STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Syllabus

# Vector en Tensorrekening

Appendix II

Februari 1969.

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

# Samenvatting Algemene Tensorrekening.

College Prof. Lauwerier 1968 - '69

## 1. Tensorrekening in $R_n$.

We beschouwen als generalisatie van de drie-dimensionale Euclidische ruimte $R_3$ met Cartesische coördinaten een n-dimensionale Euclidische ruimte $R_n$ met rechtlijnige coördinaten$(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. We zien m.a.w. voorlopig af van metrische begrippen als hoek en afstand. Overgang naar nieuwe coördinaten $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$ met behoud van de oorsprong C wordt beschreven door een niet singuliere lineaire transformatie

(1.1) $$\bar{x}^i = A^i_{\cdot j}\, x^j \quad ,$$

$$\text{met } \Delta = \det A^i_{\cdot j} = \begin{vmatrix} A^1_{\cdot 1} & A^1_{\cdot 2} & \ldots & A^1_{\cdot n} \\ A^2_{\cdot 1} & A^2_{\cdot 2} & \ldots & A^1_{\cdot n} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ A^n_{\cdot 1} & A^n_{\cdot 2} & \ldots & A^n_{\cdot n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Een bovenindex heet een contravariante index.
Een benedenindex heet een covariante index.
De indices hebben een rangorde van links naar rechts zodat in $A^i_{\cdot j}$ de rijindex i vooraf gaat aan de kolomindex j. De sommatieconventie wordt toegepast op een als eo-eu contravariante herhaalde index.

De inverse transformatie van (1.1) is

(1.2) $$x^i = A_j^{\cdot i}\, \bar{x}^j.$$

De matrices $A^i_{\cdot j}$ en $A_j^{\cdot i}$ zijn elkaars reciproke.
Hierbij geldt

(1.3) $$A_j^{\cdot i} = \frac{\text{cofactor } A^j_{\cdot i} \text{ in } (A^j_{\cdot i})}{\Delta} \quad ,$$

en

(1.4) $$A^{i}_{.j}\; A^{.j}_{k} = A^{.i}_{j}\; A^{j}_{.k} = \delta^{i}_{k} \quad ,$$

waarbij $\delta^i_k$ de aangepaste notatie is van het Kronecker symbool.
De volgorde van de indices doet er niet toe zodat we de indices gewoon onder elkaar schrijven.

Een contravariante vector $v^i$ is meetkundig de pijl OP waarbij P de coördinaten $(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ heeft.
We noemen $v^i$ de contravariante componenten van de vector. De transformatieregel van een contravariante vector is natuurlijk identiek met (1.1) en (1.2).

Een covariante vector wordt gedefinieerd als een lineaire functionaal op de door de contravariante vectoren $v^i$ gevormde lineaire vectorruimte welke met $R_n$ overeenstemt. Een lineaire functionaal op de $v^i$ - ruimte is van de vorm

(1.5) $$u_1 v^1 + u_2 v^2 + \ldots + u_n v^n$$

en is zelf weer op te vatten als een vector met covariante componenten $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ .
Het meetkundige beeld is het hypervlak dat bepaald is door de vergelijking

$$u_1 v^1 + u_2 v^2 + \ldots + u_n v^n = 1 \; .$$

Gewoonlijk voegen we hier het door 0 hieraan evenwijdig gaande hypervlak aan toe.
In $R_3$ dus : puntenpaar = contravariante vector ,
vlakkenpaar = covariante vector.
De transformatieregel van de covariante vector $u_i$ volgt uit de invariantie van (1.5) aangezien het begrip lineaire functionaal niet afhangt van het toevallig gekozen coördinatenstelsel.

Uit $$\bar{u}_i \bar{v}^i = u_i v^i = u_i\, A^{.i}_{j}\, \bar{v}^j = u_j\, A^{.j}_{i}\, \bar{v}^i \; ,$$

volgt

(1.6) $$\bar{u}_i = A^{.j}_{i}\, u_j$$

en analoog invers

(1.7) $$u_i = A^{j}_{.i}\, \bar{u}_j .$$

We merken op dat de matrix $A_{i}^{\cdot j}$ de getransponeerde inverse is van $A^{i}_{\cdot j}$, die van (1.1).

