volgende verzameling van m+n vergelijkingen:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\vec{x}_0)}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \\ &g_i(\vec{x}_0) = b_i \qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned} \qquad (4.2.17)$$

Verder weten we dat de getallen λ_i, $1 \leq i \leq m$, voor zo'n punt $\vec{x}_0$ uniek bepaald zijn.

De noodzakelijke voorwaarden (4.2.17) kunnen als volgt eenvoudig verkregen worden. Vorm de functie

$$F(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(\vec{x})) \qquad (4.2.18)$$

en stel de partiële afgeleide van $F(\vec{x}, \vec{\lambda})$ gelijk aan nul voor elk van m+n variabelen x_j, $j = 1, \ldots, n$, en λ_i, $i = 1, \ldots, m$.

Bij het nemen van de partiële afgeleiden worden al de variabelen als onafhankelijke variabelen behandeld.
Dus

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad (j = 1, \ldots, n)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(\vec{x}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{4.2.19}$$

De functie $F(\vec{x}, \vec{\lambda})$ heet de <u>Lagrange functie</u>, en de λ_i heten de multiplicatoren van Lagrange.
Zoals reeds bij stelling 4.2.1 opgemerkt, behoeft niet elk punt $\vec{x}$ waarbij een vektor $\vec{\lambda}$ bestaat, zodat $(\vec{x}, \vec{\lambda})$ aan het stelsel (4.2.19) voldoet, een punt te zijn waarvoor $f(\vec{x})$ op $\mathcal{V}$ een extremum aanneemt. Verder als $\vec{x}_0$ een punt is waarvoor $f(\vec{x})$ een extremum op $\mathcal{V}$ aanneemt en $r(G) \neq m$ in $\vec{x}_0$ dan zal er in het algemeen geen vektor $\vec{\lambda}^{**}$ te vinden zijn zodat $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}^{**})$ aan (4.2.19) voldoet. We zullen stelling 4.2.2 uitbreiden voor het geval $r(G) \neq m$, dus $r(G) < m$, in $\vec{x}_0$ is en $f(\vec{x})$ voor $\vec{x}_0$ een extremum op $\mathcal{V}$ aanneemt.
Daartoe voeren we eerst de $(m + 1) \times n$-matrix G_f in

$$G_f = \begin{bmatrix} G \\ \nabla f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{4.2.20}$$

De maximaal mogelijke rang van G_f is m+1.
Voor de uitbreiding van stelling 4.2.2 te formuleren, bewijzen we eerst de volgende stelling.

<u>Stelling 4.2.3</u>: Laten $f(\vec{x})$ en $g_i(\vec{x}) \in C^1$ $(1 \leq i \leq m)$ over de E^n $b_1, \ldots, b_m$ constanten. Verder $m < n$.
$\mathcal{V}$ is de verzameling van punten $\vec{x}$ met $g_i(\vec{x}) = b_i$, $1 \leq i \leq m$.

Als $r(G_f) = m + 1$ in $\vec{x}_0 \in \mathcal{V}$ dan neemt $f(\vec{x})$ geen extremum op $\mathcal{V}$ aan voor $\vec{x} = \vec{x}_0$.

Bewijs: We moeten bewijzen dat elke δ-omgeving $U_\delta(\vec{x}_0)$ van $\vec{x}_0$ punten $\vec{x} \in \mathcal{V}$ bevat, zó dat voor sommige punten $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0) = z_0$ en voor andere punten $f(\vec{x}) < z_0$. Er geldt $r(G_f) = m + 1$ in $\vec{x}_0$. We kunnen dus minstens één $(m + 1) \times (m + 1)$ deelmatrix van G_f aangeven die rang $m+1$ heeft. Stel dat de $(m + 1) \times (m + 1)$ deelmatrix van G_f bestaande uit de eerste $m+1$ kolommen van G_f rang $m+1$ bezit.
Beschouw de $m+1$ functies $f(\vec{x}) - z = 0$, $g_i(\vec{x}) - b_i = 0$, $1 \leq i < m$, in de $n+1$ variabelen $x_1, \ldots, x_n, z$.
Nu zegt stelling 4.1.7 ons dat er een ε-omgeving van $(\vec{x}_0, z_0)$ bestaat waar de vergelijkingen $f(\vec{x}) - z = 0$, $g_i(\vec{x}) = b_i$, $1 \leq i \leq m$, de variabelen $x_1, \ldots, x_{m+1}$ éénduidig bepalen als functies van de variabelen $x_{m+2}, \ldots, x_n, z$:

$$x_i = \phi_i(x_{m+2}, \ldots, x_n, z) \quad (i = 1, \ldots, m + 1)$$

Verder geldt dat elk punt $(\vec{x}, z)$ uit de ε-omgeving van $(\vec{x}_0, z_0)$ tot Y behoort, waarbij $Y = \{(\vec{x}, z) \mid f(\vec{x}) - z = 0, g_i(\vec{x}) = b_i, 1 \leq i \leq m\}$.
Uit deze definitie van Y volgt, dat $\vec{x} \in \mathcal{V}$ als $(x, z) \in Y$.
Zij $U_\delta(\vec{x}_0)$ een willekeurige omgeving van $\vec{x}_0$ in de E_n. We tonen nu aan dat er een punt $\vec{x} \in \mathcal{V} \cap U_\delta(\vec{x}_0)$ bestaat zodat $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$.
Stel $x_{m+2} = x_{m+2}^0, \ldots, x_n = x_n^0$ en $z = z_0 + h$ met $h > 0$. Hierdoor wordt m.b.v. de functies ϕ_i een punt $(\vec{x}_{0h}, z_0 + h)$ bepaald. Uit de continuïteit van de functies ϕ_i volgt dat wanneer men $h > 0$ voldoende klein neemt het punt $(\vec{x}_{0h}, z_0 + h)$ tot de ε-omgeving van $(\vec{x}_0, z_0)$ behoort en $\vec{x}_{0h} \in U_\delta(\vec{x}_0)$. We zien dus als h voldoende klein is dat dan $(\vec{x}_{0h}, z_0 + h) \in Y$, d.w.z. $\vec{x}_{0h} \in \mathcal{V}$ en $f(\vec{x}_{0h}) = z_0 + h > z_0$. Verder $\vec{x}_{0h} \in U_\delta(\vec{x}_0)$. Hiermee is aangetoond dat elke δ-omgeving van $\vec{x}_0$ een punt $\vec{x}$ bevat dat ook tot $\mathcal{V}$ behoort waarvoor $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$.
Door uit te gaan van $x_{m+2} = x_{m+2}^0, \ldots, x_n = x_n^0$, $z = z_0 - h$ met $h > 0$ toont men analoog aan dat elke $U_\delta(\vec{x}_0)$ van $\vec{x}_0$ een punt $\vec{x} \in \mathcal{V}$ bevat met $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$.
Dit impliceert dat $f(\vec{x})$ geen extremum op $\mathcal{V}$ aanneemt voor $\vec{x} = \vec{x}_0$ als $r(G_f) = m + 1$ in $\vec{x}_0$.

Stelling 4.2.4. Laten $f(\vec{x})$ en $g_i(\vec{x})$, $(1 \leq i \leq m) \in C^1$ over de E_n.
Zijn verder $b_1, \ldots, b_m$ constanten, waarbij $m < n$.
$\mathcal{V} = \{\vec{x} \mid g_i(\vec{x}) = b_i,\ 1 \leq i \leq m\}$.
Als $f(\vec{x})$ voor $\vec{x}_0$ een extremum op $\mathcal{V}$ aanneemt dan bestaan er getallen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, niet allen gelijk aan nul, zodat $(\vec{x}_0, \vec{\lambda})$ voldoet aan het stelsel vergelijkingen:

$$\lambda_0 \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\vec{x}_0)}{\partial x_j} = 0,\ j = 1, \ldots, n \qquad (4.2.21)$$

$$g_i(\vec{x}_0) = b_i,\ i = 1, \ldots, m. \qquad (4.2.22)$$

Hierbij kan men altijd stellen $\lambda_0 = 0$ óf $\lambda_0 = 1$.
Als $r(G_f) = r(G)$ in $\vec{x}_0$ dan is $\lambda_0 = 1$. Als $r(G_f) > r(G)$ in $\vec{x}_0$ dan is het noodzakelijk $\lambda_0 = 0$ opdat er getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ bestaan, niet allen nul, die aan (4.2.21) voldoen. Als $r(G_f) > r(G)$ in $\vec{x}_0$ zijn de λ_i, $i = 1, \ldots, m$ niet éénduidig bepaald. Als $r(G_f) = r(G) = m$ in $\vec{x}_0$ dan zijn de λ_i éénduidig bepaald, en als in $\vec{x}_0$ $r(G_f) = r(G) < m$ dan zijn de λ_i niet éénduidig bepaald.

Bewijs: We zullen bij het bewijs gebruik maken van enkele stellingen uit de Lineaire algebra, nl. van hetgeen op blz. 47, 48 staat, (deel I, Lineaire Programmering) en stelling 4.1.9.
Laat $\vec{x}_0$ een punt zijn waar $f(\vec{x})$ op $\mathcal{V}$ een extremum aanneemt. Dan weten we van stelling 4.2.3 dat $r(G_f) < m + 1$ in $\vec{x}_0$.
Beschouw het stelsel van n homogene lineaire vergelijkingen in m+1 onbekenden λ_i,

$$\lambda_0 \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_j} - \lambda_1 \frac{\partial g_1(\vec{x}_0)}{\partial x_j} - \ldots - \lambda_m \frac{\partial g_m(\vec{x}_0)}{\partial x_j} = 0,\ (j = 1, \ldots, n)$$

$$(4.2.23)$$

Uit stelling 4.1.9 volgt dat er vektoren $\vec{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq \vec{0}$ zijn die voldoen aan (4.2.23), daar $r(G_f) < m + 1$.
We zullen de verschillende gevallen die optreden kunnen beschouwen.
1) $r(G) = m$ in $\vec{x}_0$. Kies dan een m-tal vergelijkingen van (4.2.23) waarvan de coëfficiënten-matrix een niet-singuliere m×m matrix bevat, die

een deelmatrix van G is. Van blz. 47, 48 weten we dat elke oplossing van dit m-tal vergelijkingen automatisch aan alle vergelijkingen van (4.2.23) voldoet. Verder geldt dat we $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ éénduidig in λ_0 kunnen uitdrukken. Aan λ_0 mogen we elke waarde toekennen, behalve de waarde 0. Immers als $\lambda_0 = 0$ dan bezit (4.2.23) alléén de nul-oplossing, in tegenspraak met het feit dat (4.2.23) niet-triviale oplossingen bezit. We mogen zonder beperking $\lambda_0 = 1$ stellen. De andere getallen λ_i zijn dan uniek bepaald.

2) $r(G_f) = m$ in $\vec{x}_0$, maar $r(G) = m - 1$. Kies een m-tal vergelijkingen uit (4.2.23) zodat de matrix van de coëfficiënten een niet-singuliere $m \times m$ matrix bevat. Voor elke oplossing van dit m-tal vergelijkingen geldt $\lambda_0 = 0$. Immers stel λ_0 een getal ongelijk aan nul dan zouden we in de overige λ een stelsel vergelijkingen krijgen van de vorm $A\vec{\lambda} = \vec{b}$ waarbij $r(A) = m - 1$, $r(Ab) = m - 1$, hetgeen impliceert dat dit stelsel en dus ook (4.2.23) onoplosbaar is, tegenspraak. Als $\lambda_0 = 0$, dan bestaan er λ_i ($i = 1, \ldots, m$) niet allen nul, die aan het m-tal vergelijkingen en dus ook aan (4.2.23) voldoen. Daar $r(G) = m - 1$ zijn de λ_i ($i = 1, \ldots, m$) niet uniek bepaald, maar de oplossingen spannen een één-dimensionale deelruimte van de E_m op (stelling 4.1.9).

3) $r(G_f) = r(G) = r < m$ in $\vec{x}_0$.

Kies r vergelijkingen van (4.2.23) zodat de matrix van de coëfficiënten een niet-singuliere $r \times r$ matrix bevat, die een deelmatrix van G is. We kunnen r van de variabelen λ_i ($i = 1, \ldots, m$) éénduidig uitdrukken in λ_0 en m-r van de andere λ_i. In dit geval kan men λ_0 een willekeurige waarde gevan, en men stelt $\lambda_0 = 1$. Gegeven $\lambda_0 = 1$, de andere λ_i ($i = 1, \ldots, m$) zijn niet uniek omdat m-r van de λ_i willekeurige waarden gegeven mag worden.

4) $r(G_f) = r < m$ in $\vec{x}_0$, en $r(G_f) > r(G)$.

Kies r vergelijkingen van (4.2.23) zodat de matrix van de coëfficiënten een niet-singuliere $r \times r$ matrix bevat. Analoog als in 2) toont men aan dat voor elke oplossing van het r-tal vergelijkingen geldt $\lambda_0 = 0$. Als we $\lambda_0 = 0$ stellen, dan bestaan er λ_i ($i = 1, \ldots, m$), niet allen nul, die aan (4.2.23) voldoen. De λ_i zijn niet uniek, maar de verzameling van λ_i ($i = 1, \ldots, m$), die aan (4.2.23) voldoen, spannen een m-r+1-dimensionale deelruimte van de E_m op.

De noodzakelijke voorwaarden voor een punt $\vec{x}$ opdat $f(\vec{x})$ voor $\vec{x}$ een extremum op $\mathcal{V}$ aanneemt, kunnen als volgt bepaald worden.
Vorm de Lagrange functie

$$F(\vec{x},\vec{\lambda}) = \lambda_0 f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(\vec{x})] \qquad (4.2.24)$$

en stel de partiële afgeleiden van F naar de x_j en de λ_i $(i \neq 0)$ gelijk aan nul, dit geeft

$$\begin{aligned} &\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,\ldots, n \\ &b_i - g_i(\vec{x}) = 0, \qquad\qquad i = 1,\ldots, m. \end{aligned} \qquad (4.2.25)$$

We merken op dat $f(\vec{x})$ niet voor elk punt $\vec{x}$, waarbij een vektor $\vec{\lambda} \neq \vec{0}$ bestaat, zó dat $(\vec{x},\vec{\lambda})$ aan (4.2.25) voldoet, een extremum op $\mathcal{V}$ aanneemt. Wel bevat de verzameling van punten $\vec{x}$ waarvoor (4.2.25) oplosbaar is, (waarbij $\vec{\lambda} \neq \vec{0}$) al de punten $\vec{x}$ met $|\vec{x}|$ eindig waarvoor $f(\vec{x})$ een extremum op $\mathcal{V}$ aanneemt. (of $f(\vec{x})$ op $\mathcal{V}$ extrema aanneemt voor punten $\vec{x}$ met $|\vec{x}| \to \infty$ moet men apart nagaan). Tenslotte beschouwen we nog de functie $x_1^2 + x_2^2 + x_1$ uit voorbeeld 2. We zagen daar dat $x_1^2 + x_2^2 + x_1$ onder $x_1^3 - x_2^2 = 0$ een extremum voor $(0,0)$ aanneemt. Voor $(0,0)$ geldt $\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$. Volgens stelling 4.2.3 moet er een vektor $\vec{\lambda} \neq \vec{0}$ te vinden zijn, op een multiplicatieve constante na bepaald en met $\lambda_0 = 0$, zó dat $(\vec{x},\vec{\lambda})$ aan (4.2.25) voldoet. Dit is het geval. Bij $\vec{x} = \vec{0}$ bestaat de vektor $\vec{\lambda} = (0,\mu,0)$ zodat $(\vec{0},\vec{\lambda})$ aan (4.2.25) voldoet (ga na!). Hierbij $\mu \neq 0$, willekeurig reëel.

Niet-negatieve variabelen en ongelijkheden als bijvoorwaarden

Men kan het voorgaande generaliseren voor het geval de variabelen x_j niet-negatieve waarden aannemen en/of sommige van de voorwaarden ongelijkheden zijn.
We beschouwen eerst het volgende probleem. Bepaal de absolute extrema van

$$z = f(\vec{x}) \text{ voor } \vec{x} \geq \vec{0}$$

onder (4.2.26)

$$g_i(\vec{x}) = b_i \quad (i = 1, \ldots, m,\ m < n)$$

We nemen aan $f \in C^1$ en $g_i \in C^1$, $i = 1, \ldots, m$, over de E_n. Zij verder $\mathcal{V} = \{\vec{x} \mid g_i(\vec{x}) = b_i,\ 1 \leq i \leq m\}$. We gaan volgens een aantal stappen te werk om de absolute extrema van $f(\vec{x})$ voor $\vec{x} \geq \vec{0}$ op $\mathcal{V}$ te bepalen.

Stap 1. Negeer de voorwaarde $\vec{x} \geq \vec{0}$. We weten dat bij elk punt $\vec{x}$ (met $|\vec{x}|$ eindig), waarvoor $f(\vec{x})$ op $\mathcal{V}$ een extremum aanneemt, een vektor $\vec{\lambda} \neq \vec{0}$ bestaat zó dat $(\vec{x}, \vec{\lambda})$ aan (4.2.25) voldoet. Bepaal dus alle punten $\vec{x}$ binnen het niet-negatieve orthant waarbij een vektor $\vec{\lambda} \neq \vec{0}$ bestaat zó dat $(\vec{x}, \vec{\lambda})$ aan (4.2.25) voldoet en bereken de waarde van $f(\vec{x})$ voor elk van deze oplossingen. Vervolgens gaan we de randen van het niet-negatieve orthant onderzoeken.

Stap 2. Stel één van de variabelen x_j identiek gelijk aan nul. Bepaal dan de extrema van $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, n)$ onder $g_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$. We stellen de partiële afgeleiden van de bij dit probleem behorend Lagrange functie nul en bepalen dan alle oplossingen die binnen het niet-negatieve orthant van de E_{n-1} liggen. Voor elk van de oplossingen bepalen we de waarde van $f(\vec{x})$, waarbij $x_j = 0$. Daar we elk der n variabelen identiek nul kunnen stellen, moeten we in stap 2 dus n problemen oplossen.

Stap 3. Stel twee van de variabelen identiek nul, en los het verkregen probleem in n-2 variabelen en m voorwaarden op. We kunnen op $\binom{n}{2}$ manieren twee variabelen nul stellen. In stap 3 lossen we dus $\binom{n}{2}$ problemen op. Voor elke gevonden oplossing bepalen we de waarde van $f(\vec{x})$. Vervolgens onderzoeken we de problemen verkregen door drie variabelen nul te stellen. In het algemeen kunnen we niet meer dan n-m variabelen stellen omdat anders de voorwaarden niet meer vervuld zijn. (Tevens eist de toepassing van stelling 4.2.4 dat het aantal variabelen groter moet zijn dan het aantal voorwaarden waaraan de variabelen voldoen moeten). Wanneer n-m variabelen nul gesteld zijn, bepalen (vaak uniek) de voorwaarden de waarden van de overige m variabelen. Dus in de laatste stap bepalen we de waarde van f in de punten waarvoor n-m van de variabelen nul zijn. De punten $\vec{x} \geq \vec{0}$ waar $f(\vec{x})$ op $\mathcal{V}$ het absolute maximum resp. absolute minimum aanneemt zijn de punten waar de waarde van f het grootst

resp. het kleinst is. (aangenomen dat $f(\vec{x})$ de absolute extrema op $\mathcal{V}$ niet aanneemt voor punten $\vec{x}$ als $|\vec{x}| \to \infty$).

Wanneer niet al de variabelen niet-negatief zijn, behoeven we slechts de randen van het niet-negatieve orthant te beschouwen, behorende bij de niet-negatieve variabelen.

We zullen nu het geval beschouwen, waar de variabelen elke reële waarde mogen aannemen, maar waarbij sommige voorwaarden ongelijkheden zijn.

Bepaal de absolute extrema van

$$z = f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

onder

$$\begin{aligned} g_i(\vec{x}) &\leq b_i, \quad i = 1, \ldots, u \\ g_i(\vec{x}) &\geq b_i, \quad i = u+1, \ldots, v \\ g_i(\vec{x}) &= b_i, \quad i = v+1, \ldots, m \end{aligned} \tag{4.2.27}$$

We maken gelijkheden van de ongelijkheden door verschilvariabelen in te voeren. De ongelijkheid $g_i(\vec{x}) \leq b_i$ $(g_i(\vec{x}) \geq b_i)$ gaat over in $g_i(\vec{x}) + x_{si} = b_i$ $(g_i(\vec{x}) - x_{si} = b_i)$, waarbij $x_{si} \geq 0$ voor elke $\vec{x}$ die voldoet aan $g_i(\vec{x}) \leq b_i$ $(g_i(\vec{x}) \geq b_i)$.

Er bestaat een 1-1 afbeelding tussen de verzameling van punten die aan de oorspronkelijke voorwaarden voldoet en de verzameling van punten met niet-negatieve verschilvariabelen die aan het nieuwe stelsel gelijkheden voldoet.

Het oorspronkelijke probleem (4.2.27) is dus equivalent met

Bepaal de absolute extrema van

$$z = f(\vec{x})$$

onder

$$\begin{aligned} g_i(\vec{x}) + x_{si} &= b_i \quad i = 1, \ldots, u \\ g_i(\vec{x}) - x_{si} &= b_i \quad i = u+1, \ldots, v \\ g_i(\vec{x}) &= b_i \quad i = v+1, \ldots, m \\ x_{si} &\geq 0 \quad i = 1, \ldots, v. \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

Het probleem (4.2.27) is dus tot het type van het behandelde probleem (4.2.26) gebracht. Om de absolute extrema van f te bepalen moeten we zowel het inwendige beschouwen van het niet-negatieve orthant van de E^v, waar elke $x_{si} > 0$, als de randen waar één of meer $x_{si} \equiv 0$.
Als we het geval beschouwen dat elke $x_{si} > 0$ is, dan is de Lagrange functie

$$F(\vec{x},\vec{x}_s,\vec{\lambda}) = \lambda_0 f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{u} \lambda_i \left[b_i - x_{si} - g_i(\vec{x})\right] +$$

$$+ \sum_{i=u+1}^{v} \lambda_i \left[b_i + x_{si} - g_i(\vec{x})\right] + \sum_{i=v+1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g_i(\vec{x})\right].$$

Neemt men van F de partiële afgeleiden maar de x_{si} en stelt men deze nul, dan vindt men

$$\frac{\partial F}{\partial x_{si}} = -\lambda_i = 0 \quad i = 1,\ldots,u$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{si}} = \lambda_i = 0 \quad i = u+1,\ldots,v. \qquad (4.2.30)$$

In stap 2 stelt men één der x_{si}, bv. x_{st} identiek nul. Onder de nul gestelde partiële afgeleiden van de Lagrange functie van het verkregen probleem komt nu niet de gelijkheid $\frac{\partial F}{\partial x_{st}} = \pm \lambda_t = 0$ voor, wel de gelijkheden $\frac{\partial F}{\partial x_{si}} = \pm \lambda_i = 0$, $i = 1,\ldots,v$, $i \neq t$. λ_t behoeft nu niet nul te zijn. In stap 2 lost men v problemen op, voor elk probleem is precies één der $x_{si} \equiv 0$. Vervolgens stap 3, enz. Het bovenstaande toont het volgende aan. Laat $\vec{x}^{**}$ een punt zijn waarvoor $f(\vec{x})$ onder de voorwaarden (4.2.28) een extremum aanneemt. Zijn verder x_{si}^{**} de bij $\vec{x}^{**}$ behorende waarden van de verschilvariabelen. Uit het stapsgewijze oplossingsproces weten we dat $(\vec{x}^{**},\vec{x}_s^{**})$ een oplossing is van een bepaald probleem uit een zekere stap. Er bestaat verder een vektor $\vec{\lambda}^{**} = (\lambda_0^{**},\lambda_1^{**},\ldots,\lambda_m^{**}) \neq \vec{0}$ zodanig dat $(\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**})$ een oplossing is van het stelsel nul gestelde partiële afgeleiden van de Lagrange functie behorende bij het betreffende probleem uit de betreffende stap. Nu geldt: $x_{si}^{**} = 0$ of $\lambda_i^{**} = 0$, dus

$$\lambda_i^{**} x_{si}^{**} = 0, \quad i = 1,\ldots,v \qquad (4.2.31)$$

Opmerking:

Men kan probleem (4.2.27) ook op een andere wijze oplossen. Daartoe eerst het volgende. Laat z_m^{**} het absolute maximum (minimum) zijn van $z = f(\vec{x})$ onder $g_i(\vec{x})\{\leq = \geq\}b_i$, $i = 1,\ldots, m$. Stel dat we nog een voorwaarde $g_{m+1}(\vec{x})\{\leq = \geq\}b_{m+1}$ toevoegen, en laat z_{m+1}^{**} het absolute maximum (minimum) van $f(\vec{x})$ onder de m+1 voorwaarden zijn. Men gaat zelf direct na dat $z_{m+1}^{**} \leq z_m^{**}$ ($z_m^{**} \leq z_{m+1}^{**}$). We hebben gezien dat in stap 1 $\lambda_i = 0$ ($i = 1,\ldots, v$), hetgeen impliceert dat in (4.2.29) de bij λ_i ($i = 1,\ldots, v$) behorende termen wegvallen. Met andere woorden als de ongelijkheden inactief zijn (d.w.z. het = teken geldt niet) in het punt waar $f(\vec{x})$ een optimale waarde aanneemt, dan kunnen we net zo goed de ongelijkheden weglaten, wanneer we dit punt willen bepalen. Wanneer we één der x_{si} identiek nul stellen, betekent dit dat we één der ongelijkheden als gelijkheid behandelen. Nemen we deze bovenstaande opmerkingen in ogenschouw, dan kunnen we een andere wijze aangeven om (4.2.27) op te lossen.

Laat in (4.2.27) de ongelijkheden weg en bepaal de absolute extrema van $f(\vec{x})$ onder $g_i(\vec{x}) = b_i$, $i = v + 1,\ldots, m$. Als het gevonden punt (of punten), waarvoor f het absolute optimum aanneemt aan de ongelijkheden voldoet, dan hebben we een absoluut optimum voor probleem (4.2.27) gevonden. Wanneer één of meer van de gelijkheden niet vervuld zijn, kies dan één van de v ongelijkheden. Behandel deze ongelijkheid als gelijkheid, voeg deze aan de gelijkheden $g_i(\vec{x}) = b_i$ ($i = v + 1,\ldots, m$) toe en bepaal de absolute extrema van f onder dit stelsel gelijkheden. Als het punt, dat een absoluut extremum voor dit probleem oplevert, aan de overige ongelijkheden voldoet, dan geeft dit punt een absoluut extremum voor (4.2.27). Voldoet het punt niet, dan gaan we verder tot we alle combinaties van de gelijkheden $g_i(\vec{x}) = b_i$ ($i = v + 1,\ldots, m$) plus precies één als gelijkheid beschouwde ongelijkheid hebben geprobeerd. Als in dit stadium de absolute extrema voor (4.2.27) niet gevonden worden, dan moeten voor de absolute extrema minstens twee van de ongelijkheden actief zijn (d.w.z. = teken geldt). We voegen nu aan de gelijkheden $g_i(\vec{x}) = b_i$, $i = v + 1,\ldots, m$, twee als actief beschouwde ongelijkheden toe, enz., tot de absolute extrema van (4.2.27) gevonden zijn. Als de

componenten van $\vec{x}$ niet-negatief moeten zijn en er zijn voorwaarden die ongelijkheden zijn, dan kunnen we bovenstaande procedure volgen, waarbij we tevens bij elke stap, waar we de absolute extrema onder de actieve voorwaarden bepalen, de randen moeten onderzoeken waar één of meer x_j nul zijn. Het behoeft geen betoog dat al dit voorgaande in praktijk onuitvoerbaar is, door de enorme hoeveelheid berekeningen die erbij te kijken komen.

Fysische interpretatie van de multiplicatoren van Lagrange

We richten onze aandacht weer op het probleem

Bepaal de absolute extrema van

$$z = f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

onder (4.2.32)

$$g_i(\vec{x}) = b_i,\ i = 1, \ldots, m;\ m < n.$$

Stel dat $\vec{x}^*$ een punt is waar $f(\vec{x})$ een absoluut extremum op $\mathcal{V} = \{\vec{x} \mid g_i(\vec{x}) = b_i,\ 1 \leq i \leq m\}$ aanneemt, en stel $r(G) = m$ in $\vec{x}^*$.
Dan volgt uit stelling 4.2.4 dat een unieke vektor $\vec{\lambda}^* = (1, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ bepaald is zodat $(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$ voldoet aan (4.2.25). In het algemeen zullen de x_j^* en de λ_i^* $(1 \leq i \leq m)$ afhangen van de getallen b_i welke in (4.2.32) optreden.
Veronderstel dat elke x_j^* en λ_i^* een continu differentieerbare functie van $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ is in een ε-omgeving van $\vec{b}_0$.
Dan geldt:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \lambda_i^* \qquad (4.2.33)$$

waarbij $z^* = f(\vec{x}^*)$.

Bewijs: We nemen de partiële afgeleiden van $z^* = f(\vec{x}^*)$ naar de b_i voor punten $\vec{b}$ in de ε-omgeving van $\vec{b}_0$.
Uit de kettingregel volgt

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} \qquad (4.2.34)$$

Er geldt $g_k(\vec{x}^{**}) = b_k$, $k = 1, \ldots, m$.
Pas nu de kettingregel toe, dit geeft

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_j^{**}} \frac{\partial x_j^{**}}{\partial b_i} = \delta_{ik}$$

waarbij $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

of $$\delta_{ik} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_j^{**}} \frac{\partial x_j^{**}}{\partial b_i} = 0 \qquad i,k = 1, \ldots, m. \qquad (4.2.35)$$

Vermenigvuldig (4.2.35) met λ_k^{**}, sommeer over k en tel het resultaat bij (4.2.34) op, dan vindt men

$$\frac{\partial z^{**}}{\partial b_i} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{**} \delta_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j^{**}} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{**} \frac{\partial g_k}{\partial x_j^{**}} \right] \frac{\partial x_j^{**}}{\partial b_i} \qquad (4.2.36)$$

Nu voldoet $(\vec{x}^{**}, \vec{\lambda}^{**})$ aan (4.2.25), dus (4.2.36) wordt

$$\underline{\frac{\partial z^{**}}{\partial b_i} = \lambda_i^{**}} \qquad (4.2.37)$$

Vaak stelt z de winst of de kosten voor, en b_i het aantal fysische éénheden van produktiefactor i. In dit geval zijn de fysische dimensies van λ_i^{**} guldens per eenheid van produktiefactor i en λ_i^{**} kan opgevat worden als de prijs of de waarde per eenheid van factor i. Ruwweg gezegd, λ_i^{**} vertelt ons hoeveel de maximum winst of de minimumkosten veranderen als de hoeveelheid van bron i met een eenheid toeneemt.

<u>Stelling 4.2.6.</u> Laat $f(\vec{x})$ onder $g_i(\vec{x}) = b_i$, $1 \leq i \leq m$, $m < n$ voor $\vec{x}_0$ een relatief maximum aannemen, waarbij $r(G) = m$ in $\vec{x}_0$. Zij $F(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(\vec{x})]$. Uit stelling 4.2.2 weten we dat er een unieke $\vec{\lambda}_0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ is, zodat $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)$ voldoet aan (4.2.6) Veronderstel dat er een δ-omgeving $U_\delta(\vec{\lambda}_0)$ van $\vec{\lambda}_0$ in de E_m is en dat bij elke $\vec{\lambda} \in U_\delta(\vec{\lambda}_0)$ een unieke $\vec{x}^{**}$ $(= g(\vec{\lambda}))$ bestaat zó dat $F(\vec{x}, \vec{\lambda})$ een (vrij) relatief maximum in $\vec{x}^{**}$ bezit. Beschouw het probleem

Minimaliseer $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ naar $\vec{\lambda}$

onder

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\vec{x})}{\partial x_j} = 0,\ j = 1,\ldots,n \qquad (4.2.38)$$

Dit probleem heet de <u>duale</u> van het probleem

Maximaliseer $z = f(\vec{x})$

onder (4.2.39)

$g_i(\vec{x}) = b_i,\ i = 1,\ldots,m$

<u>Beweringen</u>:

1) In een omgeving van $\vec{x}_0$ geldt:

$$\min_{\vec{\lambda}} F(\vec{x},\vec{\lambda}) = \max_{\vec{x}} f(\vec{x}) \qquad (4.2.40)$$

waarbij we $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ voor $\vec{\lambda} \in U_\delta(\vec{\lambda}_0)$ minimaliseren naar $\vec{\lambda}$ onder (4.2.38) en we $f(\vec{x})$ maximaliseren onder (4.2.39).

2) $$f(\vec{x}_0) = \min_{\vec{\lambda}} \max_{\vec{x}} F(\vec{x},\vec{\lambda}) \qquad (4.2.41)$$

waarbij $\vec{\lambda} \in U_\delta(\vec{\lambda}_0)$.

3) In een omgeving van $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ in de E_{n+m} geldt

$$F(\vec{x},\vec{\lambda}_0) \leq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) = F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}) \qquad (4.2.42)$$

<u>Bewijs</u>:

1) $\mathcal{V} = \{\vec{x} \mid g_i(\vec{x}) = b_i,\ 1 \leq i \leq m\}$. $f(\vec{x})$ neemt voor $\vec{x}_0$ een relatief maximum op $\mathcal{V}$ aan, dus er bestaat een omgeving $U(\vec{x}_0)$ van $\vec{x}_0$ in de E_n, zodat

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0) \quad \text{voor} \quad \vec{x} \in \mathcal{V} \cap U(\vec{x}_0).$$

Beschouw het stelsel

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \qquad j = 1,\ldots,n \qquad (4.2.43)$$

Uit de gegevens volgt dat (4.2.43) voor elke $\vec{\lambda} \in U_\delta(\vec{\lambda}_0)$ een unieke oplossing $\vec{x}^{**}$ bezit, voor welk punt $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ een (vrij) maximum bezit. Het punt $\vec{x}^{**}$ is een functie van $\vec{\lambda}$, $\vec{x}^{**} = g(\vec{\lambda})$.
Stel $F(\vec{x}^{**},\vec{\lambda}) = h(\vec{\lambda})$.

Nu geldt: $$\max_{\vec{x}} F(\vec{x},\vec{\lambda}) = F(\vec{x}^{**},\vec{\lambda}) = h(\vec{\lambda}),\ \vec{\lambda} \in U_\delta(\vec{\lambda}_0) \qquad (4.2.44)$$

Merk op dat $h(\vec{\lambda}_0) = F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) = f(\vec{x}_0)$.
We zullen nu het gedrag van $h(\vec{\lambda})$ op $U_\delta(\vec{\lambda}_0)$ onderzoeken. Beschouw $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ voor vaste $\vec{\lambda} \in U_\delta(\vec{\lambda}_0)$. Merken we op dat $F(\vec{x},\vec{\lambda}) = f(\vec{x})$ voor $\vec{x} \in \mathcal{V}$, dan zien we

$$\max_{\vec{x}} F(\vec{x},\vec{\lambda}) = \max_{\vec{x}} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) = h(\vec{\lambda}_0),\ \vec{x} \in \mathcal{V} \cap U(\vec{x}_0) \qquad (4.2.45)$$

Daar $\max_{\vec{x}} F(\vec{x},\vec{\lambda}) \geq \max_{\vec{x} \in \mathcal{V} \cap U(\vec{x}_0)} F(\vec{x},\vec{\lambda})$ geldt:

$$h(\vec{\lambda}) \geq h(\vec{\lambda}_0) \quad \text{voor } \vec{\lambda} \in U_\delta(\vec{\lambda}_0)$$

Dus $h(\vec{\lambda})$ bezit een relatief minimum in $\vec{\lambda}_0$.
Uit (4.2.44) volgt dat $h(\vec{\lambda}) = F(\vec{x},\vec{\lambda})$ wanneer $\vec{x}$ en $\vec{\lambda}$ met elkaar verbonden zijn door (4.2.43), welk stelsel $\vec{x}$ uniek bepaalt voor elke $\vec{\lambda} \in U_\delta(\vec{\lambda}_0)$.
We zien dus dat $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ een relatief minimum in $\vec{\lambda}_0$ m.b.t. $\vec{\lambda}$ bezit onder de voorwaarden (4.2.43).
Verder geldt voor de omgeving $U(\vec{x}_0)$ van $\vec{x}_0$

$$\min_{\vec{\lambda}} F(\vec{x},\vec{\lambda}) = \max_{\vec{x}} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) = h(\vec{\lambda}_0) \qquad (4.2.46)$$

waarbij F geminimaliseerd en f gemaximaliseerd wordt onder (4.2.38) resp. (4.2.39).

2) Er geldt (4.2.44):

$$\max_{\vec{x}} F(\vec{x},\vec{\lambda}) = h(\vec{\lambda}),$$

en verder $$\min_{\vec{\lambda}} h(\vec{\lambda}) = h(\vec{\lambda}_0),\ \vec{\lambda} \in U_\delta(\vec{\lambda}_0).$$

Tevens is $f(\vec{x}_0) = h(\vec{\lambda}_0)$, dus

$$f(\vec{x}_0) = \min_{\vec{\lambda}} \max_{\vec{x}} F(\vec{x},\vec{\lambda}),\ \vec{\lambda} \in U_\delta(\vec{\lambda}_0)$$

Men zegt $f(\vec{x}_0)$ is een oplossing van min-max probleem.

3) Daar bij elke $\vec{\lambda} \in U_\delta(\vec{\lambda}_0)$ een punt $\vec{x}^{**}$ bestaat zó dat $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ in $\vec{x}^{**}$ een relatief maximum met betrekking tot $\vec{x}$ heeft, geldt in een omgeving van $\vec{x}_0$ in de E_n

$$F(\vec{x},\vec{\lambda}_0) \leq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) = f(\vec{x}_0).$$

Omdat $\vec{x}_0 \in \mathcal{V}$ geldt $F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}) = f(\vec{x}_0)$, dus $F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) = F(\vec{x}_0,\vec{\lambda})$. Dus in een omgeving van $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ in de E_{n+m} geldt:

$$F(\vec{x},\vec{\lambda}_0) \leq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) = F(\vec{x}_0,\vec{\lambda})$$

$F(\vec{x},\vec{\lambda})$ heeft dus een <u>zadelpunt</u> in $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$, waarbij in dit geval sprake is van een ontaarde vorm van een zadelpunt.
Zoals men weet luidt de definitie van een zadelpunt voor de functie $F(\vec{x},\vec{\lambda})$:

Men zegt dat de functie $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ een zadelpunt in $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ heeft, als er een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat voor alle $\vec{x}$, $|\vec{x} - \vec{x}_0| < \varepsilon$ en alle $\vec{\lambda}$, $|\vec{\lambda} - \vec{\lambda}_0| < \varepsilon$,

$$F(\vec{x},\vec{\lambda}_0) \leq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) \leq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}). \qquad (4.2.47)$$

<u>Opgave</u>. Beschouw als speciaal geval van (4.2.39) het L.P.-probleem

$$\max z = \vec{c}\vec{x}$$

onder

$$A\vec{x} = \vec{b},\ A\ m\times n\text{-matrix}$$

Toon aan dat (in overeenstemming met L.P., §5) het duale probleem gegeven wordt door:

$$\min Z = \vec{b}'\vec{\lambda}$$

onder

$$A'\vec{\lambda} = \vec{c}'$$

Aan het eind van deze paragraaf merken we tenslotte op dat de multiplicatorenmethode van Lagrange ons niet in staat stelt het L.P.-probleem op

te lossen. Stel het L.P.-probleem luidt: max (of min) $z = \vec{c}\vec{x}$ onder $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq \vec{0}$ waarbij A een m×n-matrix is (m < n) met r(A) = m. De methode van Lagrange vertelt ons wel dat in het algemeen een optimale oplossing alléén in een hoekpunt van de convexe verzameling van toegelaten oplossingen aangenomen wordt, maar Lagrange's methode levert geen procedure op om op een handige wijze, zoals de Simplexmethode doet, de hoekpunten af te tasten. We tonen dit niet aan (zie bv. G. Hadley, Nonlineair and Dynamic Programming, blz. 81, 82).

§3. Convexe en concave functies

Def. 4.3.1. De functie $f(\vec{x})$ heet convex over een convexe verzameling X in de E_n als voor elk tweetal punten $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X$ en voor alle λ, $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$f[\lambda\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}_1] \leq \lambda f(\vec{x}_2) + (1 - \lambda)f(\vec{x}_1) \qquad (4.3.1)$$

Geldt in (4.3.1) het < teken voor elk tweetal punten $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ en voor alle λ, $0 < \lambda < 1$, dan heet $f(\vec{x})$ sterk convex.

Def. 4.3.2. De functie $f(\vec{x})$ heet concaaf over een convexe verzameling X in de E_n als voor elk tweetal punten $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X$ en voor alle λ, $0 \leq \lambda \leq 1$

$$f[\lambda\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}_1] \geq \lambda f(\vec{x}_2) + (1 - \lambda)f(\vec{x}_1) \qquad (4.3.2)$$

Analoog als in def. 4.3.1 definieert men het begrip sterk concaaf.

Opmerkingen. Intuïtief, het oppervlak $z = f(\vec{x})$ is convex als het lijnsegment tussen elk tweetal punten $(\vec{x}_1, z_1)$, $(\vec{x}_2, z_2)$ op het oppervlak boven of op het oppervlak ligt. Het lijnsegment ligt onder of op het oppervlak als $z = f(\vec{x})$ concaaf is.
We definiëren convexiteit en concaviteit alléén m.b.t. convexe verzamelingen X in de E_n, opdat $\lambda\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}_1 \in X$ voor $0 \leq \lambda \leq 1$, als $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X$.
De convexe verzameling X, die voor ons van belang is, zal vaak de E_n zijn of het niet-negatieve orthant.
Als $f(\vec{x})$ convex op X is, dan is $-f(\vec{x})$ concaaf op X en omgekeerd.

Def. 4.3.3. Een kwadratische vorm $\vec{x}'A\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ heet positief definiet als $\vec{x}'A\vec{x} > 0$ voor elke $\vec{x}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$.
$\vec{x}'A\vec{x}$ heet positief semidefiniet als $\vec{x}'A\vec{x} \geq 0$ voor elke $\vec{x}$ en een $\vec{x} \neq \vec{0}$ bestaat waarvoor $\vec{x}'A\vec{x} = 0$.

Def. 4.3.4. Een kwadratische vorm $\vec{x}'A\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ heet negatief definiet als $\vec{x}'A\vec{x} < 0$ voor elke $\vec{x} \neq \vec{0}$. Als $\vec{x}'A\vec{x} \leq 0$ voor elke $\vec{x}$ en een $\vec{x} \neq \vec{0}$ bestaat waarvoor $\vec{x}'A\vec{x} = 0$ dan heet de kwadratische vorm negatief semidefiniet.

Opmerking. We mogen zonder beperking veronderstellen dat de matrix A symmetrisch is. Als A niet symmetrisch is, definieer dan $b_{ij} = b_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$, alle i,j. $B = ((b_{ij}))$ is symmetrisch en $\vec{x}'A\vec{x} = \vec{x}'B\vec{x}$.

Stelling 4.3.1. Een positief semidefiniete kwadratische vorm is een convexe functie over de E_n. Als de kwadratische vorm positief definiet is dan is het zelfs een sterk convexe functie over de E_n.
Een negatief semidefiniete kwadratische vorm is een concave functie over de E_n. Een negatief definiete vorm is sterk concaaf over de E_n.

Bewijs: We bewijzen alléén de bewering dat een positief semidefiniete kwadratische vorm convex over de E_n is. De overige beweringen bewijst men analoog.
Beschouw twee willekeurige punten $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E_n$ en een λ, $0 \leq \lambda \leq 1$. Als $\vec{x}_0 = \lambda\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}_1$, dan

$$\vec{x}_0'A\vec{x}_0 = [\lambda\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}_1]' \cdot A \cdot [\lambda\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}_1] =$$

$$= [\vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)]' \cdot A \cdot [\vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)] =$$

$$= \vec{x}_1'A\vec{x}_1 + 2\lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)'A\vec{x}_1 + \lambda^2(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)' \cdot A(\vec{x}_2 - \vec{x}_1).$$

Er geldt $\vec{x}'A\vec{x} \geq 0$ voor alle $\vec{x}$, dus voor $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda\vec{x}'A\vec{x} \geq \lambda^2\vec{x}'A\vec{x}$.
Waaruit volgt:

$$\vec{x}_0'A\vec{x}_0 \leq \vec{x}_1'A\vec{x}_1 + 2\lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)'A\vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)'A(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$$

of $$\vec{x}_0'A\vec{x}_0 \leq \vec{x}_1'A\vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)'A\vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)'A\vec{x}_2,$$

of $$\vec{x}_0'A\vec{x}_0 \leq \lambda\vec{x}_2'A\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}_1'A\vec{x}_1.$$

Dus een positief semidefiniete vorm is convex. Bedenken we dat $-\vec{x}'A\vec{x}$ negatief semidefiniet is als $\vec{x}'A\vec{x}$ positief semidefiniet is, dan zien we direct dat een negatief semidefiniete vorm concaaf over de E_n is.