Uit een willekeurige contravariante vector $a^i$ en een covariante vector $b_i$ volgt de invariante scalar

(1.8) $$a^i b_i ,$$

hetgeen onmiddellijk voortvloeit uit de definitie van covariante vector. De meetkundige betekenis blijkt a.v.
De vector $a^i$ correspondeert met het punt $A(x^i = a^i)$. De vector $b_i$ komt overeen met het hypervlak $\beta$

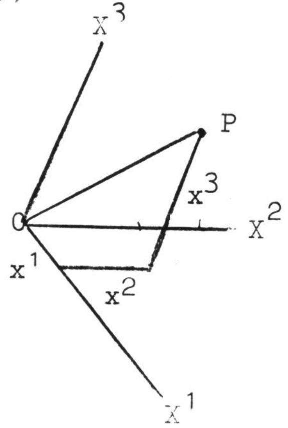
$$b_i x^i = 1.$$

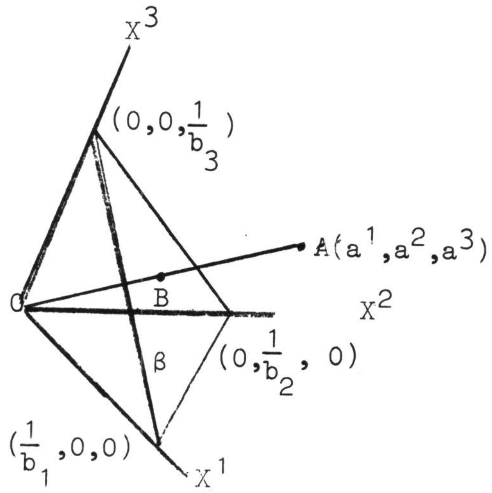
De lijn OA snijdt het hypervlak $\beta$ in een punt B waarvan de coördinaten van de vorm $(\lambda a^i)$ zijn.
Substitutie in de vergelijking van $\beta$ geeft

$$\lambda(b_i a^i) = 1 .$$

Anderzijds geldt $\lambda = OS/OP$ . Dus

(1.9) $$a^i b_i = OP/OS \quad .$$




Een tensor wordt gedefinieerd als een multilineaire functionaal t.o.v. de contra- en covariante vectoren.
Voorbeeld:
De tensor $T^{ij}_{\cdot\cdot k}$ heeft 2 contravariante en 1 covariante index.
De transformatieregel is

$$\bar{T}^{ij}_{\cdot\cdot k} = A^{i}_{\cdot p} A^{j}_{\cdot q} A_{k}^{\cdot r} \quad T^{pq}_{\cdot\cdot r} \quad .$$

Een algemene begrip is de gewogen tensor waarbij in het rechterlid van de transformatieregel de factor $\Delta^{\mu}$ voorkomt.
Als $\mu = 1$ spreekt men van een tensorcapaciteit.
Als $\mu = -1$ spreekt men van een tensordichtheid.
Voorbeeld: Een contravariante vectordichtheid $M^{i}$ heeft de transformatieregel

$$\overline{M}^{i} = \Delta^{-1} A^{i}_{\cdot j} M^{j} .$$

Bij de speciale tensorrekening waaraan de groep $SO_3$ van echte draaiingen van Cartesische coördinatenstelsels ten grondslag ligt zijn er een aantal identificaties. Aangezien de transformatieregel (1.1) dan een orthogonale matrix $t_{ij}$ met $\Delta = 1$ bevat stemt de transformatieregel van een covariante vector met die van een contravariante vector overeen. Het heeft dan geen zin meer onderscheid te maken tussen contra- en covariante vectoren en overeenkomstige indices. Aangezien ook $\Delta = 1$ verliest het begrip gewogen tensor zijn aparte betekenis.