Stelling 4.3.2. Stel dat de functies $f_j(\vec{x})$, $j = 1, \ldots, k$, convex (concaaf) over een convexe verzameling X in de E_n zijn. Dan is de functie

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{k} f_j(\vec{x})$$

ook convex (concaaf) over X.

Bewijs: Zelf.

Stelling 4.3.3. Als $f(\vec{x})$ convex òf concaaf over een convexe verzameling X in de E_n is en $f(\vec{x})$ is begrensd op X, dan is $f(\vec{x})$ continu in elk inwendig punt van X.

Bewijs: Stel $f(\vec{x})$ convex over X. Laat $\vec{x}_0$ een inwendig punt van X zijn, dan moeten we bewijzen dat bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat
$|f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x})| \leq \varepsilon$ als $|\vec{h}| \leq \delta$.
Laat $\mu_0 > 0$, zó dat $\{\vec{x} \mid |\vec{x} - \vec{x}_0| \leq \mu_0\} \subset X$.
Zij $\varepsilon > 0$, willekeurig.
Kies allereerst $|\vec{h}| \leq \mu_0$. Daar $f(\vec{x})$ convex is, geldt

$$f(\vec{x}) \leq \frac{f(\vec{x} + \vec{h})}{2} + \frac{f(\vec{x} - \vec{h})}{2}$$

of $$f(\vec{x}) - f(\vec{x} - \vec{h}) \leq f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) \qquad (4.3.3)$$

Als $n = \left[\frac{\mu_0}{|\vec{h}|}\right]$, d.w.z. n is het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan $\frac{\mu_0}{|\vec{h}|}$, dan is $n \geq 1$ en verder $\vec{x} \pm (\nu + 1)\vec{h} \in X$ voor $\nu = 0, \ldots, n - 1$.

Door herhaald toepassen van (4.3.3) leidt men af dat voor $\nu = 0, \ldots, n-1$ geldt

$$f(\vec{x} - \nu\vec{h}) - f(\vec{x} - (\nu+1)\vec{h}) \leq f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) \leq f(\vec{x} + (\nu+1)\vec{h}) - f(\vec{x} + \nu\vec{h}) \tag{4.3.4}$$

Tellen we de ongelijkheden (4.3.4) voor $\nu = 0$ tot en met $\nu = n-1$ op, dan vinden we

$$\frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x} - n\vec{h})}{n} \leq f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) \leq \frac{f(\vec{x} + n\vec{h}) - f(\vec{x})}{n} \tag{4.3.5}$$

Omdat $f(\vec{x})$ begrensd op X is, bestaat een $C > 0$ met $|f(\vec{x})| \leq C$, alle $\vec{x} \in X$. Uit (4.3.5) volgt nu

$$|f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x})| \leq \frac{2C}{n}$$

Daar $n \leq \frac{\mu_0}{|\vec{h}|}$ en $\frac{2C}{n} \leq \varepsilon$ als $n \geq \frac{2C}{\varepsilon}$, geldt:

$$|f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x})| \leq \varepsilon \quad \text{als} \quad |\vec{h}| \leq \delta = \min\left(\mu_0, \frac{\varepsilon\mu_0}{2C}\right)$$

Vervolgens bewijzen we de belangrijke stelling:

<u>Stelling 4.3.4</u>. Als $f(\vec{x}) \in C^1$ over het inwendige van een convexe verzameling X in de E_n en $f(\vec{x})$ is <u>convex</u> over X, dan

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)' \cdot \nabla f(\vec{x}_1) \leq f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1) \tag{4.3.6}$$

voor elk punt $\vec{x}_2 \in X$, en elk inwendig punt $\vec{x}_1 \in X$.
Als $f(\vec{x})$ concaaf is, dan wordt (4.3.6):

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)' \cdot \nabla f(\vec{x}_1) \geq f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1) \tag{4.3.7}$$

<u>Bewijs</u>: We beschouwen alleen het geval $f(\vec{x})$ convex over X, analoog beschouwt men het geval dat $f(\vec{x})$ concaaf is.
Daar $f(\vec{x})$ convex is, geldt voor alle λ, $0 < \lambda \leq 1$

$$f[\lambda\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}_1] = f[\vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)] \leq \lambda f(\vec{x}_2) + (1 - \lambda)f(\vec{x}_1)$$

(4.3.8)

of $$\frac{f[\vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)] - f(\vec{x}_1)}{\lambda} \leq f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1) \qquad (4.3.9)$$

Uit stelling 4.1.5a volgt:

$$f[\vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)] = f(\vec{x}_1) + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)' \cdot \nabla f[\vec{x}_1 + \lambda\theta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)],$$

$$0 \leq \theta \leq 1$$

(4.3.9) wordt dus

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)' \cdot \nabla f[\vec{x}_1 + \lambda\theta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)] \leq f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1)$$

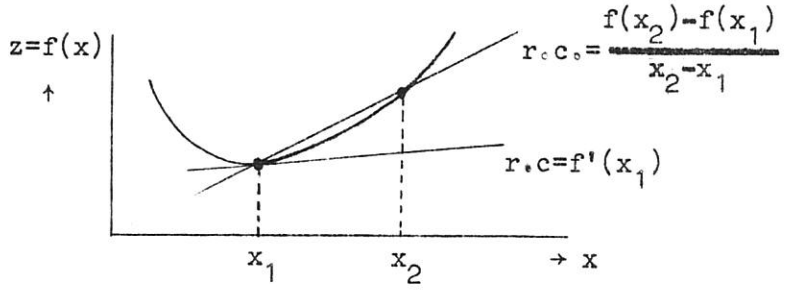
Laat nu $\lambda \to 0$ gaan en bedenk dat de eerste partiële afgeleiden van f continu zijn, dan ziet men

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)' \cdot \nabla f(\vec{x}_1) \leq f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1) \qquad (4.3.10)$$

Opmerking. Als f een functie van één variabele is, dan is (4.3.10) te schrijven als

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad x_1 < x_2$$

Intuïtief, de helling van de raaklijn in x_1 is minder dan of gelijk aan de helling van de lijn door de punten $[x_1, f(x_1)]$ en $[x_2, f(x_2)]$.



r.c. = richtingscoëfficiënt

Stelling 4.3.5. Als de functie $f(\vec{x})$ convex is over het niet-negatieve orthant van de E_n, dan is de verzameling van punten
$V = \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) \leq b,\ \vec{x} \geq \vec{0}\}$ convex, als V niet leeg is.
Is $f(\vec{x})$ concaaf over het niet-negatieve orthant dan is
$W = \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) \geq b,\ \vec{x} \geq \vec{0}\}$ concaaf, als W niet leeg is.

Bewijs: We bewijzen alléén het eerste deel van de stelling.
Als V uit één punt bestaat, dan is V per definitie convex. Laat nu $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ dan moeten we bewijzen dat $\vec{x}_0 = \lambda\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}_1 \in V$ voor alle λ, $0 \leq \lambda \leq 1$.
Triviaal $\vec{x}_0 \geq \vec{0}$. Nu nog aantonen $f(\vec{x}_0) \leq b$.
$f(\vec{x})$ is convex, dus

$$f(\vec{x}_0) = f\left[\lambda\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}_1\right] \leq \lambda f(\vec{x}_2) + (1 - \lambda)f(\vec{x}_1)$$

Er geldt $f(\vec{x}_1) \leq b$, $f(\vec{x}_2) \leq b$, verder $0 \leq \lambda \leq 1$, dus
$f(\vec{x}_2) \leq \lambda b$, $(1 - \lambda)f(\vec{x}_1) \leq (1 - \lambda)b$, waaruit volgt:

$$f(\vec{x}_0) \leq \lambda b + (1 - \lambda)b = b.$$

Dus V is convex.
Merk op dat $\{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = b,\ \vec{x} \geq 0\}$ in het algemeen niet convex is als $f(\vec{x})$ convex is.
Daar de doorsnee van eindig veel convexe verzamelingen weer convex is, geldt:

Stelling 4.3.6. Laat $W = \{\vec{x} \mid f_i(\vec{x}) \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m_1;\ f_i(\vec{x}) \geq b_i,\ i = m_1 + 1, \ldots, m;\ \vec{x} \geq \vec{0}\}$ niet leeg zijn. W is convex als $f_i(\vec{x})$, $i = 1, \ldots, m_1$, convex is over het niet-negatieve orthant van de E_n en $f_i(\vec{x})$, $i = m_1 + 1, \ldots, m$, concaaf is over het niet-negatieve orthant van de E_n.

Stelling 4.3.7. Laat $f(\vec{x})$ een convexe functie over het niet-negatieve orthant van de E_n zijn. Stel $f(\vec{x}) \in C^1$. Laat b een constante zijn. Dan is het raakvlak aan het (n-1)-dimensionale oppervlak $f(\vec{x}) = b$ in een punt $\vec{x}_0 \geq \vec{0}$, dat voldoet aan $f(\vec{x}_0) = b$ een draaghypervlak van de convexe verzameling $K = \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) \leq b,\ \vec{x} \geq \vec{0}\}$ in $\vec{x}_0$.

Als $f(\vec{x})$ concaaf is, dan is het raakvlak aan $f(\vec{x}) = b$ in $\vec{x}_0 \geq \vec{0}$ met $f(\vec{x}_0) = b$ een draaghypervlak van de convexe verzameling $K = \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) \geq b, \vec{x} \geq \vec{0}\}$ in $\vec{x}_0$.

Bewijs: Zie L.P. blz. 59 voor definitie van draaghypervlak. Uit de analytische meetkunde is bekend dat het raakvlak in $\vec{x}_0$ aan het oppervlak $f(\vec{x}) = b$ gegeven wordt door:

$$\vec{x}' \cdot \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{x}_0' \cdot \nabla f(\vec{x}_0) \qquad (4.3.11)$$

We moeten nu aantonen dat $\vec{w}' \cdot \nabla f(\vec{x}_0) \leq \vec{x}_0' \cdot \nabla f(\vec{x}_0)$ als $\vec{w}$ een willekeurig punt uit K is. Dit volgt direct uit stelling 4.3.4. Neem in (4.3.6) $\vec{w} = \vec{x}_2$ en $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$ en bedenk $f(\vec{w}) \leq b$, $f(\vec{x}_0) = b$, dan vindt men

$$(\vec{w} - \vec{x}_0)' \cdot \nabla f(\vec{x}_0) \leq 0$$

of

$$\vec{w}' \cdot \nabla f(\vec{x}_0) \leq \vec{x}_0' \cdot \nabla f(\vec{x}_0).$$

Extrema van convexe en concave functies

De extrema van convexe en concave functies bezitten een aantal prettige eigenschappen, die ons van pas komen in de theorie van de niet-lineaire programmering.

Stelling 4.3.8. Laat $f(\vec{x})$ een convexe functie over een gesloten convexe verzameling X in de E_n zijn.
Dan geldt:

1) Elk relatief minimum van $f(\vec{x})$ op X is tevens het absolute minimum van $f(\vec{x})$ op X.
2) De verzameling van punten waar $f(\vec{x})$ op X het absolute minimum aanneemt is convex.
3) Als $f(\vec{x})$ sterk convex op X is, dan is het punt waar $f(\vec{x})$ het absolute minimum op X aanneemt uniek.
4) Als $f(\vec{x}) \in C^1$ voor elk punt van X, dan neemt $f(\vec{x})$ het absolute minimum op X aan in ieder punt $\vec{x}_0$ dat voldoet aan $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$.

Bewijs:

1) Laat $f(\vec{x})$ een relatief minimum op X voor $\vec{x}_0$ aannemen. Stel dat $f(\vec{x})$ het absolute minimum op X niet aanneemt in $\vec{x}_0$ maar in $\vec{x}^{**}$, dus

$f(\vec{x}^{**}) < f(\vec{x}_0)$. Neem aan $|\vec{x}^{**}|$ eindig.

[Als $f(\vec{x})$ het absolute minimum op X aanneemt in de limiet als $|\vec{x}| \to \infty$, dan verloopt het bewijs analoog. Kiest men N voldoende groot, dan bestaat er een punt $\vec{x}^{**}$ met $N \leq |\vec{x}^{**}| < \infty$ zó dat $f(\vec{x}^{**}) < f(\vec{x}_0)$.]

We leiden nu een tegenspraak af, door aan te tonen dat elke omgeving van $\vec{x}_0$ een punt $\vec{x}$ bevat met $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$. Tegenspraak, omdat $f(\vec{x})$ een relatief minimum in $\vec{x}_0$ bezit. $f(\vec{x})$ is convex, dus voor alle λ, $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$f[\lambda\vec{x}^{**} + (1 - \lambda)\vec{x}_0] \leq \lambda f(\vec{x}^{**}) + (1 - \lambda)f(\vec{x}_0) \qquad (4.3.12)$$

Daar $f(\vec{x}^{**}) < f(\vec{x}_0)$, geldt voor alle λ, $0 < \lambda < 1$,

$$f[\lambda\vec{x}^{**} + (1 - \lambda)\vec{x}_0] < \lambda f(\vec{x}_0) + (1 - \lambda)f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) \quad (4.3.13)$$

Het is voldoende aan te tonen dat elke ε-omgeving van $\vec{x}_0$, met $\varepsilon < |\vec{x}^{**} - \vec{x}_0|$ een punt $\vec{x}$ bevat met $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$.

Als $0 < \lambda < \dfrac{\varepsilon}{|\vec{x}^{**} - \vec{x}_0|} < 1$ dan ligt $\vec{x} = \lambda\vec{x}^{*} + (1 - \lambda)\vec{x}_0$ in de ε-omgeving van $\vec{x}_0$, en uit (4.3.13) volgt

$$f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0).$$

Tegenspraak, waarmee aangetoond dat $f(\vec{x})$ in $\vec{x}_0$ het absolute minimum op X aanneemt.

2) Triviaal, als het absolute minimum in precies één punt aangenomen wordt. Stel dat het absolute minimum van $f(\vec{x})$ op X in twee verschillende punten $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ aangenomen wordt.

Nu neemt $f(\vec{x})$ het absolute minimum op X aan in elk punt $\vec{x} = \lambda\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}_1$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Immers $f(\vec{x})$ is convex en $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$, dus

$$f(\vec{x}) = f[\lambda\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}_1] \leq \lambda f(\vec{x}_2) + (1 - \lambda)f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$$

Daar $f(\vec{x})$ niet kleiner dan $f(\vec{x}_2)$ kan zijn, geldt $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_2) = f(\vec{x}_1)$. Dus de verzameling van punten waar $f(\vec{x})$ het absolute minimum op X aanneemt, is convex.

Gevolgen: a) Als het absolute minimum in twee verschillende punten aangenomen wordt, dan wordt het in oneindig veel punten aangenomen.

b) Er kunnen niet twee (of meer) verschillende punten zijn waar $f(\vec{x})$ een sterk relatief minimum (tevens absoluut minimum) aanneemt. Immers

in elk punt van de verbindingslijn van de twee punten zou $f(\vec{x})$ dezelfde waarde aannemen. Tegenspraak met de definitie van sterk minimum.

3) $f(\vec{x})$ sterk convex op X. Stel dat $f(\vec{x})$ het absolute minimum op X aanneemt in twee verschillende punten $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$.
Beschouw $\vec{x}_3 = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}$.
Er geldt:

$$f(\vec{x}_3) < \frac{f(\vec{x}_1)}{2} + \frac{f(\vec{x}_2)}{2} = f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2).$$

Tegenspraak.

4) $f(\vec{x}) \in C^1$ voor elk punt van X. Laat voor $\vec{x}_0 \in X$ gelden dat $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.
Laat $\vec{x}$ een willekeurig punt van X zijn.
Stellen we in (4.3.6) $\vec{x}_2 = x$ en $\vec{x}_1 = x_0$ dan zien we:

$$0 \leq f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$$

dus

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0).$$

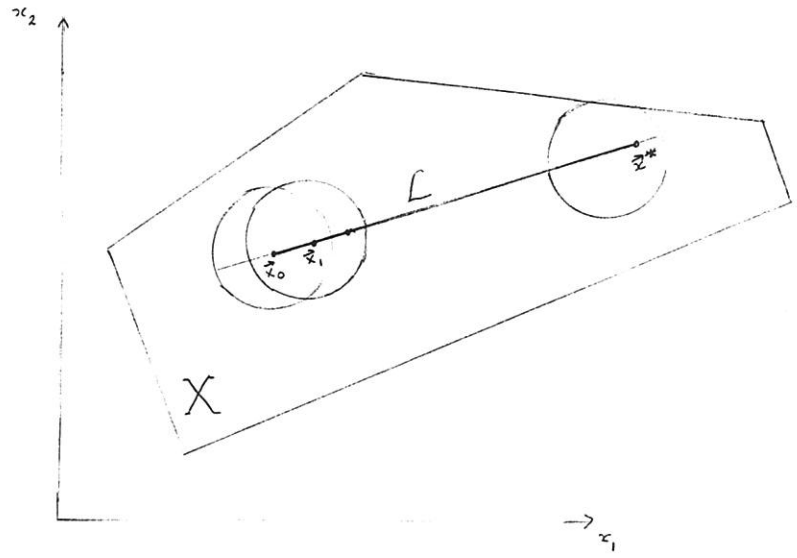
Waarmee aangetoond dat $f(\vec{x})$ het absolute minimum op X aanneemt voor elke $\vec{x}_0$ die aan $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ voldoet.
Vervolgens geven we een stelling betreffende de maxima van convexe functies.

<u>Stelling 4.3.9</u>. Laat X een gesloten convexe verzameling zijn, die van onder begrensd is. Als het absolute maximum van de convexe functie $f(\vec{x})$ op X een eindige waarde heeft, dan neemt $f(\vec{x})$ het absolute maximum op X aan in één of meer hoekpunten van X.

<u>Bewijs</u>: Voor definitie hoekpunt, zie definitie 2.2.23.
We tonen eerst aan dat $z = f(\vec{x})$ constant op X is als $f(\vec{x})$ het absolute maximum op X aanneemt in een inwendig punt $\vec{x}_0$ van X. Daar $\vec{x}_0$ inwendig punt van X is, bestaat een ε-omgeving van $\vec{x}_0$ die geheel in X bevat is. Laat $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_0$ een willekeurig punt uit die ε-omgeving zijn. Het punt $\vec{x}_2 = 2\vec{x}_0 - \vec{x}_1$ ligt dan ook in de ε-omgeving (immers $|\vec{x}_2 - \vec{x}_0| = |\vec{x}_1 - \vec{x}_0|$) en verder $\vec{x}_0 = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}$. $f(\vec{x})$ is convex op X, dus

$$f(\vec{x}_0) \leq \frac{f(\vec{x}_1)}{2} + \frac{f(\vec{x}_2)}{2} \qquad (4.3.14)$$

Omdat $f(\vec{x})$ het absolute maximum in $\vec{x}_0$ aanneemt, geldt $f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$. We zien dus dat $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ voor elk punt $\vec{x}$ dat behoort tot een ε-omgeving van $\vec{x}_0$, die geheel in X bevat is. Laat $\vec{x}^{**}$ een willekeurig punt in X zijn, dan moeten we aantonen $f(\vec{x}^{**}) = f(\vec{x}_0)$. Dit is het geval als $\vec{x}^{**}$ tot een ε-omgeving van $\vec{x}_0$ behoort, die geheel in X bevat is. Veronderstel nu dat $\vec{x}^{**}$ niet in zo'n ε-omgeving ligt. Kies een $\varepsilon_0 > 0$ zó dat de ε_0-omgeving van $\vec{x}_0$ geheel in X bevat is. $\vec{x}^{**}$ ligt niet in deze ε_0-omgeving, dus $|\vec{x}^{**} - \vec{x}_0| \geq \varepsilon_0$.



Het lijnsegment L dat $\vec{x}_0$ en $\vec{x}^{**}$ verbindt, wordt gegeven door

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda(\vec{x}^{**} - \vec{x}_0), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

De ε-omgeving van $\vec{x}_0$ bevat een interval van L, geef dit interval aan met I_0. Voor elk punt $\vec{x} \in I_0$ geldt $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$. Als $\vec{x}^{**} \notin I_0$ kies dan $\vec{x}_1 \in I_0$:

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \frac{0{,}9\varepsilon_0}{|\vec{x}^{**} - \vec{x}_0|}(\vec{x} - \vec{x}_0) \qquad (4.3.15)$$

Beschouw vervolgens een ε_0-omgeving van $\vec{x}_1$. Deze ε_0-omgeving van $\vec{x}_1$ bevat het interval I_1 van L. Als $\vec{x}$ een willekeurig punt van I_1 is, dan

geldt (ga na!):

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \frac{\lambda\varepsilon_0}{|\vec{x}^{**} - \vec{x}_0|}(\vec{x}^{**} - \vec{x}_0),\ 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad (4.3.16)$$

Men kan (4.3.16) ook schrijven als

$$\vec{x}_1 = \tfrac{1}{2}\vec{x} + \tfrac{1}{2}\left[\vec{x}_1 - \frac{\lambda\varepsilon_0}{|\vec{x}^{**} - \vec{x}_0|}(\vec{x}^{**} - \vec{x}_0)\right] \qquad (4.3.17)$$

Het punt $\vec{u}_1 = \vec{x}_1 - \frac{\lambda\varepsilon_0}{|\vec{x}^{**} - \vec{x}_0|}(\vec{x}^{**} - \vec{x}_0)$ behoort tot de ε_0-omgeving van $\vec{x}_0$, dus $f(\vec{u}_1) = f(\vec{x}_0)$.
Omdat $f(\vec{x})$ convex over X is, geldt $f(\vec{x}_1) \leq \frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}f(\vec{u}_1)$ of $f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})$, immers $f(\vec{x}_1) = f(\vec{u}_1) = f(\vec{x}_0)$.
Waaruit volgt $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ voor elke $\vec{x} \in I_1$. Als $\vec{x}^{**} \in I_1$, dan $f(\vec{x}^{**}) = f(\vec{x}_0)$. Als $\vec{x}^{**} \notin I_1$, beschouw dan $\vec{x}_2 \in I_1$,

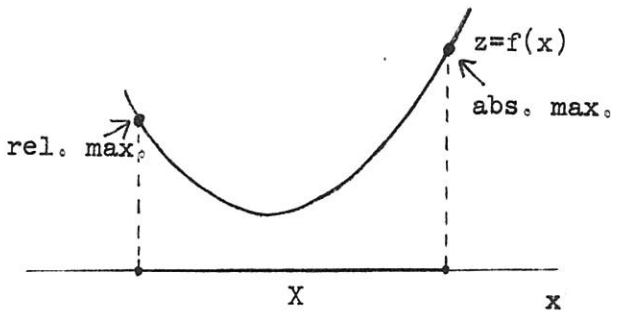
$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \frac{0{,}9\varepsilon_0}{|\vec{x}^{**} - \vec{x}_0|}(\vec{x}^{**} - \vec{x}_0) \qquad (4.3.18)$$

De ε_0-omgeving van $\vec{x}_2$ bevat het interval I_2 van L.
Analoog als boven toont men aan $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$, alle $\vec{x} \in I_2$. Als $\vec{x}^{**} \in I_2$, dan zijn we klaar. Als $\vec{x}^{**} \notin I_2$, dan zetten we gevolgde procédé voort.
Na een eindig aantal stappen (bv. in te zien met de overdekkingsstelling van Heine-Borel) vinden we een punt $\vec{x}_n$, waarbij geldt $\vec{x}^{**} \in I_n$. Dan is aangetoond $f(\vec{x}^{**}) = f(x_0)$, dus $f(\vec{x})$ constant op X.
X is van onder begrensd, dus X bezit minstens één hoekpunt (stelling 2.2.18).
We hebben dus bewezen dat $f(\vec{x})$ in tenminste één hoekpunt het absolute maximum op X aanneemt, voor het geval dat $f(\vec{x})$ het absolute maximum op X in een inwendig punt van X aanneemt.
Veronderstel nu dat $f(\vec{x})$ het absolute maximum op X niet in een inwendig punt van X aanneemt, maar in een randpunt $\vec{x}_0$ van X. Als $\vec{x}_0$ een hoekpunt is, dan zijn we klaar. Als $\vec{x}_0$ niet een hoekpunt is, beschouw dan de doorsnee van X met een draaghypervlak H in $\vec{x}_0$. De doorsnee van X met het draaghypervlak H is een gesloten convexe verzameling T_0 en T_0 bevat tenminste één hoekpunt van X, omdat X van onder begrensd is. Merk op dat T_0

in een (n-1)-dimensionale ruimte H ligt. Beschouw T_0 nu als een verzameling in een ruimte van dimensie n-1. Als $\vec{x}_0$ een inwendig punt van T_0 is met betrekking tot de (n-1)-dimensionale ruimte, dan weten we op grond van voorgaande dat $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ op T_0. T_0 bevat tenminste één hoekpunt van X, dus $f(\vec{x})$ neemt het absolute minimum op X aan in tenminste één hoekpunt. Als $\vec{x}_0$ een randpunt van T_0 is, beschouw dan T_1, de doorsnee van T_0 met een draaghypervlak aan T_0 in $\vec{x}_0$. Beschouw T_1 als een verzameling in een (n-2)-dimensionale ruimte, enz.
Tenslotte vinden we dat er een hoekpunt van X is waar $f(\vec{x})$ het absolute minimum op X aanneemt.

Opmerkingen.

1) De convexe functie $f(\vec{x})$ kan geen sterk relatief maximum op X aannemen in een inwendig punt $\vec{x}_0$ van X. (volgt uit (4.3.14)).
2) We hebben aangetoond dat de convexe functie $f(\vec{x})$ het absolute maximum op X aanneemt in tenminste één hoekpunt van X, maar het kan gebeuren dat er tevens hoekpunten zijn waar $f(\vec{x})$ relatieve maxima verschillend van het absolute maximum aanneemt (zie figuur hieronder). Dit in tegenstelling tot het lineaire programmeringsprobleem, waar elk relatief extreem het absolute extreem is van de objectfunctie. Dit volgt uit stelling 4.3.8, 4.3.10, 1) als men bedenkt dat $z = \vec{c}.\vec{x}$ zowel convex als concaaf is.
3) De stellingen (4.3.8) en (4.3.9) worden intuïtief duidelijk als we een plaatje van een convexe functie beschouwen. We tekenen een convexe functie van één variabele.



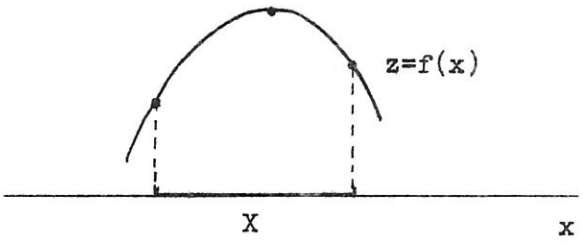
Tenslotte formuleren we de stellingen 4.3.8 en 4.3.10 voor het geval dat $f(\vec{x})$ concaaf is.

Stelling 4.3.10. Laat X een gesloten convexe verzameling in de E_n zijn en zij $f(\vec{x})$ concaaf over X. Dan geldt:

1) Elk relatief maximum van $f(\vec{x})$ op X is tevens het absolute maximum van $f(\vec{x})$ op X.
2) De verzameling van punten waar $f(\vec{x})$ op X het absolute maximum aanneemt is convex.
3) Als $f(\vec{x})$ sterk concaaf is op X, dan is het punt waar $f(\vec{x})$ het absolute maximum op X aanneemt uniek.
4) Als $f(\vec{x}) \in C^1$ voor elk punt van X, dan neemt $f(\vec{x})$ het absolute maximum op X aan in elk punt $\vec{x}_0$ dat voldoet aan $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$.
5) Als X tevens van onder begrensd is en het absolute minimum van $f(\vec{x})$ op X is eindig, dan neemt $f(\vec{x})$ het absolute minimum op X aan in tenminste één hoekpunt van X.

Bewijs: Een maximum (minimum) van $f(\vec{x})$ is een minimum (maximum) van $-f(\vec{x})$. Als $f(\vec{x})$ concaaf is, dan is $-f(\vec{x})$ convex.

Opmerking. De stelling is intuïtief duidelijk aan een plaatje van een convexe functie.



§4. Kuhn-Tucker theorie

Als $f(\vec{x})$ onder $g_i(\vec{x}) = b_i$, $1 \leq i \leq m$ in $\vec{x}^{**}$ een maximum aanneemt, en de functies f en g_i voldoen aan zekere voorwaarden, dan weten we uit stelling 4.2.6.3° dat $(\vec{x}^{**}, \vec{\lambda}^{**})$ een zadelpunt is van de Lagrangefunctie $F(\vec{x},\vec{\lambda})$. Stel het probleem luidt: bepaal het absolute maximum van $f(\vec{x})$ onder $g_i(\vec{x}) \{\leq = \geq\} b_i$, $1 \leq i \leq m$, $\vec{x} \geq \vec{0}$. Wanneer de functies f en g_i aan bepaalde voorwaarden voldoen, zullen we later zien dat het probleem dan equivalent is met het bepalen van een zadelpunt van een Lagrangefunctie.

Noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor een zadelpunt

We memoreren eerst de definitie van een zadelpunt, die we in §2 gegeven hebben. Men zegt dat een functie $F(\vec{x},\vec{\lambda})$, $\vec{x}$ een n-component en $\vec{\lambda}$ een m-component vektor, een zadelpunt in $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ heeft als

$$F(\vec{x},\vec{\lambda}_0) \leq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) \leq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}) \qquad (4.4.1)$$

voor alle $\vec{x}$ in een ε-omgeving van $\vec{x}_0$, en alle $\vec{\lambda}$ in een ε-omgeving van $\vec{\lambda}_0$. Als (4.4.1) geldt voor alle $\vec{x}$ en $\vec{\lambda}$ dan spreekt men van een globaal zadelpunt in $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$.

We zullen nu deze definitie uitbreiden voor het geval zekere componenten van $\vec{x}$ en $\vec{\lambda}$ niet-negatief moeten zijn, andere niet-positief moeten zijn, terwijl een derde categorie elke reële waarde aannemen mag.

Schrijf $\vec{x} = \left[\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}\right]$ en $\vec{\lambda} = \left[\vec{\lambda}^{(1)}, \vec{\lambda}^{(2)}, \vec{\lambda}^{(3)}\right]$.

Veronderstel: $\vec{x}^{(1)} \geq \vec{0}$, $\vec{\lambda}^{(1)} \geq \vec{0}$ en $\vec{x}^{(2)} \leq \vec{0}$, $\vec{\lambda}^{(2)} \leq \vec{0}$ terwijl de componenten van $\vec{x}^{(3)}$ en $\vec{\lambda}^{(3)}$ elke reële waarde aannemen mogen.

Neem aan dat $\vec{x}^{(1)}$ s componenten heeft, $\vec{x}^{(2)}$ t-s componenten en $\vec{x}^{(3)}$ n-t componenten. Neem verder aan dat $\vec{\lambda}^{(1)}$ u componenten heeft, $\vec{\lambda}^{(2)}$ v-u componenten en $\vec{\lambda}^{(3)}$ m-v componenten.

Laat W_1 de verzameling van punten $\vec{x}$ zijn zodat de componenten van $\vec{x}$ aan bovenstaande voorwaarden voldoen, laat W_2 de verzameling van punten $\vec{\lambda}$ zijn zodat de componenten van $\vec{\lambda}$ aan de bovenstaande voorwaarden voldoen.

Laat tenslotte W de verzameling van punten $(\vec{x},\vec{\lambda})$ zijn met $\vec{x} \in W_1$ en $\vec{\lambda} \in W_2$.

Def. 4.4.1. Men zegt dat de functie $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ een zadelpunt heeft in $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ voor $(\vec{x},\vec{\lambda}) \in W$ als $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) \in W$, en er een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat (4.4.1) geldt voor alle $\vec{x} \in W_1$ in een ε-omgeving van $\vec{x}_0$ en alle $\vec{\lambda} \in W_2$ in een ε-omgeving van $\vec{\lambda}_0$.
Als (4.4.1) geldt voor alle $\vec{x} \in W_1$, alle $\vec{\lambda} \in W_2$ dan spreken we van een globaal zadelpunt.

Opmerking. In deze definitie is $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ een willekeurige functie, die dus niet een Lagrangefunctie behoeft te zijn.

Veronderstel $F \in C^1$. Als $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ een zadelpunt in $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ voor $(\vec{x},\vec{\lambda}) \in W$ heeft, dan volgt uit de definitie van zadelpunt en stelling 4.1.8, dat $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ voldoet aan

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) = 0, \; j = t+1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) = 0, \; i = v+1, \ldots, m$$

daar de componenten $t+1, \ldots, n$ van $\vec{x}$ en de componenten $v+1, \ldots, m$ van $\vec{\lambda}$ elke reële waarde aannemen mogen.
Als we dus F als een functie van een x_k, $t+1 \leq k \leq n$, beschouwen en $x_j = x_j^0$, $j \neq k$, $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_0$ stellen dan heeft F in een omgeving van x_k^0 een gedaante zoals in figuur 4.1 weergegeven.

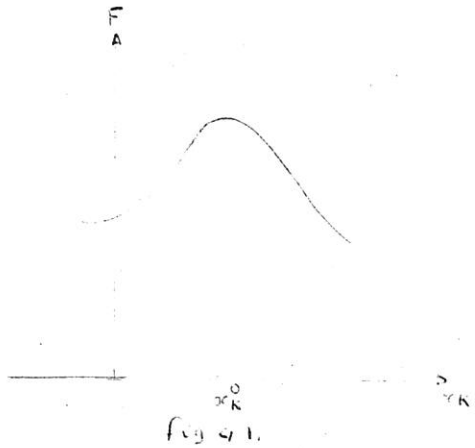


fig 4.1.

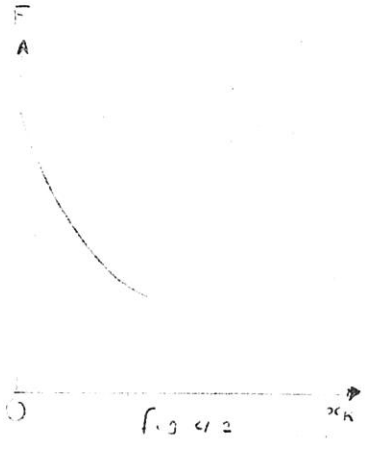


fig 4.2

Als $x_k^0 \neq 0$, waarbij $k \in \{1, \ldots, t\}$ dan geldt:

$$\frac{\partial F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)}{\partial x_k} = 0.$$

Immers, stel in $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ de variabelen $x_j = x_j^0$, $j \neq k$, $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_0$, dan geeft dit de functie $h(x_k)$. Daar $x_k^0 \neq 0$ volgt uit de definitie van zadelpunt dat er een omgeving van x_k^0 bestaat, waar $h(x_k) \leq h(x_k^0)$. Pas nu stelling 4.1.8 op de functie $h(x_k)$ toe. Dit geeft

$$\frac{dh(x_k^0)}{dx_k} = \frac{\partial F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)}{\partial x_k} = 0.$$

Evenzo geldt $\frac{\partial F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)}{\partial \lambda_r} = 0$, als $\lambda_r^0 \neq 0$, waarbij $r \in \{1, \ldots, v\}$.

We zullen vervolgens nagaan wat van $\frac{\partial F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)}{\partial x_k}$ gezegd kan worden als $x_k^0 = 0$, waarbij $k \in \{1, \ldots, t\}$.

Neem eerst aan $k \in \{1, \ldots, s\}$, dus x_k moet niet-negatief zijn. Dan geldt

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) \leq 0 \qquad (4.4.2).$$

Bewijs. Stel $\frac{\partial F}{\partial x_k} > 0$ in $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)$. Daar $\frac{\partial F}{\partial x_k}$ continu is, bestaat een $\varepsilon_0 > 0$ zó dat voor alle punten $(\vec{x},\vec{\lambda})$ in de ε_0-omgeving van $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)$ geldt $\frac{\partial F}{\partial x_k} > 0$.

Kies een ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, en beschouw in de ε-omgeving punten van de vorm $(\vec{x}_0 + h\vec{e}_k, \vec{\lambda}_0)$, $h > 0$. Uit de stelling van Taylor voor een functie van één variabele volgt:

$$F(\vec{x}_0 + h\vec{e}_k, \vec{\lambda}_0) = F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) + h \frac{\partial}{\partial x_k} F(\vec{x}_0 + \theta h\vec{e}_k, \vec{\lambda}_0), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Het punt $(\vec{x}_0 + \theta h\vec{e}_k, \vec{\lambda}_0)$ behoort tot de ε-omgeving van $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)$, dus $\frac{\partial}{\partial x_k} F(\vec{x}_0 + \theta h\vec{e}_k, \vec{\lambda}_0) > 0$, waaruit volgt

$$F(\vec{x}_0 + h\vec{e}_k, \vec{\lambda}_0) > F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0), \text{ alle } h,\ 0 < h < \varepsilon. \qquad (4.4.3).$$

Dus elke ε-omgeving van $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ bevat punten $(\vec{x},\vec{\lambda}_0) \in W$ waarvoor (4.4.3) geldt. Tegenspraak met het feit dat een omgeving van $\vec{x}_0$ bestaat, zodat voor $\vec{x} \in W_1$ en in die omgeving geldt $F(\vec{x},\vec{\lambda}_0) \leq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$. Dus (4.4.2) moet gelden.
Stellen we $x_j = x_j^0$, $j \neq k$ en $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_0$ in F en beschouwen we F als functie van x_k, dan vinden we een soort curve als in figuur 4.2 weergegeven. Uit deze figuur volgt direct dat (4.4.2) geldt.
Op dezelfde wijze toont men aan dat $\dfrac{\partial F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)}{\partial x_k} \geq 0$ als $x_k^0 = 0$, waarbij $k \in \{s+1, \ldots, t\}$.
Analoog bewijst men (aan een plaatje direct te zien), als $\lambda_r^0 = 0$,

$$\frac{\partial F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)}{\partial \lambda_r} \geq 0, \quad r = 1, \ldots, u$$

$$\frac{\partial F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)}{\partial \lambda_r} \leq 0, \quad r = u+1, \ldots, v.$$

We hebben in voorgaande aangetoond dat $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) = 0$ of $x_j^0 = 0$, en $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) = 0$ of $\lambda_i^0 = 0$.

We kunnen nu een stelsel noodzakelijke voorwaarden geven opdat $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ in $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ voor $(\vec{x},\vec{\lambda}) \in W$ een zadelpunt heeft, waarbij we aannemen $F \in C^1$.

Stelling 4.4.1. Stel de functie $F(\vec{x},\vec{\lambda}) \in C^1$. Als $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ een zadelpunt heeft in $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ voor $(\vec{x},\vec{\lambda}) \in W$ dan moet $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ voldoen aan:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_j} F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) \leq 0 && j = 1, \ldots, s \\
&\frac{\partial}{\partial x_j} F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) \geq 0 && j = s+1, \ldots, t \\
&\frac{\partial}{\partial x_j} F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) = 0 && j = t+1, \ldots, n.
\end{aligned} \qquad (4.2.4)$$

$$x_j^0 \geq 0,\ j = 1, \ldots, s;\ x_j^0 \leq 0,\ j = s+1, \ldots, t;\ -\infty < x_j^0 < \infty,$$
$$j = t+1, \ldots, n \qquad (4.4.5)$$

$$x_j^0 \frac{\partial}{\partial x_j} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = 0,\ j = 1, \ldots, n \qquad (4.4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) \geq 0,\ i = 1, \ldots, u$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) \leq 0,\ i = u+1, \ldots, v \qquad (4.4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = 0,\ i = v+1, \ldots, m.$$

$$\lambda_i^0 \geq 0,\ i = 1, \ldots, u;\ \lambda_i^0 \leq 0,\ i = u+1, \ldots, v;\ -\infty < \lambda_i^0 < \infty,$$
$$i = v+1, \ldots, m \qquad (4.4.8)$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = 0,\ i = 1, \ldots, m. \qquad (4.4.9)$$

Def. 4.4.2. De gradient van $F(\vec{x}, \vec{\lambda})$ met betrekking tot $\vec{x}$ beschouwd in $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)$ is de kolomvector

$$\nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) \right).$$

Def. 4.4.3. De gradient van $F(\vec{x}, \vec{\lambda})$ met betrekking tot $\vec{\lambda}$ beschouwd in $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)$ is de kolomvector

$$\nabla_{\vec{\lambda}} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0), \ldots, \frac{\partial}{\partial \lambda_m} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) \right).$$

Uit deze definities volgt dat we (4.4.6) en (4.4.9) schrijven kunnen als

$$\vec{x}_0' \cdot \nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = 0, \text{ respectievelijk} \qquad (4.4.10)$$

$$\vec{\lambda}_0' \cdot \nabla_{\vec{\lambda}} F(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = 0. \qquad (4.4.11)$$

We zullen vervolgens een stelsel voldoende voorwaarden geven opdat $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ een zadelpunt heeft voor $(\vec{x},\vec{\lambda}) \in W$ in een punt $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$, dat aan (4.4.4) t/m (4.4.9) voldoet.

Stelling 4.4.2. Laat $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ een punt zijn dat aan (4.4.4) t/m (4.4.9) voldoet. Als een ε-omgeving van $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ bestaat zó dat voor punten $(\vec{x},\vec{\lambda}_0) \in W$ in die omgeving,

$$F(\vec{x},\vec{\lambda}_0) \leq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) + (\vec{x}-\vec{x}_0)' \cdot \nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0), \qquad (4.4.12)$$

en voor punten $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}) \in W$ in die omgeving,

$$F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}) \geq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) + (\vec{\lambda}-\vec{\lambda}_0)' \cdot \nabla_{\vec{\lambda}} F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0), \qquad (4.4.13)$$

dan heeft $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ een zadelpunt in $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ voor $(\vec{x},\vec{\lambda}) \in W$.
Als (4.4.12) en (4.4.13) gelden voor alle $\vec{x} \in W_1$, $\vec{\lambda} \in W_2$ dan heeft $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ een globaal zadelpunt in $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ voor $(\vec{x},\vec{\lambda}) \in W$.

Bewijs. Daar $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ aan (4.4.6), oftewel (4.4.10), voldoet geldt

$$(\vec{x}-\vec{x}_0)' \cdot \nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) = x' \cdot \nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0).$$

Als $\vec{x} \in W_1$, dan is $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, s$; $x_j \leq 0$, $j = s+1, \ldots, t$.
Verder voldoet $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ aan (4.4.4), dus

$$(\vec{x}-\vec{x}_0)' \cdot \nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) = x' \cdot \nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) \leq 0. \qquad (4.4.14)$$

Als (4.4.12) geldt, dan volgt m.b.v. (4.4.14) dat $F(\vec{x},\vec{\lambda}_0) \leq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ voor $\vec{x} \in W_1$ en in de ε-omgeving van $\vec{x}_0$. Evenzo toont men aan $F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) \leq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda})$ voor $\vec{\lambda} \in W_2$ en in de ε-omgeving van $\vec{\lambda}_0$. Dus $F(\vec{x},\vec{\lambda}_0) \leq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0) \leq F(\vec{x}_0,\vec{\lambda})$ voor alle $\vec{x} \in W_1$ en in een ε-omgeving van $\vec{x}_0$ en alle $\vec{\lambda} \in W_2$ en in een ε-omgeving van $\vec{\lambda}_0$.
Waarmee aangetoond is dat F een zadelpunt heeft in $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ voor $(\vec{x},\vec{\lambda}) \in W$. Het is duidelijk dat het een globaal zadelpunt is als (4.4.12) en (4.4.13) gelden voor alle $\vec{x} \in W_1$ en alle $\vec{\lambda} \in W_2$.

Op het eerste gezicht doen de voorwaarden (4.4.12) en (4.4.13) enigszins geforceerd aan. We zullen laten zien dat deze voorwaarden tevoorschijn komen als F bepaalde convexe en concave kenmerken bezit.

Stelling 4.4.3. Laat $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ een punt zijn dat aan (4.4.4) t/m (4.4.9) voldoet. Als $F(\vec{x}, \vec{\lambda}_0)$ een concave functie is van $\vec{x}$ voor $\vec{x} \in W_1$ en in een ε-omgeving van $\vec{x}_0$ en $F(\vec{x}_0,\vec{\lambda})$ een convexe functie van $\vec{\lambda}$ voor $\vec{\lambda} \in W_2$ en in een ε-omgeving van $\vec{\lambda}_0$, dan heeft $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ een zadelpunt in $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$ voor $(\vec{x},\vec{\lambda}) \in W$.
Het is een globaal zadelpunt als $F(\vec{x},\vec{\lambda}_0)$ een concave functie van $\vec{x}$ is voor alle $\vec{x} \in W_1$ en $F(\vec{x}_0,\vec{\lambda})$ een convexe functie van $\vec{\lambda}$ is voor alle $\vec{\lambda} \in W_2$.