Een kleine verruiming van de basisgroep, bijv. naar $O_3$ d.w.z. $SO_3$ met spiegelingen, geeft evenwel complicaties omdat ook $\Delta = -1$ mogelijk is. De gewogen tensoren vallen dan uiteen in echte tensoren met $\mu$ even en pseudotensoren met $\mu$ oneven. Als voorbeeld is het uitwendig product van twee vectoren te interpreteren als een pseudovector en het tripelproduct van drie vectoren, meetkundig de inhoud van een scheef blok, als een pseudoscalar.

De gebruikelijke tensorregels van de speciale tensorrekening kunnen met voor de hand liggende aanpassingen zonder moeite gegeneraliseerd worden.

Een tensor heet symmetrisch wanneer verwisseling van twee contravariante indices of van twee covariante indices geen invloed heeft. Treedt er bij elke genoemde verwisseling tekenwisseling op dan heet de tensor antisymmetrisch.

Uit een gegeven tensor kunnen door de processen van symmetrisering of antisymmetrisering een symmetrische of antisymmetrische afgeleid worden.
Voorbeeld: $T^{(ij)} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})$ is symmetrisch.

$$T^{[ijk]} = \frac{1}{6}(T^{ijk} - T^{ikj} + T^{jki} - T^{jik} + T^{kij} - T^{kji}).$$

In het bijzonder kan men uit twee of drie contravariante vectoren door antisymmetrisering een zgn. bivector of trivector afleiden.

De bivector $a^{[i} b^{j]}$ heeft $\frac{1}{2}$ n(n-1) componenten.

De trivector $a^{[i} b^{j} c^{k]}$ heeft $\frac{1}{6}$ n(n-1)(n-2) componenten.

Is $R_3$ heeft een bivector slechts 3 componenten. De vraag rijst of een bivector weer een vector is. In $T^{ij}$ antisymmetrisch in $R_3$ , dan schrijven we

$$c_1 = T^{23} = -T^{32} , \quad c_2 = T^{31} = -T^{13} , \quad c_3 = T^{12} = -T^{21} .$$

Er geldt

$$\overline{c}_1 = \overline{T}^{23} = A^2_{.i} \; A^2_{.j} \quad T^{ij} = (A^2_{.i} \; A^3_{.j} - A^2_{.j} \; A^3_{.i}) \; c_k \quad .$$

waarbij i, j, k een permutatie van 1, 2, 3 zijn.

Volgens (1.3) geldt

$$\overline{c}_1 = \text{cof. } A^1_{.k} \quad c_k \quad = \quad \Delta \; A_1^{\cdot k} \quad c_k \quad .$$

Hieruit volgt algemeen

$$\overline{c}_i = \Delta \; A_i^{\cdot j} \; c_j \quad ,$$

zodat een contravariante bivector zich in $R_3$ transformeert als een covariante vectorcapaciteit.

Op analoge wijze blijkt een contravariante trivector in $R_3$ een scalarcapaciteit te zijn.

Is namelijk $T^{ijk}$ antisymmetrisch en is

$$c = T^{123} = -T^{132} = \ldots \quad ,$$

dan geldt

$$\overline{c} = \overline{T}^{\,123} = A^1_{.i} \; A^2_{.j} \; A^3_{.k} \; T^{ijk} = (\varepsilon_{ijk} \; A^1_{.i} \; A^2_{.j} \; A^3_{.k}) \quad c,$$

zodat inderdaad

$$\overline{c} = \Delta \; c.$$

Antisymmetrisering van de uit drie contravariante vectoren gevormde tensor $a^i \; b^j \; c^k$ leidt dus tot de scalarcapaciteit $\varepsilon_{ijk} \; a^i \; b^j \; c^k$.

Hieruit volgt dat de tensor $\varepsilon_{ijk}$ een covariante tensorcapaciteit is.