Bewijs. Uit stelling 4.3.4 volgt dat (4.4.12) en (4.4.13) gelden. Pas dan stelling 4.4.2 toe.

Stelling van Kuhn-Tucker

Beschouw het probleem max $z = f(\vec{x})$ onder $g_i(\vec{x})\{\leq = \geq\} b_i$, $i = 1, \ldots, m$, $\vec{x} \geq \vec{0}$. Zij $V = \{\vec{x} \mid g_i(\vec{x})\{\leq = \geq\} b_i,\ 1 \leq i \leq m;\ \vec{x} \geq \vec{0}\}$, Wanneer de verzameling V aan bepaalde regelmatigheidseisen voldoet kan men noodzakelijke voorwaarden afleiden, opdat $f(\vec{x})$ in $\vec{x}^{**}$ een absoluut maximum op V aanneemt. We zullen geen wiskundig strenge afleiding van de noodzakelijke voorwaarden geven. Onze afleiding is een andere dan die gegeven door Kuhn en Tucker.

Stelling 4.4.4. Beschouw het niet-lineaire programmeringsprobleem

$$\max z = f(\vec{x})$$

onder

$$\begin{aligned} g_i(\vec{x}) &\leq b_i,\ i = 1, \ldots, u \\ g_i(\vec{x}) &\geq b_i,\ i = u+1, \ldots, v \\ g_i(\vec{x}) &= b_i,\ i = v+1, \ldots, m \\ \vec{x} &\geq \vec{0}. \end{aligned} \qquad (4.4.15)$$

Veronderstel $f \in C^1$, $g_i \in C^1$, $i = 1, \ldots, m$, over het niet-negatieve orthant.

Zij $V = \{\vec{x} \mid g_i(\vec{x}) \leq b_i,\ 1 \leq i \leq u;\ g_i(\vec{x}) \geq b_i,\ u+1 \leq i \leq v;$
$g_i(\vec{x}) = b_i,\ v+1 \leq i \leq m;\ \vec{x} \geq \vec{0}\}$.

Stel dat $f(\vec{x})$ het absolute maximum op V in $\vec{x}^{**}$ aanneemt. Als de verzameling V aan bepaalde regelmatigheidseisen voldoet, dan bestaat er een vektor $\vec{\lambda}^{**}$ met

$\lambda_i^* \geq 0,\ i = 1, \ldots, u;\quad \lambda_i^* \leq 0,\ i = 1+u, \ldots, v;\ -\infty < \lambda_i^* < \infty,$

$i = v+1, \ldots, m,$

zó dat

$$\nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}^{**}, \vec{\lambda}^{**}) = \nabla f(\vec{x}^{**}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(\vec{x}^{**}) \leq \vec{0} \qquad (4.4.16)$$

$$\vec{x}^{**\prime} \cdot \nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}^{**}, \vec{\lambda}^{**}) = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \left[\frac{\partial f(\vec{x}^{**})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\vec{x}^{**})}{\partial x_j}\right] = 0 \qquad (4.4.17)$$

$$\vec{\lambda}^{**\prime} \cdot \nabla_{\vec{\lambda}} F(\vec{x}^{**}, \vec{\lambda}^{**}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \left[b_i - g_i(\vec{x}^{**})\right] = 0 \qquad (4.4.18)$$

waarbij $F(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g_i(\vec{x})\right]$.

Verder geldt dat het punt $[\vec{x}^{**}, \vec{\lambda}^{**}]$ aan de noodzakelijke voorwaarden voldoet opdat de Lagrangefunctie $F(\vec{x}, \vec{\lambda})$ een zadelpunt heeft in $[\vec{x}^{**}, \vec{\lambda}^{**}]$ voor $\vec{x} \geq \vec{0}$, $\vec{\lambda} \in W_2$.

Bewijs. Door invoeren van verschilvariabelen brengen we probleem (4.4.15) in de equivalente vorm:

$$\max z = f(\vec{x})$$

onder

$$g_i(\vec{x}) + x_{si} = b_i,\ i = 1, \ldots, u \qquad (4.4.19)$$

$$g_i(\vec{x}) - x_{si} = b_i,\ i = u+1, \ldots, v$$

$$g_i(\vec{x}) \qquad = b_i,\ i = v+1, \ldots, m$$

$$[\vec{x}, \vec{x}_s] \geq \vec{0}.$$

$f(\vec{x})$ neemt het absolute maximum op V in $\vec{x}^{**}$ aan. Het punt $\vec{x}^{**}$ bepaalt d.m.v. (4.4.19) $\vec{x}_s^{**}$. We voeren de volgende indicesverzamelingen in *):

J is de deelverzameling van de indices j, j = 1, ..., n, die de indices j bevat waarvoor $x_j^* > 0$.

$\hat{J}$ is de deelverzameling die de indices j bevat waarvoor $x_j^* = 0$.

I is de deelverzameling van de indices i = 1, ..., v, die de indices i bevat waarvoor voorwaarde i uit (4.4.15) actief (d.w.z. = teken geldt) in $\vec{x}^{**}$ is.

$\hat{I}$ is de deelverzameling die de indices i bevat waarvoor voorwaarde i inactief (d.w.z. = teken geldt niet) in $\vec{x}^{**}$ is.

We hebben in §2,blz.230 gezien hoe we probleem (4.4.19) oplossen, dus hoe we het punt $\vec{x}^{**}$ bepalen waar $f(\vec{x})$ het absolute maximum op V aanneemt. We vinden $[\vec{x}^{**}, \vec{x}_s^{**}]$ bij het oplossen van een bepaald probleem uit een bepaalde stap. Veronderstel dat $r(G) = r(Gf) = m$ in $[\vec{x}^{**}, \vec{x}_s^{**}]$, waarbij G alleen kolommen bevat behorende bij positieve x_j^*, x_{si}^*. Dus we kunnen $\lambda_0^* = 1$ stellen in de Lagrangefunctie behorende bij het betreffende probleem uit de betreffende stap. Uit stelling 4.2.4 en hetgeen we gezegd hebben op blz. 230 t/m 232 volgt dat er m Lagrangemultiplicatoren λ_i^* bestaan, zó dat

$$\frac{\partial f(\vec{x}^{**})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\vec{x}^{**})}{\partial x_j} = 0,\ j \in J;\ \lambda_i^* = 0,\ i \in \hat{I}. \quad (4.4.20)$$

We zullen nu nagaan wat van het teken van

$$\frac{\partial f(\vec{x}^{**})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\vec{x}^{**})}{\partial x_j},\ j \in \hat{J} \quad (4.4.21)$$

te zeggen valt.

---

*) Merk op dat onder de indicesverzamelingen lege voor kunnen komen.

Om het teken van (4.4.21) te onderzoeken veranderen we $\vec{x} \geq \vec{0}$ in een stelsel van n gelijkheden door opnieuw verschilvariabelen in te voeren. Als we een verschilvariabele $x_{s,v+j}$ toevoegen dan gaat $x_j \geq 0$ over in $x_j - x_{s,v+j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$. In probleem (4.4.19) vervangen we $\vec{x} \geq \vec{0}$ door de n gelijkheden $x_j - x_{s,v+j} = 0$. We verkrijgen dan een probleem met m+n gelijkheden als voorwaarden en 2n+v variabelen. De verschilvariabelen x_{si}, $x_{s,v+j}$ moeten niet-negatief zijn, maar de componenten van $\vec{x}$ mogen nu elke reële waarde aannemen. Als $r(G) = r(Gf) = m$ in $[\vec{x}^*, \vec{x}_s^*]$ voor het oorspronkelijke systeem van m gelijkheden, dan is $r(G) = r(Gf) = m+n$ in $[\vec{x}^*, \vec{x}_s^*, \vec{x}_{s,v}^*]$ voor het systeem van de m+n gelijkheden. Lossen we nu het probleem met de m+n voorwaarden en de 2n+v variabelen op zoals we probleem (4.4.19) oplosten, dan vinden we dat er m+n Lagrangemultiplicatoren λ_i^*, $i = 1, \ldots, m+n$, bestaan, zó dat

$$\frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} - \lambda_{m+j}^* = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\lambda_i^* = 0,\ i \in \hat{I},\ \lambda_{m+j}^* = 0,\ j \in J \quad \text{(zie 4.2.31)}.$$

Daar $\lambda_{m+j}^* = 0$, $j \in J$, vinden we opnieuw (4.4.20).
Beschouw nu eens:

$$\frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} - \lambda_{m+j}^* = 0,\ j \in \hat{J}. \qquad (4.4.22)$$

Wanneer bepaalde voorwaarden, waarop we niet nader ingaan, vervuld zijn, dan geldt

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \lambda_i^*,\ i = 1, \ldots, m+n. \qquad (4.4.23)$$

We zullen aannemen dat deze afgeleiden bestaan.
Beschouw de voorwaarden $x_j \geq b_{m+j}$, waarbij voor ons probleem (4.4.15) $b_{m+j} = 0$. Laat nu eens b_{m+j} van nul negatief worden. De waarde van z^* neemt dan toe of blijft hetzelfde. Immers vervangt men in probleem (4.4.15) $x_j \geq 0$ door $x_j \geq b_{m+j}$, waarbij $b_{m+j} < 0$, dan voldoet elke $\vec{x} \in V$ zeker aan de zo verkregen nieuwe voorwaarden.

Bijgevolg $\frac{\partial z^{*}}{\partial b_{m+j}} \leq 0$, oftewel $\lambda^{*}_{m+j} \leq 0$.

Uit (4.4.22) volgt dan:

$$\frac{\partial f(\vec{x}^{**})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{*} \frac{\partial g_i(\vec{x}^{**})}{\partial x_j} \leq 0, \quad j \in \hat{J}. \tag{4.4.24}$$

Analoog bepalen we het teken van λ_i^{*} ($i = 1, \ldots, m$). Laten we b_i, voor $i = 1, \ldots, u$, toenemen, dan kan z^{*} alleen toenemen of hetzelfde blijven. Dus $\lambda_i^{*} = \frac{\partial z^{*}}{\partial b_i} \geq 0$, $i = 1, \ldots, u$. Laten we b_i afnemen, voor $i = u+1, \ldots, v$ dan kan z^{*} alleen toenemen of hetzelfde blijven, dus $\lambda_i^{*} = \frac{\partial z^{*}}{\partial b_i} \leq 0$, $i = u+1, \ldots, v$. Voor $i = v+1, \ldots, m$ kan λ_i^{*} elk teken aannemen.
Vatten we de gevonden resultaten samen dan komen we tot de noodzakelijke voorwaarden vermeld in de stelling.
Zij $F(\vec{x},\vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \sum_{i+1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(\vec{x})]$. Als $f(\vec{x})$ in $\vec{x}^{**}$ het absolute maximum op V aanneemt, waarbij aan zekere voorwaarden voldaan moet zijn, dan bestaat een vektor $\vec{\lambda}^{**}$ met

$$\lambda_i^{*} \leq 0, \ i = 1, \ldots, u; \quad \lambda_i^{*} \geq 0, \ i = u+1, \ldots, v; \quad -\infty < \lambda_i^{*} < \infty, \quad i = v+1, \ldots, m, \tag{4.4.25}$$

zó dat

$$\nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}) = \nabla f(\vec{x}^{**}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{*} \nabla g_i(\vec{x}^{**}) \leq \vec{0}. \tag{4.4.26}$$

Dit volgt uit (4.4.20) en (4.4.24). Hierbij zijn de componenten j met $j \in J$ van $\nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**})$ gelijk aan nul.
Bedenke men $x_j^{*} = 0$ voor $j \in \hat{J}$, dan ziet men dat tevens gelden moet

$$\vec{x}^{**} \cdot \nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}) = \sum_{j=1}^{n} x_j^{*} \{\frac{\partial f(\vec{x}^{**})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{*} \frac{\partial g_i(\vec{x}^{**})}{\partial x_j}\} = 0. \tag{4.4.27}$$

Verder weten we uit (4.4.20) dat $\lambda_i^{*} = 0$ voor $i \in \hat{I}$. Voor $i \in I$ geldt per definitie $g_i(\vec{x}^{**}) = b_i$. Dus $[\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}]$ moet tevens voldoen aan:

$$\vec{\lambda}^{**} \cdot \nabla_{\vec{\lambda}} F(\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{*} \left[b_i - g_i(\vec{x}^{**})\right] = 0. \quad (4.4.28)$$

Wanneer men (4.4.25) t/m (4.4.28) gecombineerd met $\frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}) =$ $= b_i - g_i(\vec{x}^{**})$ met (4.4.4) t/m (4.4.9) vergelijkt dan ziet men dat $[\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}]$ aan de noodzakelijke voorwaarden voldoet opdat $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ een zadelpunt heeft in $[\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}]$ voor $\vec{x} \geq \vec{0}$ en $\vec{\lambda} \in W_2$.

Het is vrij eenvoudig om voldoende voorwaarden aan te geven opdat $f(\vec{x})$ een absoluut maximum in $\vec{x}^{**}$ op V aanneemt.

Stelling 4.4.5. We beschouwen het niet-lineaire programmeringsprobleem (4.4.15). Laat $f \in C^1$ en $g_i \in C^1$, $1 \leq i \leq m$, over het niet-negatieve orthant. Laat $\vec{x}^{**}$ een punt van V zijn.
Als een vektor $\vec{\lambda}^{**}$ bestaat zó dat $[\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}]$ aan (4.4.25) t/m (4.4.28) voldoen, en als $f(\vec{x})$ concaaf is over het niet-negatieve orthant, terwijl $g_i(\vec{x})$ convex is als $\lambda_i^{*} > 0$ en $g_i(\vec{x})$ concaaf is als $\lambda_i^{*} < 0$, $i = 1, \ldots, m$ dan neemt $f(\vec{x})$ het absolute maximum op V in $\vec{x}^{**}$ aan.

Bewijs. Bedenke men dat $-h(\vec{x})$ concaaf is als $h(\vec{x})$ convex is, en omgekeerd dan ziet men direct in dat uit de gegevens van de stelling volgt, dat

$$F(\vec{x},\vec{\lambda}^{**}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{*} \left[b_i - g_i(\vec{x})\right] \quad (4.4.29)$$

een concave functie van $\vec{x}$ is voor alle $\vec{x} \geq \vec{0}$.
$F(\vec{x}^{**},\vec{\lambda})$ is een lineaire functie van $\vec{\lambda}$ en is dus convex voor alle $\vec{\lambda}$.
Daar $[\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}]$ aan (4.4.25) t/m (4.4.28) voldoet volgt uit stelling (4.4.3) dat $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ een globaal zadelpunt in $[\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}]$ heeft voor $\vec{x} \geq \vec{0}$, $\vec{\lambda} \in W_2$, Dus:

$$F(\vec{x},\vec{\lambda}^{**}) \leq F(\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}) \leq F(\vec{x}^{**},\vec{\lambda}) \quad (4.4.30)$$

voor alle $\vec{x} \geq \vec{0}$, $\vec{\lambda} \in W_2$.
Laat $\vec{x}$ een willekeurig punt uit V zijn. Voor $i = v+1, \ldots, m$ geldt $g_i(\vec{x}) = b_i$, dus $\lambda_i^{*}\left[b_i - g_i(\vec{x})\right] = 0$.

Voor $i = 1, \ldots, u$ geldt $b_i \geq g_i(\vec{x})$ en $\lambda_i^* \geq 0$, dus $\lambda_i^*[b_i - g_i(\vec{x})] \geq 0$.
Voor $i = u+1, \ldots, v$ geldt $b_i \leq g_i(\vec{x})$ en $\lambda_i^* \leq 0$, dus $\lambda_i^*[b_i - g_i(\vec{x})] \geq 0$.
Waarmee we aangetoond hebben dat voor elke $\vec{x} \in V$,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*[b_i - g_i(\vec{x})] \geq 0.$$

Uit (4.2.29) volgt dat voor elke $\vec{x} \in V$ geldt: $f(\vec{x}) \leq F(\vec{x},\vec{\lambda}^*)$.
Uit (4.2.28) volgt $F(\vec{x}^*,\vec{\lambda}^*) = f(\vec{x}^*)$. Uit (4.4.30) weten we
$F(\vec{x},\vec{\lambda}^*) \leq F(\vec{x}^*,\vec{\lambda}^*)$. Hetgeen impliceert $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}^*)$ voor alle $\vec{x} \in V$.
Dus $f(\vec{x})$ neemt het absolute maximum op V in $\vec{x}^*$ aan.

Opmerking bij stelling 4.4.5

De vektor $\vec{\lambda}^*$ is een optimale oplossing van het volgende lineaire programmeringsprobleem:

$$\text{minimaliseer } F(\vec{x}^*,\vec{\lambda})$$

onder

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_j} \quad , \quad j \in J \qquad (4.4.31)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} \geq \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_j} \quad , \quad j \in \hat{J}$$

$\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, u$; $\lambda_i \leq 0$, $i = u+1, \ldots, v$; $-\infty < \lambda_i < \infty$,
$i = v+1, \ldots, m$.

Bewijs. triviaal. In het bewijs van stelling 4.4.5 hebben we gevonden dat voor alle $\vec{\lambda} \in W_2$ geldt: $F(\vec{x}^*,\vec{\lambda}^*) \leq F(\vec{x}^*,\vec{\lambda})$.

Kuhn en Tucker gaven een andere afleiding van de noodzakelijke voorwaarden, ze omschreven de regelmatigheidseisen waaraan V voldoen moet d.m.v. de "constraint qualification".
Het probleem dat ze beschouwden luidt:
Maximaliseer $z = f(\vec{x})$ onder $\hat{g}_i(\vec{x}) \geq 0$, $i = 1, \ldots, M$; $\vec{x} \geq \vec{0}$.
Over dit probleem bewezen Kuhn en Tucker de volgende stellingen:

Stelling 4.4.4a. Laat $V = \{\vec{x} \mid \hat{g}_i(\vec{x}) \geq 0,\ 1 \leq i \leq M;\ \vec{x} \geq \vec{0}\}$. Als $\vec{x}^{**} \in V$ een optimale oplossing is dan bestaat er een vektor $\vec{\lambda}^{**} \geq \vec{0}$ zó dat vervuld is aan

$$\nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}^{**}, \vec{\lambda}^{**}) \leq \vec{0} \tag{4.4.32}$$

$$\vec{x}^{**\prime} \cdot \nabla_{\vec{x}} F(\vec{x}^{**}, \vec{\lambda}^{**}) = 0 \tag{4.4.33}$$

$$\vec{\lambda}^{**\prime} \cdot \nabla_{\vec{\lambda}} F(\vec{x}^{**}, \vec{\lambda}^{**}) = 0 \tag{4.4.34}$$

waarbij $F(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \hat{g}_i(\vec{x})$,

aangenomen dat de constraint qualification geldt:
Laten I en $\hat{J}$ gedefiniëerd zijn als op blz. 260 . De verzameling V is zodanig dat voor elke $\vec{h}$, die voldoet aan:

$$\vec{h}' \cdot \nabla g_i(\vec{x}^{**}) \geq 0,\ i \in I;\ h_j \geq 0,\ j \in \hat{J},$$

in een ε-omgeving van $\vec{x}^{**}$ een differentiëerbare curve $\vec{x} = \vec{\phi}(\tau)$ bestaat, die in V bevat is, waarbij $\vec{h}$ de richting van de raaklijn aan de curve $\vec{x}^{**}$ is.
We nemen hierbij aan dat de parameterrepresentatie van de curve zodanig is dat $\vec{\phi}(0) = \vec{x}^{**}$ en dat τ toeneemt als men van $\vec{x}^{**}$ langs de curve gaat. De raaklijn in $\vec{x}^{**}$ aan de curve heeft de richting $\vec{h}$, m.a.w. $\frac{dx_j}{d\tau} = \mu h_j$, $j = 1, \ldots, n$, waarbij μ een positief getal is.
Het bewijs van de stelling geven we niet. Zie b.v. G. Hadley, Nonlineair and Dynamic Programming, blz. 194 e.v.

Stelling 4.4.5a. Laat $\vec{x}^{**} \in V$ en stel dat een vektor $\vec{\lambda}^{**} \geq \vec{0}$ bestaat zó dat aan (4.4.32) t/m (4.4.34) voldaan is. Als de functies $f(\vec{x})$ en $g_i(\vec{x})$ continu differentiëerbaar en concaaf over het niet-negatieve orthant zijn, $i = 1, \ldots, M$, dan neemt $f(\vec{x})$ het absolute maximum op V in $\vec{x}^{**}$ aan.

Bewijs. Men bewijst stelling 4.4.5a uit stelling 4.4.4a analoog zoals men stelling 4.4.5 uit stelling 4.4.4 bewijst.

We merken op dat men probleem (4.4.15) in de vorm max $z = f(\vec{x})$ onder $\hat{g}_i(\vec{x}) \geq 0$, $i = 1, \ldots, M$; $\vec{x} \geq \vec{0}$ kan brengen. Schrijf daartoe $\hat{g}_i(\vec{x}) = b_i - g_i(\vec{x})$, $i = 1, \ldots, u$; $\hat{g}_i(\vec{x}) = g_i(\vec{x}) - b_i$, $i = u+1, \ldots, v$. De vergelijking $g_i(\vec{x}) = b_i$ is equivalent met $\hat{g}_{i1}(\vec{x}) = g_i(\vec{x}) - b_i \geq 0$ èn $\hat{g}_{i2}(\vec{x}) = b_i - g_i(\vec{x}) \geq 0$.

Wanneer de voorwaarden $\hat{g}_i(\vec{x}) \geq 0$, $i = 1, \ldots, M$ lineair zijn dan is aan de constraint qualification voldaan.
Laten de voorwaarden $\vec{a}^i\vec{x} - b_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, M$ en $\vec{x} \geq \vec{0}$ zijn.
Er geldt $\nabla g_i(\vec{x}^{**})' = \vec{a}^i$. Voor elke $\vec{h}$ die voldoet aan $\vec{a}^i\vec{h} \geq 0$, $i \in I$; $h_j > 0$, $j \in \hat{J}$ bestaat er een curve in een omgeving van $\vec{x}^{**}$ die in $V = \{\vec{x} \mid \vec{a}^i\vec{x} - b_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq M;\ \vec{x} \geq \vec{0}\}$ bevat is, waarbij de raaklijn in $\vec{x}^{**}$ aan de curve richting $\vec{h}$ heeft.

Bewijs. We zullen aantonen dat de gezochte curve het lijnsegment $\vec{y} = \vec{x}^{**} + \nu\vec{h}$ is, $0 \leq \nu \leq \nu_0$, waarbij ν_0 een nog te specificeren getal is, dat door $\vec{h}$ bepaald wordt.
De raaklijn in $\vec{x}^{**}$ aan het lijnsegment valt langs het lijnsegment, dus we hoeven alleen nog te bewijzen dat $\vec{a}^i\vec{y} \geq b_i$, $i = 1, \ldots, M$, en $\vec{y} \geq \vec{0}$, dan is aangetoond dat het lijnsegment in V ligt.
$\vec{a}^i\vec{y} = \vec{a}^i\vec{x}^{**} + \nu\vec{a}^i\vec{h} = b_i + \nu\vec{a}^i\vec{h} \geq b_i$ voor $i \in I$, daar $\nu \geq 0$ en $\vec{a}^i\vec{h} \geq 0$ $(i \in I)$.
Voor $i \in \hat{I}$ geldt $\vec{a}^i\vec{x}^{**} > b_i$. Kiest men bij de gegeven $\vec{h}$ ν voldoende klein dan geldt $\vec{a}^i\vec{x}^{**} + \nu\vec{a}^i\vec{h} \geq b_i$, alle $i \in \hat{I}$.
$y_j \geq 0$, $j \in \hat{J}$ daar $h_j \geq 0$ voor $j \in \hat{J}$ en $\vec{x}^{**} \geq \vec{0}$.
Voor $j \in J$ geldt $x_j^* > 0$. Kiest men bij gegeven $\vec{h}$ ν voldoende klein dan $x_j^* + \nu h_j \geq 0$, alle $j \in J$.

Voor het geval het niet-lineaire programmeringsprobleem luidt max $z = f(\vec{x})$ onder $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \{\leq = \geq\} b_i$, $i = 1, \ldots, m$, $\vec{x} \geq \vec{0}$ zijn dus de in stelling 4.4.4 gegeven voorwaarden noodzakelijk opdat $f(\vec{x})$ het absolute maximum in $\vec{x}^{**}$ aanneemt op V. Is $f(\vec{x})$ concaaf, dan zijn de voorwaarden ook voldoende. Immers een lineaire functie is zowel convex als concaaf.

Speciaal geval uit de Kuhn-Tucker theorie

Uit het voorgaande volgt:

Stelling 4.4.6. Max $z = f(\vec{x})$

onder

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, u \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = u+1, \ldots, v \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = v+1, \ldots, m \\ &\vec{x} \geq \vec{0} \end{aligned} \tag{4.4.35}$$

waarbij $f(\vec{x})$ continu differentiëerbaar en concaaf over het niet-negatieve orthant is. Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde opdat $f(\vec{x})$ in $\vec{x}^{**} \in V$ op V een absoluut maximum aanneemt is het bestaan van een vektor $\vec{\lambda}^{**}$ met $\lambda_i^* \geq 0$, $i = 1, \ldots, u$; $\lambda_i^* \leq 0$, $i = u+1, \ldots, v$; en $-\infty < \lambda_i^* < \infty$, $i = v+1, \ldots, m$, zó dat

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* a_{ij} \geq \frac{\partial f(\vec{x}^{**})}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.4.36}$$

en

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left[\frac{\partial f(\vec{x}^{**})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* a_{ij}\right] = 0 \tag{4.4.37}$$

en

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^*\right] = 0. \tag{4.4.38}$$

Verder de Lagrangefunctie

$$F(\vec{x},\vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\right] \tag{4.4.39}$$

heeft een globaal zadelpunt in $[\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*]$ voor $\vec{x} \geq \vec{0}$ en $\vec{\lambda} \in W_2$ (W_2 = verzamelingen van vektoren $\vec{\lambda}$, waarvan de componenten 1 t/m u niet-negatief zijn en de componenten u+1 t/m v niet-positief).

Opmerking. In de stelling is (4.4.37) equivalent met

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* b_i. \qquad (4.4.40)$$

Immers: (4.4.37) is ook te schrijven als

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right). \qquad (4.4.41)$$

Als voorwaarde i uit (4.4.35) inactief is in $\vec{x}^*$ dan is $\lambda_i^* = 0$.
We kunnen dus in (4.4.41) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*$ door b_i vervangen zonder dat de waarde van de uitdrukking verandert. Bijgevolg (4.4.40) geldt. Omgekeerd kunnen we (4.4.40) b_i door $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*$ vervangen zonder dat er iets verandert en vinden dan weer (4.4.37) terug.

Vervolgens leiden we m.b.v. de Kuhn-Tucker theorie enkele bekende stellingen uit de duale lineaire programmering af.
We veronderstellen dat $f(\vec{x}) = \vec{c}\,\vec{x}$, zo dat (4.4.35) een L.P.-probleem wordt.
Dan worden (4.4.36) en (4.4.40) respectievelijk

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* a_{ij} \geq c_j, \; j = 1, \ldots, n \qquad (4.4.42)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* b_i = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*. \qquad (4.4.43)$$

Voor elke $\vec{\lambda} \in W_2$ die aan $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \geq c_j$, $j = 1, \ldots, n$ voldoet, en elke $\vec{x} \geq \vec{0}$ die aan de voorwaarden uit (4.4.35) voldoet, geldt

$$\lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \lambda_i b_i, \quad i = 1, \ldots, v$$

$$\lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda_i b_i, \quad i = v+1, \ldots, m.$$

(Bedenk $\lambda_i \leq 0$, voor $i = u+1, \ldots, v$).

Dus

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \geq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \right) x_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \qquad (4.4.44)$$

Dus i.h.b.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*.$$

Nu volgt uit (4.4.43) dat $\vec{\lambda}^*$ een optimale oplossing van het L.P.-probleem

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$$

onder

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \geq c_j, \quad j = 1, \ldots, n \qquad (4.4.45)$$

$\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, u$; $\lambda_i \leq 0$, $i = u+1, \ldots, v$; $-\infty < \lambda_i < \infty$, $i = v+1, \ldots, m$.

Het L.P.-probleem (4.4.45) is de duale van het L.P.-probleem verkregen uit (4.4.35) door $f(\vec{x}) = \vec{c}\,\vec{x}$ te nemen (zie L.P., §5, stelling 2.5.8). Verder hebben we m.b.v. de Kuhn-Tucker theorie aangetoond dat het duale L.P.-probleem een optimale oplossing heeft, als het oorspronkelijke L.P.-probleem een optimale oplossing bezit, waarbij (4.4.43) geldt (max z = min Z).

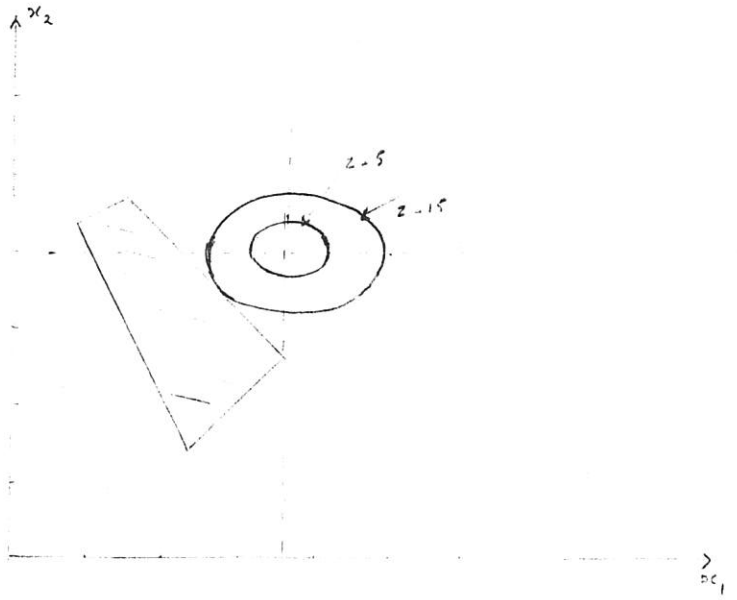
Tenslotte merken we op dat de relaties (4.4.37) en (4.4.38) de stellingen 2.5.10a en 2.5.10b weergeven.

Voorbeeld. We zullen grafisch een niet-lineair programmeringsprobleem oplossen en dan m.b.v. de Kuhn-Tucker theorie laten zien dat het grafisch bepaalde optimum inderdaad het optimum is.
Het probleem luidt:

$$\min z = 10(x_1 - 3{,}5)^2 + 20(x_2 - 4)^2$$

onder

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 0{,}5x_1 - x_2 &\geq -4 \\ x_1 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned} \qquad (4.4.46)$$



De optimale oplossing is het punt waar een ellips aan een zijde van de convexe verzameling raakt.

Laat het optimale punt (x_1^*,x_2^*) zijn. Uit de figuur: $x_1^* + x_2^* = 6$, $z^* = 10(x_1^* - 3{,}5)^2 + 20(x_2^* - 4)^2$. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is (x_1^*,x_2^*) aan de curve $z = 10(x_1 - 3{,}5)^2 + 20(x_2 - 4)^2$ moet -1 zijn, daar de r.c. van $x_1 + x_2 = 6$ gelijk -1 is.

Dit geeft $x_2^* - 4 = 0{,}5(x_1^* - 3{,}5)$. Lost men de twee vergelijkingen in x_1^*,x_2^* op dan vindt men $x_1^* = 2{,}5$, $x_2^* = 3{,}5$. Waaruit volgt $z^* = 15$.

We hebben dus grafisch een oplossing van het probleem (4.4.46) bepaald.

We zullen nu d.m.v. stelling 4.4.6 laten zien dat z inderdaad voor $x_1^* = 2\frac{1}{2}$, $x_2^* = 3\frac{1}{2}$ het absolute minimum onder de gegeven voorwaarden bereikt.

Daartoe maken we eerst van (4.4.46) een maximaliseringsprobleem.

Het probleem is hetzelfde als het probleem waar we maximaliseren $f = -10(x_1 - 3{,}5)^2 - 20(x_2 - 4)^2$ onder de in (4.4.46) gegeven voorwaarden. De voorwaarden zijn lineair. We zullen eerst een vector $\vec{\lambda}^*$ met $\lambda_1^*, \lambda_2^* \geq 0$ en $\lambda_3^*,\lambda_4^*,\lambda_5^* \leq 0$ bepalen zó dat aan (4.4.36) t/m (4.4.38) voldaan is.

(4.4.36) wordt:

$$\lambda_1^* + \lambda_2^* + 2\lambda_3^* + 0{,}5\lambda_4^* + \lambda_5^* \geq -20(x_1^* - 3{,}5) = 20 \qquad (4.4.47)$$

$$\lambda_1^* - \lambda_2^* + \lambda_3^* - \lambda_4^* \geq -40(x_2^* - 4) = 20.$$

Uit (4.4.37) volgt $\lambda_i^* = 0$ als voorwaarde i uit (4.4.46) inactief is in $\vec{x}^* = (2\frac{1}{2},3\frac{1}{2})$. Alleen de eerste voorwaarde is actief in $\vec{x}^*$. Dus $\lambda_2^* = \lambda_3^* = \lambda_4^* = \lambda_5^* = 0$. Als $x_j^* > 0$ dan moet het gelijkheidsteken gelden voor de j-de voorwaarde van (4.4.47).

Zowel x_1^*, $x_2^* > 0$. Waaruit volgt $\lambda_1^* = 20$.

We hebben dus een punt $[\vec{x}^*,\vec{\lambda}^*]$ gevonden dat aan de noodzakelijke voorwaarden uit stelling 4.4.6 voldoet. Daar $f = -20(x_1 - 3{,}5)^2 - 40(x_2 - 4)^2$ concaaf is (een negatief semi-definiete kwadratische vorm is concaaf), volgt dus uit stelling 4.4.6 dat $f(\vec{x})$ het absolute maximum in $\vec{x}^* = (2\frac{1}{2},3\frac{1}{2})$ onder de gegeven voorwaarden aanneemt.

§5. Kwadratische programmering

Een kwadratisch programmeringsprobleem is een niet-lineair programmeringsprobleem, waarvan de bijvoorwaarden lineair zijn en de objectfunctie de som is van een lineaire en een kwadratische vorm. We zullen alleen maximaliseringsproblemen beschouwen, dit is geen beperking daar het minimaliseren van $f(\vec{x})$ op hetzelfde neerkomt als het maximaliseren van $-f(\vec{x})$.
Door eventueel verschilvariabelen in te voeren is elk kwadratisch programmeringsprobleem te schrijven als:

$$\begin{aligned} \max\ z &= \vec{c}\,\vec{x} + \vec{x}'\,D\,\vec{x} \\ &\text{onder} \\ A\,\vec{x} &= \vec{b} \\ \vec{x} &\geq \vec{0}. \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

We nemen aan dat er m voorwaarden en n variabelen zijn, zodat A een m×n-matrix en D een n×n-matrix is. We mogen zonder beperking aannemen dat D symmetrisch is, d.w.z. D = D' (zie blz. 240).

Evenals de Simplexmethode bij de lineaire programmering, tasten de meeste tot nu toe ontwikkelde algorithmen voor de kwadratische programmering steeds de omgeving van de vektor $\vec{x}$ af, die men in een bepaalde stap bereikt heeft, terwijl de berekeningen gestopt worden, wanneer blijkt dat men in deze omgeving geen betere waarden meer kan vinden. Men vindt in principe dus hoogstens een lokaal extreem en dan is het van belang te weten of dit nu absoluut is of niet.

Stelling 4.5.1. Als $\vec{x}'\,D\,\vec{x}$ negatief definiet of negatief semidefiniet is, dan is voor probleem (4.5.1) elk lokaal maximum tevens het absolute maximum. Is $\vec{x}'\,D\,\vec{x}$ negatief definiet, dan is het absolute maximum (als het bestaat) uniek.

Bewijs. Als $\vec{x}'\,D\,\vec{x}$ negatief (semi)-definiet is dan is $\vec{x}'\,D\,\vec{x}$ concaaf (stelling 4.3.1), en dan is dus ook $\vec{c}\,\vec{x} + \vec{x}'\,D\,\vec{x}$ concaaf. Als $\vec{x}'\,D\,\vec{x}$ negatief definiet is, dan is $\vec{x}'\,D\,\vec{x}$ sterk concaaf, en men gaat direct na dat dan ook $\vec{c}\,\vec{x} + \vec{x}'\,D\,\vec{x}$ sterk concaaf is.

Verder is $\{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b},\ \vec{x} \geq \vec{0}\}$ convex. Pas nu stelling 4.3.10 toe.

Stelling 4.5.2. Als $\vec{x}'\ D\ \vec{x}$ negatief definiet is en probleem (4.5.1) bezit een toegelaten oplossing, dan is er een unieke optimale oplossing, waarvoor z een eindige waarde aanneemt.

Bewijs. We moeten aantonen dat de waarde van z niet naar ∞ gaat als $|\vec{x}| \to \infty$. Beschouw een punt $\vec{x}$ op de hyperbol met straal σ en de oorsprong als middelpunt. Dan geldt $\vec{x} = \sigma\vec{r}$, waarbij $\vec{r}$ een punt op de eenheidshyperbol is. Verder $\vec{x}'\ D\ \vec{x} = \sigma^2\vec{r}'\ D\ \vec{r}$. Laat $\vec{r}'\ D\ \vec{r}$ het maximum op de eenheidshyperbol in $\vec{r}_0$ aannemen. Daar $\vec{x}'\ D\ \vec{x}$ negatief definiet is geldt dus $\vec{r}_0'\ D\ \vec{r}_0 = d < 0$ en $\vec{x}'\ D\ \vec{x} \leq \sigma^2 d < 0$ voor elke $\vec{x}$ op de hyperbol met straal σ. Hieruit volgt dat $\vec{x}'\ D\ \vec{x} \to -\infty$ als $|\vec{x}| \to \infty$.
Wanneer $\vec{x} \neq \vec{0}$, dan

$$z = \vec{x}'\ D\ \vec{x}\left[1 + \frac{\vec{c}\ \vec{x}}{\vec{x}'\ D\ \vec{x}}\right] .$$

Laat $\left|\frac{\vec{c}\ \vec{r}}{\vec{r}'\ D\ \vec{r}}\right|$ het maximum op de eenheidsbol aannemen in $\vec{r}_1$.
Daar $\vec{r}_1'\ D\ \vec{r}_1 \neq 0$ is de waarde van dit maximum eindig. Er geldt dan

$$\left|\frac{\vec{c}\ \vec{x}}{\vec{x}'\ D\ \vec{x}}\right| \leq \frac{1}{\sigma}\left|\frac{\vec{c}\ \vec{r}_1}{\vec{r}_1'\ D\ \vec{r}_1}\right| .$$

Dus als $|\vec{x}| \to \infty$ dan $\frac{\vec{c}\ \vec{x}}{\vec{x}'\ D\ \vec{x}} \to 0$ en $z \to -\infty$.
Waarmee aangetoond is dat de maximumwaarde van z niet willekeurig groot kan worden, als $\vec{x}'\ D\ \vec{x}$ negatief definiet is.
Als probleem (4.5.1) een toegelaten oplossing bezit, dan bezit het een optimale oplossing, waarvoor z eindig is, en verder is de optimale oplossing uniek, omdat $\vec{x}'\ D\ \vec{x}$ negatief definiet is.

Bepalen van een toegelaten basisoplossing van $A\ \vec{x} = \vec{b}$

Wolfe heeft een algorithme ontwikkeld om het kwadratische programmeringsprobleem op te lossen en bij het uitvoeren van dit algorithme bepaalt men eerst een toegelaten oplossing van $A\ \vec{x} = \vec{b}$. We zullen een methode bespreken die nagaat of $A\ \vec{x} = \vec{b}$ een toegelaten oplossing bezit, en als dit het geval is, ons tevens een toegelaten basisoplossing geeft.

Los daartoe het volgende L.P.-probleem op

$$\max \hat{z} = -\sum_i u_i$$

onder

$$\vec{Ax} + \vec{Iu} = \vec{b}$$

$$\vec{x}, \vec{u} \geq \vec{0}.$$

Dit probleem lossen we met de Simplex-methode op. Voor de eindoplossing zijn drie mogelijkheden

(1) $\max \hat{z} < 0$, dus één of meer artificials verschijnen in de optimale basisoplossing met een positieve waarde. $\vec{Ax} = \vec{b}$ bezit dan niet een oplossing $\vec{x} \geq \vec{0}$.

(2) $\max \hat{z} = 0$, geen artificial zit in de basis. We hebben dan een toegelaten basisoplossing voor $\vec{Ax} = \vec{b}$ gevonden.

(3) $\max \hat{z} = 0$, één of meer artificials zitten in de basis, met de waarde nul. We hebben dan een toegelaten oplossing voor $\vec{Ax} = \vec{b}$ gevonden.

Er kunnen nu vergelijkingen van $\vec{Ax} = \vec{b}$ overbodig zijn. Als we de artificials uit de basis kunnen verwijderen dan verkrijgen we een ontaarde toegelaten basisoplossing van $\vec{Ax} = \vec{b}$. Als we de artificials niet allemaal uit de basis kunnen verwijderen, dan zijn er vergelijkingen van $\vec{Ax} = \vec{b}$ overbodig, deze kunnen we weglaten en dan kunnen we een toegelaten basisoplossing voor het nieuwe stelsel vergelijkingen verkrijgen (zie L.P., stelling 2.3.7 II).
In de Lineaire programmering staat deze methode bekend onder de naam Fase I methode.

In probleem (4.5.1) zijn de voorwaarden lineair en is de constraint qualification vervuld. We kunnen dus noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor een optimale oplossing van (4.5.1) aangeven.

Stelling 4.5.3. Laat $\vec{x}'$ D $\vec{x}$ concaaf zijn. Het punt $\vec{x}^{**} \geq \vec{0}$ is voor probleem (4.5.1) dan en slechts dan een optimale oplossing als vektoren $\vec{\lambda}^{**}$ en $\vec{v}^{**} \geq \vec{0}$ bestaan, zó dat voldaan is aan

$$\vec{c}' + 2D\vec{x}^{**} - A'\vec{\lambda}^{**} + \vec{v}^{**} = \vec{0} \qquad (4.5.2)$$

$$(\vec{x}^{**})' \cdot \vec{v}^{**} = 0 \qquad (4.5.3)$$

$$A\vec{x}^{**} = \vec{b} \qquad (4.5.4)$$

Bewijs. Een lineaire functie is zowel convex als concaaf. Verder $\{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq \vec{0}\}$ is convex. Gegeven is dat $\vec{x}'D\vec{x}$ concaaf is. De stelling volgt nu direct uit de stellingen 4.4.4 en 4.4.5. Voor ons kwadratisch programmeringsprobleem is

$$g_i(\vec{x}) = \vec{a}^{i}\vec{x}, \quad f(\vec{x}) = \vec{c}\,\vec{x} + \vec{x}'D\vec{x}.$$

Hierbij is $\vec{a}^{i}$ de i^{de} rijvektor van A.

Dan is $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = a_{ij}$. Dus de kolomvektor $\nabla g_i(\vec{x}) = (\vec{a}^{i})'$. (4.5.5)

$\frac{\partial f}{\partial x_j} = c_j + 2\sum_{i=1}^{n} x_i d_{ij}$. Dus de kolomvektor $\nabla f(\vec{x}) = \vec{c}' + 2D\vec{x}$. (4.5.6)

Uit stelling 4.4.4 volgt dat als $\vec{x}^{**}$ een optimale oplossing voor probleem 4.5.1 is, dan een vektor $\vec{\lambda}^{**}$ bestaat zodat $\vec{x}^{**}$, $\vec{\lambda}^{**}$ voldoen aan (4.4.26) t/m (4.4.28), terwijl verder $A\vec{x}^{**} = \vec{b}$ gelden moet. Gebruikt men (4.5.5) en (4.5.6), dan ziet men dat (4.4.26) wordt:

$$c' + 2D'\vec{x}^{**} - A'\vec{\lambda}^{**} \leq \vec{0}. \qquad (4.5.7)$$

Er geldt D' = D. Voer de n-component verschilvektor $\vec{v}^{**}$ in:

$$\vec{v}^{**} = A'\vec{\lambda}^{**} - \vec{c}' - 2D\vec{x}^{**} \geq \vec{0}.$$

Dan wordt (4.5.7)

$$\vec{c}' + 2D\vec{x}^{**} - A'\vec{\lambda}^{**} + \vec{v}^{**} = \vec{0}.$$

Gebruikmakend van $\vec{v}^{**}$ kan men (4.4.27) schrijven als

$$(\vec{x}^{**})'\vec{v}^{**} = 0 \quad \text{of} \quad x_j^{*} v_j^{*} = 0, \; j = 1, \ldots, n.$$

Triviaal is dat gelden moet $A\vec{x}^{**} = \vec{b}$.

(4.4.28) is vervuld door elke toegelaten oplossing van $A\vec{x} = \vec{b}$ en we kunnen dus (4.4.28) verder buiten beschouwing laten. Hiermee hebben we dus afgeleid dat wanneer $\vec{x}^{**} \geq \vec{0}$ een optimale oplossing voor (4.5.1) is, vektoren $\vec{\lambda}^{**}$ en $\vec{v}^{**} \geq \vec{0}$ bestaan zó dat aan (4.5.2) t/m (4.5.4) voldaan is. Daar $z = f(\vec{x})$ concaaf is en $g_i(\vec{x}) = \vec{a}^i\vec{x}$ zowel convex als concaaf is, volgt uit stelling 4.4.5 dat de voorwaarden ook voldoende zijn.

Dus als we kunnen vinden een $\vec{x} \geq \vec{0}$, $\vec{v} \geq \vec{0}$ en een $\vec{\lambda}$ die voldoen aan

$$\begin{aligned} &A\vec{x} = \vec{b} \\ &2D\vec{x} - A'\vec{\lambda} + \vec{v} = -\vec{c}' \\ &x_j\, v_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{4.5.8}$$

dan is $\vec{x}$ een optimale oplossing voor het kwadratische programmeringsprobleem (4.5.1).

Het probleem van het oplossen van een kwadratische programmeringsprobleem is dus teruggebracht tot het vinden van een $\vec{x} \geq \vec{0}$, $\vec{v} \geq \vec{0}$ en een $\vec{\lambda}$ die aan (4.5.8) voldoen. Hierbij merken we nog op dat dan gelden moet dat $\vec{x}'D\vec{x}$ concaaf is.

<u>Oplossingsmethode van Wolfe voor het geval $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief definiet is</u>

We zullen nu de methode van Wolfe behandelen om een $\vec{x} \geq \vec{0}$, $\vec{v} \geq \vec{0}$ en een $\vec{\lambda}$ te vinden die aan (4.5.8) voldoen. Het voordeel van deze methode is, dat we de Simplex-methode gebruiken kunnen. We merken eerst op dat wanneer $[\vec{x},\vec{\lambda},\vec{v}]$ een oplossing is van de m+n vergelijkingen

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 2D & -A' & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{\lambda} \\ \vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b} \\ -\vec{c}' \end{bmatrix} \tag{4.5.9}$$

zó dat tevens $\vec{x} \geq \vec{0}$, $\vec{v} \geq \vec{0}$ en $\vec{x}'\vec{v} = 0$, dan hoogstens m+n componenten van $[\vec{x},\vec{\lambda},\vec{v}]$ ongelijk aan nul kunnen zijn. Dit volgt uit $\vec{x}'\vec{v} = 0$.

Als k componenten van $\vec{x}$ positief zijn, dan zijn tenminste k componenten van $\vec{v}$ gelijk aan nul, en dan zijn dus hoogstens n-k componenten van $\vec{v}$ positief. Waaruit volgt dat van de 2n-component-vektor $[\vec{x},\vec{v}]$ hoogstens n componenten positief kunnen zijn. De vektor $\vec{\lambda}$ bevat m componenten, dus niet meer dan n+m componenten van $[\vec{x},\vec{\lambda},\vec{v}]$ kunnen ongelijk aan nul zijn.

We nemen bij de afleiding van Wolfe's algorithme aan dat $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief definiet is. Het semi-definiete geval kan in principe moeilijkheden geven bij de berekeningen. We zullen later zien hoe we deze moeilijkheden kunnen opheffen, maar nu nemen we aan dat $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief definiet is.

De eerste stap in het algorithme is het bepalen van een toegelaten basisoplossing van $A\vec{x} = \vec{b}$ als er één bestaat. Dit doet men m.b.v. de Fase I methode. Als een toegelaten oplossing van $A\vec{x} = \vec{b}$ gevonden is dan is het zeker dat een oplossing $\vec{x} \geq \vec{0}$, $\vec{v} \geq \vec{0}$, $\vec{\lambda}$ van (4.5.9) bestaat.

We maken gebruik van de gevonden toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b}$ van $A\vec{x} = \vec{b}$. We voegen alleen artificials toe aan de n-vergelijkingen $2D\vec{x} - A'\vec{\lambda} + \vec{v} = -\vec{c}'$, en wel op de volgende manier.

Beschouw het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ 2D\vec{x} - A'\vec{\lambda} + \vec{v} + E\vec{u} &= -\vec{c}' \end{aligned} \qquad (4.5.10)$$

waarbij $\vec{u} \geq \vec{0}$ en $E = ((\Delta_j\ \delta_{ij}))$ een diagonaalmatrix is, waarvan de diagonaalelementen zijn $\Delta_j = \pm 1$. De getallen Δ_j zijn als volgt gedefiniëerd: Laat D_B de kolommen van D bevatten die corresponderen met de kolommen van A die in B bevat zijn. Geef de j^{de} rij van D_B aan met $\vec{d}_B^{\,j}$. Definiëer dan:

$$\Delta_j = \begin{cases} +1 & \text{als } -c_j - 2\vec{d}_B^{\,j} \cdot \vec{x}_B \geq 0 \\ -1 & \text{als } -c_j - 2\vec{d}_B^{\,j} \cdot \vec{x}_B < 0 \end{cases} \qquad (4.5.11)$$

Als we stellen

$$u_j = |-c_j - 2\vec{d}_B^{\,j}\,\vec{x}_B| \geq 0,\ j = 1, \ldots, n;\ \vec{\lambda} = \vec{0};\ \vec{v} = \vec{0}, \qquad (4.5.12)$$

dan hebben we een toegelaten oplossing voor (4.5.10). Deze oplossing bevat hoogstens n+m positieve variabelen. Verder kan deze oplossing geschreven worden als

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 2D_B & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_B \\ \vec{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b} \\ -\vec{c}' \end{bmatrix}. \qquad (4.5.13)$$

Daar $B_Q = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 2D_B & E \end{bmatrix}$ niet-singulier is ($|B_Q| = |B|\ |E| \neq 0$)
is $[\vec{x}_B, \vec{u}]$ een toegelaten basisoplossing voor (4.5.10).
We weten dat de componenten van $\vec{\lambda}$ elke reële waarde aannemen mogen.
Stel in (4.5.10) $\vec{\lambda} = \vec{\xi} - \vec{\eta}$, $\vec{\xi} \geq \vec{0}$ en $\vec{\eta} \geq \vec{0}$.
We stellen verder

$$Q = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2D & -A' & A' & I_n & E \end{bmatrix},\ \vec{f} = [\vec{b}, -\vec{c}'],$$

$$\vec{w} = [\vec{x}, \vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{v}, \vec{u}].$$

Het volgende probleem gaan we nu oplossen

$$\max Z = -\sum_j u_j$$

onder

$$Q\vec{w} = \vec{f} \qquad (4.5.14)$$

$$\vec{w} \geq \vec{0}$$

$$\vec{x}'\vec{v} = 0$$

Daar een $\vec{x} \geq \vec{0}$, $\vec{v} \geq \vec{0}$ en een $\vec{\lambda}$ bestaan die aan (4.5.8) voldoen is het maximum van Z gelijk aan nul.
Het probleem (4.5.14) is lineair, behalve voor de voorwaarde $\vec{x}'\vec{v} = 0$. We nemen de voorwaarde $\vec{x}'\vec{v} = 0$ apart en gebruiken de Simplex-methode om $-\sum u_j$ onder $Q\vec{w} = \vec{f}$, $\vec{w} \geq \vec{0}$ nul te maken, waarbij we starten met de basisoplossing $[\vec{x}_B, \vec{u}]$ (zie 4.5.12). Bij elke stap van de Simplex-methode dragen we er steeds zorg voor dat $\vec{x}'\vec{v} = 0$ blijft gelden. Dit impliceert dat we een kleine variatie op de Simplex-methode aanbrengen. We gaan bij de keuze van de variabele die basisvariabele wordt iets selectiever te werk. Als $x_j > 0$ dan staan we niet toe dat v_j basisvariabele wordt en omgekeerd. (Algemener: men kan toestaan dat x_j en v_j beide basisvariabelen zijn, maar alleen als $x_j v_j = 0$). Wanneer we vinden $Z = 0$, dus alle $u_j = 0$, dan hebben we een $\vec{x} \geq \vec{0}$, $\vec{v} \geq \vec{0}$, $\vec{\lambda}$ gevonden die aan (4.5.8) voldoen, en dan is $\vec{x}$ de optimale oplossing voor probleem (4.5.1).
Men kan zich afvragen of het mogelijk is, dat we na een bepaalde stap in de Simplex-methode geen verdere stappen meer kunnen doen, die niet in strijd zijn met de Simplex-regels of $\vec{x}'\vec{v} = 0$, terwijl dan nog niet alle $u_j = 0$ zijn. Dit is onmogelijk. We zullen bewijzen dat $Z = 0$, oftewel $\vec{u} = \vec{0}$, als we geen verdere stappen meer kunnen doen die niet in strijd zijn met de Simplex-regels of $\vec{x}'\vec{v} = 0$.

Bewijs. Bij dit bewijs gebruiken we het feit dat $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief definiet is. Beschouw de stap waarna we geen verdere stappen kunnen uitvoeren. Bij die stap vinden we een $\vec{x}^{**} \geq \vec{0}$, $\vec{v}^{**} \geq \vec{0}$, $\vec{u}^{**} \geq \vec{0}$ en $\vec{\lambda}^{**} = \vec{\xi}^{**} - \vec{\eta}^{**}$, waarbij $\vec{\xi}^{**}$, $\vec{\eta}^{**} \geq 0$. Laat $\vec{x}_1^{**}$ de positieve componenten van $\vec{x}^{**}$ bevatten, en laat $\vec{v}_1^{**}$ de componenten van $\vec{v}^{**}$ bevatten, die met de positieve componenten van $\vec{x}^{**}$ corresponderen.
Dan is $\vec{v}_1^{\times} = \vec{0}$, omdat $(\vec{x}^{**})'\vec{v}^{**} = 0$. Laat $\vec{v}_2^{**}$ de positieve componenten van $\vec{v}^{**}$ bevatten en $\vec{x}_2^{**}$ de corresponderende componenten van $\vec{x}^{**}$.
Dan $\vec{x}_2^{**} = \vec{0}$.
Men kan gemakkelijk nagaan dat $[\vec{x}^{**}, \vec{v}^{**}, \vec{\xi}^{**}, \vec{\eta}^{**}, \vec{u}^{**}]$ ook een optimale oplossing is van het lineaire programmeringsprobleem

$$\max Z = -\sum_j u_j = \vec{h}\,\vec{w}$$

onder

$$\begin{aligned} Q\vec{w} &= \vec{f} \\ \vec{x}_2 &= \vec{0} \\ \vec{v}_1 &= \vec{0} \\ \vec{w} &\geq \vec{0} \end{aligned} \qquad (4.5.15)$$

Immers bij de stap uit het oplossingsproces van (4.5.14) waar we niet verder konden gaan, zonder in strijd te geraken met de Simplex-regels of $\vec{x}'\vec{v} = 0$, geldt $Z_j - h_j \geq 0$ (h_j is -1 voor de u_j en nul voor de andere variabelen) voor elke variabele niet bevat in $\vec{v}_1$ of $\vec{x}_2$. *)
De rest van het bewijs van de stelling is gebaseerd op de optimale oplossing van probleem (4.5.15).
De vektoren $\vec{x}_1$ en $\vec{x}_2$ behoeven niet elke component van $\vec{x}$ te bevatten. Laat $\vec{x}_3$ de overige componenten van $\vec{x}$ bevatten.
Er geldt $\vec{x}_3^{\,*} = \vec{0}$. Laat evenzo $\vec{v}_3$ de overige componenten van $\vec{v}$ bevatten. Ook $\vec{v}_3^{\,*} = \vec{0}$.
De verzameling voorwaarden $Q\vec{w} = \vec{f}$ kunnen we splitsen en als volgt schrijven:

$$\begin{aligned}
& A_1\vec{x}_1 + A_2\vec{x}_2 + A_3\vec{x}_3 = \vec{b} \\
& 2D_{11}\vec{x}_1 + 2D_{12}\vec{x}_2 + 2D_{13}\vec{x}_3 - A_1'\vec{\xi} + A_1'\vec{\eta} + I\vec{v}_1 + E_1\vec{u} = -\vec{c}_1' \\
& 2D_{21}\vec{x}_1 + 2D_{22}\vec{x}_2 + 2D_{23}\vec{x}_3 - A_2'\vec{\xi} + A_2'\vec{\eta} + I\vec{v}_2 + E_2\vec{u} = -\vec{c}_2' \\
& 2D_{31}\vec{x}_1 + 2D_{32}\vec{x}_2 + 2D_{33}\vec{x}_3 - A_3'\vec{\xi} + A_3'\vec{\eta} + I\vec{v}_3 + E_3\vec{u} = -\vec{c}_3'.
\end{aligned} \qquad (4.5.16)$$

Men ziet eenvoudig in dat A_i de kolommen k van A bevat waarvoor x_k een component van $\vec{x}_i$ is (i = 1, 2, 3). Als d_{ef} een willekeurig element van matrix D is dan is d_{ef} een element van D_{ij} als x_e een component van $\vec{x}_i$ en x_f een component van $\vec{x}_j$ is (i,j = 1, 2, 3).

*) Hierbij nemen we aan dat $\vec{x}^{x}$, $\vec{\xi}^{x}$, $\vec{\eta}^{x}$, $\vec{v}^{x}$, $\vec{u}^{x}$ een niet-ontaarde basisoplossing is.

Vullen we in $Q\vec{w} = \vec{f}$ de relaties $\vec{x}_2 = \vec{0}$ en $\vec{v}_1 = \vec{0}$ in, dan kunnen we het L.P.-probleem (4.5.15) ook schrijven als:

$$\max Z = \sum_j u_j = [\vec{0},\vec{0},\vec{0},\vec{0},\vec{0},\vec{0},-\vec{1}]' \cdot [\vec{x}_1,\vec{x}_3,\vec{\xi},\vec{\eta},\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{u}]$$

onder

$$\begin{aligned}
A_1\vec{x}_1 + A_3\vec{x}_3 &= \vec{b},\\
2D_{11}\vec{x}_1 + 2D_{13}\vec{x}_3 - A_1'\vec{\xi} + A_1'\vec{\eta} + E_1\vec{u} &= -\vec{c}_1',\\
2D_{21}\vec{x}_1 + 2D_{23}\vec{x}_3 - A_2'\vec{\xi} + A_2'\vec{\eta} + I\vec{v}_2 + E_2\vec{u} &= -\vec{c}_2',\\
2D_{31}\vec{x}_1 + 2D_{33}\vec{x}_3 - A_3'\vec{\xi} + A_3'\vec{\eta} + I\vec{v}_3 + E_3\vec{u} &= -\vec{c}_3'.
\end{aligned} \qquad (4.5.17)$$

$$[\vec{x}_1,\vec{x}_3,\vec{\xi},\vec{\eta},\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{u}] \geq \vec{0}.$$

Beschouw nu de duale van het lineaire programmeringsprobleem (4.5.17). Laat de rijvektor $(\vec{s},\vec{t}_1,\vec{t}_2,\vec{t}_3)$ een <u>optimale</u> oplossing zijn van het duale probleem, waarbij $\vec{s}$, $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$ resp. evenveel componenten hebben als A_1, D_{11}, D_{21}, D_{31} resp. rijen hebben.
De voorwaarden waaraan de optimale oplossing $(\vec{s},\vec{t}_1,\vec{t}_2,\vec{t}_3)$ van het duale probleem aan voldoen moet, zijn:

$$\begin{aligned}
\vec{s}A_1 + 2\vec{t}_1D_{11} + 2\vec{t}_2D_{21} + 2\vec{t}_3D_{31} &= \vec{0}\\
\vec{s}A_3 + 2\vec{t}_1D_{13} + 2\vec{t}_2D_{23} + 2\vec{t}_3D_{33} &\geq \vec{0}\\
\vec{t}_1A_1' + \vec{t}_2A_2' + \vec{t}_3A_3' &= \vec{0}\\
\vec{t}_2 &= \vec{0}\\
\vec{t}_3 &\geq \vec{0}\\
\vec{t}_1E_1 + \vec{t}_2E_2 + \vec{t}_3E_3 &\geq -\vec{1}
\end{aligned} \qquad (4.5.18)$$

<u>Toelichting</u>:

Daar de componenten van $\vec{x}_1^{**}$ positief zijn, volgt uit stelling 2.5.10 (of zie ook blz. 270) dat in het eerste stelsel voorwaarden van (4.5.18) het gelijkheidteken gelden moet. Om dezelfde reden $\vec{t}_2 = \vec{0}$.

In het derde stelsel voorwaarden van (4.5.18) geldt het gelijkheidteken omdat de twee stelsels van voorwaarden corresponderend met $\vec{\xi}$ en $\vec{\eta}$ gecombineerd zijn (of lees $\vec{\xi} - \vec{\eta} = \vec{\lambda}$, waarbij $-\vec{\infty} < \vec{\lambda} < \vec{\infty}$ en zie dan blz. 139). Voor het overige ziet men stelling 2.5.8. $[\vec{s},\vec{t}_1,\vec{t}_2,\vec{t}_3]$ is een optimale oplossing voor het duale probleem, we weten dat de waarde van de objectfunctie van het oorspronkelijke probleem (4.5.17) dezelfde is als de waarde van de objectfunctie van het duale probleem voor optimale oplossingen.
Dus

$$-\sum_j u_j^* = \vec{s}\,\vec{b} - \vec{t}_1\vec{c}_1' - \vec{t}_2\vec{c}_2' - \vec{t}_3\vec{c}_3'. \qquad (4.5.19)$$

We beschouwen vervolgens het stelsel (4.5.18) eens nader.
Vermenigvuldigt men het eerste stelsel voorwaarden van (4.5.18) aan de rechterkant met $\vec{t}_1'$ en het tweede stelsel met $\vec{t}_3'$, bedenkt men dat $\vec{t}_2 = \vec{0}$, $\vec{t}_3 \geq \vec{0}$, dan verkrijgt men

$$\vec{s}A_1\vec{t}_1 + 2\vec{t}_1D_{11}\vec{t}_1' + 2\vec{t}_3D_{31}\vec{t}_1' = \vec{0}$$
$$\vec{s}A_3\vec{t}_3 + 2\vec{t}_1D_{13}\vec{t}_3' + 2\vec{t}_3D_{33}\vec{t}_3' \geq \vec{0}.$$

Telt men deze twee relaties op, dan vindt men:

$$\vec{s}[A_1\vec{t}_1' + A_3\vec{t}_3'] + 2(\vec{t}_1,\vec{t}_3)\begin{bmatrix} D_{11} & D_{13} \\ D_{31} & D_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{t}_1' \\ \vec{t}_3' \end{bmatrix} \geq \vec{0}. \qquad (4.5.20)$$

Nu is

$$2(\vec{t}_1,\vec{t}_3)\begin{bmatrix} D_{11} & D_{13} \\ D_{31} & D_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{t}_1' \\ \vec{t}_3' \end{bmatrix} = 2(\vec{t}_1,\vec{0},\vec{t}_3)\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{t}_1' \\ \vec{0}' \\ \vec{t}_3' \end{bmatrix} =$$

$= 2\vec{y}'D\vec{y}$, met $\vec{y} = (\vec{t}_1,\vec{0},\vec{t}_3)$.

Uit het derde stelsel van (4.5.18) en $\vec{t}_2 = \vec{0}$ volgt dat

$$\vec{s}[A_1\vec{t}_1' + A_3\vec{t}_3'] = \vec{0}.$$

Dus uit (4.5.20)

$$\vec{y}'D\vec{y} \geq \vec{0}. \qquad (4.5.21)$$

Nu is $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief definiet, dus wil (4.5.21) gelden dan moet $\vec{y} = \vec{0}$ zijn. Hieruit volgt $\vec{t}_1 = 0$, $\vec{t}_3 = 0$.
Als $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief semi-definiet is, dan zijn we er niet zeker van dat $\vec{t}_1 = \vec{t}_3 = \vec{0}$, omdat er dan een $\vec{x} \neq \vec{0}$ bestaat waarvoor $\vec{x}'D\vec{x} = 0$.
We hebben afgeleid dat $\vec{t}_1 = \vec{t}_2 = \vec{t}_3 = \vec{0}$. Uit het eerste stelsel van (4.5.18) volgt dan $\vec{s}A_1 = \vec{0}$, of $\vec{s}A_1\vec{x}_1^{**} = \vec{0}$. Er geldt $A_1\vec{x}_1^{**} = \vec{b}$ (immers $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x}_2^{**} = \vec{x}_3^{**} = \vec{0}$). Dus $\vec{s}\,\vec{b} = \vec{0}$. Verder $\vec{t}_1 = \vec{t}_2 = \vec{t}_3 = 0$.
Uit (4.5.19) volgt dan tenslotte:

$$-\sum_j u_j^* = 0, \text{ dus } u_j^* = 0, \; j = 1, \ldots, n.$$

Hetgeen te bewijzen viel.

Wanneer cycling niet optreedt (hetgeen in praktijkproblemen het geval is) dan bereiken we met de methode van Wolfe in een eindig aantal stappen de optimale oplossing.

Oplossingsmethode voor het geval $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief semi-definiet is

Als $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief semi-definiet is, kunnen op twee manieren moeilijkheden optreden in de oplossingsprocedure, die we in de vorige blz. ontwikkeld hebben. In de eerste plaats bestaat de mogelijkheid, dat het kwadratische programmeringsprobleem een onbegrensd maximum bezit. (Dit is het geval als $X = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b}, \; \vec{x} \geq \vec{0}\}$ niet van boven begrensd is, en $\{\vec{x} \mid \vec{x} = \lambda\vec{x}_0$, λ vanaf een zeker positief getal$\}$ in X bevat is, waarbij $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$, neem aan $\vec{x}_0 > \vec{0}$, een punt is met $\vec{x}_0'D\vec{x}_0 = 0$).
Bezit het probleem (4.5.1) een onbegrensd maximum, dan bestaan geen $\vec{x} \geq \vec{0}$, $\vec{v} \geq \vec{0}$ en een $\vec{\lambda}$ zodat aan (4.5.8) voldaan is.
Ten tweede, zelfs als het kwadratische programmeringsprobleem een optimale oplossing bezit, dan is het niet zeker dat alle $u_i = 0$, als de procedure van Wolfe eindigt, doordat geen verdere stappen, die niet in strijd met de Simplex-regels of $\vec{x}'\vec{v} = 0$ zijn, gedaan kunnen worden.

Nu heeft een negatief semi-definiete vorm $\vec{x}'D\vec{x}$ de prettige eigenschap dat de vorm in een negatief definiete vorm omgezet kan worden door een willekeurig kleine wijziging in de diagonaalelementen van D aan te brengen.

Stelling 4.5.4. Als $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief semi-definiet is, dan is $\vec{x}'(D + \varepsilon I)\vec{x}$ negatief definiet voor elke $\varepsilon < 0$.

Bewijs. $\vec{x}'D\vec{x} \leq 0$ voor elke $\vec{x}$. Verder $\varepsilon\vec{x}'I\vec{x} < 0$ voor elke $\vec{x} \neq \vec{0}$, als $\varepsilon < 0$ is. Dus voor iedere $\varepsilon < 0$ geldt $\vec{x}'(D + \varepsilon I)\vec{x} < 0$ voor elke $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Als we dus een kwadratisch programmeringsprobleem hebben waarvan we weten dat $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief semi-definiet of negatief definiet is, dan kunnen we ons ervan verzekeren dat de vorm negatief definiet is, door van elk diagonaal element van D een zelfde willekeurig klein getal af te trekken (bv. een eenheid in de vierde of vijfde decimaal). Als we de verandering maar klein genoeg nemen. dan worden de numerieke resultaten op geen enkele wijze beïnvloedt. Hierbij moeten we aannemen, dat voor het geval $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief semi-definiet is, het probleem geen onbegrensd maximum bezit. Maar praktijkproblemen, mits juist geformuleerd, bezitten geen onbegrensde oplossing, zodat dus geen moeilijkheden optreden.
In het algemeen geeft de oplossingsprocedure van Wolfe ook het gewenste resultaat als $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief semi-definiet is. Als $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief semi-definiet is dan lost men in de praktijk meestal eerst het probleem volgens de methode van Wolfe op, zonder de diagonaalelementen van D te veranderen.
De attente lezer zou zich kunnen afvragen, hoe men nagaat of $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief semi-definiet of negatief definiet is, wanneer dit niet op het eerste gezicht te zeggen valt.
In het algemeen zal men dan de eigenwaarden van de matrix D moeten bepalen. De eigenwaarden van D zijn de wortels van de n^{de} graads vergelijking $|D - \mu I| = 0$ in μ. Deze wortels zijn allen reëel als D symmetrisch is.

Nu zegt een stelling uit de matrixtheorie ons dat $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief definiet is, dan en slechts dan als alle eigenwaarden van D negatief zijn. De vorm $\vec{x}'D\vec{x}$ is negatief semi-definiet dan en slechts dan als alle eigenwaarden niet-positief zijn, en tenminste één eigenwaarde nul is.

Voorbeeld.

$$\max z = 2x_1 + x_2 - x_1^2$$

onder

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \\ x_i \geq 0,\ i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{4.5.22}$$

De vorm $\vec{x}'D\vec{x} = -x_1^2$, dus de kwadratische vorm is negatief semi-definiet. Ofschoon $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief semi-definiet is, zullen we zien dat de oplossingsmethode van Wolfe voor dit probleem werkt, zonder dat er moeilijkheden optreden.

In de notatie van probleem (4.5.1):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

$$\vec{c} = (2,1,0,0) \quad ; \qquad \vec{b} = [6,4].$$

Een toegelaten basisoplossing voor $A\vec{x} = \vec{b}$ kunnen we direct geven, zonder de Fase I methode te gebruiken.

Een toegelaten basisoplossing voor $A\vec{x} = \vec{b}$ is $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$.

Voor deze basisoplossing is:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \qquad 2D_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Voor probleem (4.5.22) wordt (4.5.10):

$$
\begin{array}{llllll}
2x_1+3x_2+x_3 & & & & & = 6 \\
2x_1+ x_2 \quad +x_4 & & & & & = 4 \\
-2x_1+ & -2\xi_1+2\eta_1-2\xi_2+2\eta_2+v_1 & & +\Delta_1 u_1 & & = -2 \\
& -3\xi_1+3\eta_1- \xi_2+ \eta_2 \quad +v_2 & & +\Delta_2 u_2 & & = -1 \\
& - \xi_1+ \eta_1 & +v_3 & & +\Delta_3 u_3 & = 0 \\
& & - \xi_2+ \eta_2 \quad +v_4 & & +\Delta_4 u_4 & = 0
\end{array}
\tag{4.5.23}
$$

We bepalen eerst de waarden van de Δ_j en de beginwaarden van de u_j. Daartoe stellen we $\vec{\xi} = \vec{\eta} = \vec{v} = \vec{0}$. Gebruikmakend van $x_1 = \frac{3}{2}$, volgt uit de derde vergelijking van (4.5.23) dat $\Delta_1 u_1 = 1$. Dus $\Delta_1 = 1$, $u_1 = 1$.
Uit de vierde vergelijking volgt $\Delta_2 u_2 = -1$, dus $\Delta_2 = -1$, $u_2 = 1$.
Uit de laatste twee vergelijkingen volgt tenslotte $\Delta_3 u_3 = 0$, $\Delta_4 u_4 = 0$, dus $\Delta_3 = \Delta_4 = 1$ en $u_3 = u_4 = 0$.
Daar $u_3 = u_4 = 0$ kunnen we in de basisoplossing van (4.5.23) i.p.v. u_3 en u_4 net zo goed v_3 en v_4 met waarde nul als basisvariabelen nemen. Dit maakt niets uit, omdat de enige taak van de artificials u_j is, ervoor te zorgen dat we kunnen beginnen met een toegelaten basisoplossing. De variabelen u_3 en u_4 nemen we niet meer in beschouwing, we laten deze variabelen in (4.5.23) weg.
Dit bespaart ons mogelijk enkele stappen in de iteratieprocedure.
Vervolgens beschouwen we het volgende probleem:

$$
\begin{aligned}
&\max Z = - u_1 - u_2 \\
&\text{onder} \\
&\text{het stelsel (4.5.23) (waarin } u_3 \text{ en } u_4 \text{ weggelaten zijn),} \\
&x_i,\ v_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4, \\
&\xi_i,\ \eta_i \geq 0,\ i = 1, 2, \\
&u_1,\ u_2 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{4.5.24}
$$

Verder moet steeds gelden:

$$x_i\, v_i = 0,\ i = 1, 2, 3, 4. \qquad (4.5.25)$$

We geven (4.5.24) kortweg aan door:

$$\begin{aligned} &\max Z = -u_1 - u_2 \\ &\qquad \text{onder} \\ &Q\vec{w} = \vec{f} \\ &\vec{w} = [\vec{x}, \vec{v}, \vec{\xi}, \vec{n}, u_1, u_2] \geq \vec{0} \end{aligned} \qquad (4.5.26)$$

Het lineaire programmeringsprobleem (4.5.26) lossen we volgens de Simplex-methode op, waarbij we er steeds voor moeten zorgen dat $x_i\, v_i = 0,\ i = 1, \ldots, 4$.
De basisoplossing voor (4.5.26), waarmee we starten, is

$$x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ v_3 = 0,\ v_4 = 0. \qquad (4.5.27)$$

Voor deze oplossing geldt $\vec{x}'\vec{v} = 0$.
Om de begintabel te construeren moeten we de vektoren $\vec{y}_j$ kennen. Daar de basismatrix B_Q, die bij de basisoplossing (4.5.27) behoort, niet de eenheidsmatrix is, kunnen we niet voor elke $\vec{y}_j$ de vektor $\vec{q}_j$ invullen (zie blz. 104, e.v.).
Zoals we uit L.P. weten: $\vec{y}_j = B_Q^{-1}\, \vec{q}_j$. Voor de vektoren in de basis B_Q geldt: $\vec{y}_j = \vec{e}_j$.
We zullen eerst de vektoren $\vec{y}_j$ bepalen.

$$B_Q = \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} B & 0 \\ 2D_B & E \end{array}\right]$$

Om de inverse van B_Q te bepalen, splitsen we B_Q zoals door de stippellijntjes aangegeven is.

$$B_Q^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -2ED_B B^{-1} & E \end{bmatrix}, \qquad \text{(zie blz. 33)}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Waaruit volgt

$$B_Q^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De vektoren $\vec{q}_j$, die corresponderen met de niet-basisvariabelen, zijn:

$$\vec{q}_{x_3} = \vec{e}_1;\ \vec{q}_{x_4} = \vec{e}_2;\ \vec{q}_{\xi_1} = [0,0,-2,-3,-1,0] = -\vec{q}_{\eta_1}$$

$$\vec{q}_{\xi_2} = [0,0,-2,-1,0,-1] = -\vec{q}_{\eta_2};\ \vec{q}_{v_1} = \vec{e}_3;\ \vec{q}_{v_2} = \vec{e}_4.$$

We weten $\vec{y}_j = B_Q^{-1}\,\vec{q}_j$. Voor de kolomvektoren $\vec{q}_j$ in de basis B_Q geldt: $\vec{y}_j = \vec{e}_j$. De andere vektoren $\vec{y}_j$ worden gegeven door:

$$\vec{y}_{x_3} = [-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0,0,0];\ \vec{y}_{x_4} = [\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2},0,0,0]$$

$$\vec{y}_{\xi_1} = [0,0,-2,3,-1,0] = -\vec{y}_{\eta_1};\ \vec{y}_{\xi_2} = [0,0,-2,1,0,-1] = -\vec{y}_{\eta_2}$$

$$\vec{y}_{v_1} = [0,0,1,0,0,0];\ \vec{y}_{v_2} = [0,0,0,-1,0,0].$$

Verder is voor de basisoplossing (4.5.27):

$$\vec{c}_B = (0,0,-1,-1,0,0). \qquad Z_j = \vec{c}_B\, B_Q^{-1}\, \vec{q}_j = \vec{c}_B\, \vec{y}_j.$$

$Z_j - c_j = 0$ voor de basisvariabelen.
Voor de andere variabelen:

$$Z_{x_3} = \frac{1}{2}\ ;\ Z_{x_4} = -\frac{3}{2}\ ;\ Z_{\xi_1} = -1;\ Z_{\eta_1} = 1.$$

$$Z_{\xi_2} = 1,\ Z_{\eta_2} = -1,\ Z_{v_1} = -1,\ Z_{v_2} = 1.$$

De c-waarde van de variabelen u_1 en u_2 is -1, voor de overige variabelen is de c-waarde nul.
We kunnen nu de begintabel vormen.

Begintabel, tabel 1

$\vec{c}_B$	B	x_0	x_1	x_2	u_1	u_2	v_3	v_4	x_3	x_4	ξ_1	η_1	ξ_2	η_2	v_1	v_2
0	x_1	$\frac{3}{2}$	1						$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$						
0	x_2	1		1					$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$						
-1	u_1	1			1				$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	2	-2	2	1	←
-1	u_2	1				1					3	-3	1	-1		-1
0	v_3	0					1				-1	1				
0	v_4	0						1					-1	1		
Z_j-c_j		-2	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	1	-1	-1	-1	1

↑

$$\min_j \{Z_j - c_j \mid Z_j - c_j < 0\}$$

In de niet-ingevulde hokjes leest men nullen.

De minimumwaarde van de $Z_j - c_j$ is $-\frac{3}{2}$, dit minimum wordt aangenomen voor de variabele x_4. Nu is v_4 basisvariabele en wel met waarde nul. We mogen x_4 basisvariabele laten worden als blijft gelden $x_4\, v_4 = 0$. Dit blijkt inderdaad het geval te zijn, als x_4 basisvariabele wordt. De variabele die de basis moet verlaten blijkt, volgens het tweede kriterium van de Simplex-methode u_1 te zijn. Dus x_4 vervangt u_1 als basisvariabele. De variabele u_1 wordt dus nul. In de volgende tabel laten we de kolom behorende bij u_1 weg. Voor de zo verkregen basisoplossing geldt $x_4 = \frac{2}{3}$, $v_4 = 0$. Dus aan $\vec{x}'\vec{v} = 0$ blijft voldaan.

Tabel 2

$\vec{c}_B$	B	x_0	x_1	x_2	u_2	v_3	v_4	x_3	x_4	ξ_1	η_1	ξ_2	η_2	v_1	v_2	
0	x_1	1	1							+1	-1	+1	-1	$-\frac{1}{2}$		
0	x_2	$\frac{4}{3}$		1				$\frac{1}{3}$		$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		
0	x_4	$\frac{2}{3}$						$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$		
-1	u_2	1			1					3	-3	1	-1		-1	←
0	v_3	0				1				-1	1					
0	v_4	0					1					-1	1			
$Z_j - c_j$		-1	0	0	0	0	0	0	0	-3	+3	-1	1	0	1	
										↑						

In de tweede stap wordt ξ_1 basisvariabele, terwijl u_2 als basisvariabele door ξ_1 vervangen wordt. Dus voor de in de tweede stap verkregen basisoplossing geldt dat $u_2 = 0$. Alle u_i zijn nu gelijk aan nul, dus $Z = 0$. We hebben dan de optimale oplossing voor ons probleem gevonden.
Het is onnodig om tabel 3 in zijn geheel uit te rekenen. Het is voldoende om de x_0-kolom te transformeren, zodat we dan de optimale oplossing voor probleem (4.5.22) kunnen aflezen.

De nieuwe waarden van de basisvariabelen, nadat u_2 door ξ_1 als basisvariabele vervangen is, zijn:

$$x_1 = \frac{2}{3} , \; x_2 = \frac{14}{9} , \; x_4 = \frac{10}{9} , \; \xi_1 = \frac{1}{3} , \; v_3 = \frac{1}{3} , \; v_4 = 0.$$

De waarden van de andere variabelen zijn gelijk aan nul.
We hebben een oplossing $\vec{x} \geq \vec{0}$, $\vec{v} \geq \vec{0}$, $\vec{\lambda}$ van (4.5.8) gevonden. Dus de optimale oplossing voor probleem (4.5.22) wordt gegeven door:

$$x_1^* = \frac{2}{3} , \; x_2^* = \frac{14}{9} , \; x_3^* = 0, \; x_4^* = \frac{10}{9} .$$

Dualiteit in kwadratische programmering

Stel dat $\vec{x}^{**} \geq \vec{0}$ een optimale oplossing is van:

$$\begin{aligned} &\text{Maximaliseer } z = \vec{c}\,\vec{x} + \vec{x}'D\vec{x} \\ &\text{onder} \\ &A\vec{x} = \vec{b} \\ &\vec{x} \geq \vec{0} \end{aligned} \qquad (4.5.28)$$

Uit de noodzakelijke voorwaarden van Kuhn en Tucker volgt (zie ook het bewijs van stelling 4.5.3), dat een $\vec{\lambda}^{**}$ bestaat, zó dat

$$-2D\vec{x}^{**} + A'\vec{\lambda}^{**} \geq \vec{c}'. \qquad (4.5.29)$$

Beschouw de Lagrangefunctie

$$F(\vec{x},\vec{\lambda}) = \vec{c}\,\vec{x} + \vec{x}'D\vec{x} + \vec{\lambda}'\left[\vec{b} - A\vec{x}\right] \qquad (4.5.30)$$

$$z^* = \max z = \vec{c}\,\vec{x} + (\vec{x}^{**})'D\vec{x}^{**} = \vec{c}\,\vec{x}^{**} + (\vec{x}^{**})'D\vec{x}^{**} + (\vec{\lambda}^{**})'\left[\vec{b} - A\vec{x}^{**}\right] = F(\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}), \qquad (4.5.31)$$

immers $A\vec{x}^{**} = \vec{b}$.

Uit (4.4.26) volgt

$$-2(\vec{x}^{**})'D\vec{x}^{**} + (\vec{\lambda}^{**})'A\vec{x}^{**} = \vec{c}\,\vec{x}^{**}. \qquad (4.5.32)$$

Bedenkt men dat $A\vec{x}^{**} = \vec{b}$, dan volgt uit (4.5.31) en (4.5.32) dat

$$z^{*} = F(\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}) = -(\vec{x}^{**})'D\vec{x}^{**} + (\vec{\lambda}^{**})'\vec{b}. \qquad (4.5.33)$$

Voor elke $\vec{x} \geq \vec{0}$ en $\vec{\lambda}$, die voldoen aan

$$-2D\vec{x} + A'\vec{\lambda} \geq \vec{c}', \qquad (4.5.34)$$

vindt men, nadat (4.5.34) aan de linkerkant met $\vec{x} \geq \vec{0}$ vermenigvuldigd is en de gespiegelde genomen is, de relatie

$$-\vec{\lambda}'A\vec{x} \leq -\vec{c}\,\vec{x} - 2\vec{x}'D\vec{x}. \qquad (4.5.35)$$

Dus voor elke $\vec{x} \geq \vec{0}$ en $\vec{\lambda}$, die voldoen aan (4.5.34), geldt

$$F(\vec{x},\vec{\lambda}) \leq -\vec{x}'D\vec{x} + \vec{\lambda}'\vec{b} = Z. \qquad (4.5.36)$$

(Substitueer (4.5.35) in (4.5.30)).

Uit (4.5.33): $F(\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}) = -(\vec{x}^{**})'D\vec{x}^{**} + (\vec{\lambda}^{**})'\vec{b} = z^{*} = \max z.$

We zien dus dat $[\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{**}]$ een optimale oplossing is van het kwadratische programmeringsprobleem:

$$\begin{aligned} &\text{Minimaliseer } Z = -\vec{x}'D\vec{x} + \vec{\lambda}'\vec{b} \\ &\qquad\qquad \text{onder} \\ &-2D\vec{x} + A'\vec{\lambda} \geq \vec{c}' \\ &\vec{x} \geq \vec{0} \end{aligned} \qquad (4.5.37)$$

We hebben tevens aangetoond dat max z = min Z.

Het kwadratische programmeringsprobleem (4.5.37) noemen we de <u>duale</u> van (4.5.28).

In het voorgaande hebben we bewezen dat (4.5.37) een optimale oplossing heeft, als (4.5.28) een optimale oplossing heeft. In feite, vormt een optimale oplossing $\vec{x}^{**}$ van (4.5.28) een deel van een optimale oplossing van (4.5.37). Als $\vec{x}^{**}$ bekend is, dan kan men het andere deel van de optimale oplossing van de duale bepalen door het lineaire programmerings-probleem,

$$\text{minimaliseer } \tilde{Z} = -(\vec{x}^{**})'D\vec{x}^{**} + \vec{\lambda}'\vec{b}$$

onder

$$-2D\vec{x}^{**} + A'\vec{\lambda} \geq \vec{c}',$$

op te lossen.

We merken nog op dat Z een convexe functie van $[\vec{x},\vec{\lambda}]$is, als z een concave functie van $\vec{x}$ is.

Stelling 4.5.5. Laat $\vec{x}'D\vec{x}$ negatief definiet zijn. Als het kwadratische programmeringsprobleem (4.5.37) een optimale oplossing heeft, dan bezit (4.5.28) ook een optimale oplossing.

Bewijs. We tonen aan dat $A\vec{x} = \vec{b}$ een oplossing $\vec{x} \geq \vec{0}$ heeft, dan volgt uit stelling 4.5.2 dat probleem (4.5.28) een optimale oplossing bezit. Laat $[\vec{x}^{**},\vec{\lambda}^{*}]$ een optimale oplossing van (4.5.37) zijn. Het minimaliseren van Z komt op hetzelfde neer als het maximaliseren van $-Z = \hat{Z}$. We stellen $\vec{\lambda} = \vec{\xi} - \vec{\eta}$, waarbij $\vec{\xi} = \max(\vec{0},\vec{\lambda}) \geq \vec{0}$, $\vec{\eta} = \max(0,-\vec{\lambda}) \geq \vec{0}$. Probleem (4.5.37) gaat dan over in de equivalente vorm:

$$\text{maximaliseer } \hat{Z} = \vec{x}'D\vec{x} - \vec{\xi}'\vec{b} + \vec{\eta}'\vec{b},$$

onder

$$-2D\vec{x} + A'\vec{\xi} - A'\vec{\eta} \geq \vec{c}' \qquad (4.5.38)$$

$$\vec{x},\ \vec{\xi},\ \vec{\eta} \geq \vec{0}$$

Ter vereenvoudiging van de notatie stellen we $\vec{u} = [\vec{x},\vec{\xi},\vec{\eta}]$.

$$\hat{Z} = f(\vec{u}) = \vec{x}'D\vec{x} - \vec{\xi}'\vec{b} + \vec{\eta}'\vec{b}$$

$$g_i(\vec{u}) = -2\vec{d}^{i}\vec{x} + \vec{a}_i\vec{\xi} - \vec{a}_i\vec{\eta},\ i = 1, \ldots, n.$$

Hierbij is $\vec{d}^{i}$ de i^{de} rijvektor van D ($\vec{d}^{i} = \vec{d}_i$, de i^{de} kolomvektor van D, omdat D = D'), en $\vec{a}_i$ is de i^{de} kolomvektor van A.

$$\nabla f(\vec{u}) = [\vec{x}'D,\ -\vec{b},\ \vec{b}]$$

$$\nabla g_i(\vec{u}) = [-2\vec{d}_i,\ \vec{a}_i,\ -\vec{a}_i]$$

$\vec{u}^{**} = [\vec{x}^{**}, \vec{\xi}^{*}, \vec{\eta}^{**}]$ is een optimale oplossing van probleem (4.5.38). Uit stelling 4.4.4 en (4.4.20) volgt dan, dat een vektor $\vec{\delta}^{**} \leq \vec{0}$ bestaat, zó dat

$$\nabla f(\vec{u}^{**}) - \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{*} \nabla g_i(\vec{u}^{**}) \leq \vec{0}.$$

Beschouwen we de laatste 2m componenten van de vektor uit het linkerlid, dan zien we

$$-\vec{b} - \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{*} \vec{a}_i \leq \vec{0},$$

$$\vec{b} + \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{*} \vec{a}_i \leq \vec{0}.$$

Waaruit volgt $A\vec{\delta}^{**} = -\vec{b}$, oftewel $A(-\vec{\delta}^{**}) = \vec{b}$. Daar $\vec{\delta}^{**} \leq \vec{0}$, geldt $-\vec{\delta}^{**} \geq \vec{0}$. Waarmee dan bewezen is dat $A\vec{x} = \vec{b}$ een oplossing $\vec{x} \geq \vec{0}$ bezit.