Antisymmetrisering van de covariante tensor $T_{ijk}$ levert analoog een scalardichtheid. Dit betekent dat $\varepsilon_{ijk}$ ook op te vatten is als een contravariante tensordichtheid.

## 2. Metriek in $R_n$.

In $R_n$ wordt metriek ingevoerd door met behulp van een zgn. fundamentaaltensor $g_{ij}$ als inwendig product van twee contravariante vectoren $a^i$ en $b^i$ de volgende uitdrukking te definieren

(2.1) $$g_{ij} \; a^i \, b^j \, .$$

We nemen hierbij aan dat $g_{ij}$ symmetrisch. We beperken ons tot de zgn. Riemann-metriek waarbij

$$g_{ij} \; x^i \, x^j ,$$

een positief definiete vorm is.
De kwadraatlengte van een contravariante vector $a^i$ is nu gegeven als

(2.2) $$g_{ij} \; a^i \, a^j ,$$

welke in de hier gevolgde Riemann-metriek positief is.
De cosinus tussen $a^i$ en $b^i$ is bepaald door

(2.3) $$\cos(a^i, \, b^i) = \frac{g_{ij} \; a^i \, b^j}{\sqrt{g_{ij} \; a^i a^j} \sqrt{g_{ij} \; b^i b^j}} \, .$$

In het bijzonder correspondeert loodrechte stand met

(2.4) $$g_{ij} \; a^i \, b^j \; = \; 0.$$

Volgens de productregel van determinanten toegepast op

$$g_{ij} \; = \; A^k_{.i} \, A^l_{.j} \; \bar{g}_{kl} \, ,$$

geldt voor

(2.5) $$g = \det(g_{ij}) \, ,$$

de transformatieregel

(2.6) $$g = \bar{\Delta}^2 \, \bar{g} \, .$$

Hieruit volgt dat $\sqrt{g}$ een scalardichtheid is, mits we ons beperken tot transformaties met $\Delta > 0$.

Dank zij de metriek kan aan elke covariante vector op ondubbelzinnige wijze een contravariante vector toegevoegd worden en omgekeerd. Voor $R_3$ betekent dit meetkundig dat aan een (covariant) vlakkenpaar een (contravariante) pijl toegevoegd wordt welke er loodrecht op staat.

Volgens deze conjugatie bepaalt $v^i$ de covariante vector $g_{ij}\, v^j$.
Analoog kan uit de contravariante tensor $T^{ij}$ de covariante tensor $g_{ik}\, g_{jl}\, T^{kl}$ afgeleid worden.
Volgens de quotientregel kan van de covariante fundamentaaltensor $g_{ij}$ een contravariante tensor afgeleid worden door middel van

$$g^{ij}\, g_{jk} = \delta^i_k \qquad (2.7)$$

Als matrices beschouwd zijn $(g^{ij})$ en $(g_{ij})$ dus elkaars inverse.
Is nu $w_i$ een gegeven covariante vector dan geeft conjugatie de contravariante vector $g^{ij}\, w_j$ . Nogmaals conjugeren geeft

$$g_{ij}\, g^{ik}\, w_k = \delta^k_i\, w_k = w_i ,$$

dus weer de uitgangsvector.

Er is in $R_n$ een coordinatenstelsel waarin $g_{ij}$ de hoogddiagonaalvorm aanneemt. De coördinaatassen staan dan ondeling loodrecht. Door ook geschikte meeteenheden te kiezen ontstaat tenslotte een Cartesisch coördinaten-stelsel. Alleen in dit speciale stelsel zijn de componenten van overeenkomstige geconjugeerde vectoren en tensoren identiek.

## 3. Kromlijnige coördinaten.

We beschouwen een ruimte van n dimensies waarbij de punten P door n parameters, kromlijnige coördinaten, $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ bepaald zijn. Beschrijven we de ruimte met andere coördinaten $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$ dan is er in elk punt P een transformatie

$$\bar{x}^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (3.1)$$

bepaald waarbij de Jacobiaan

$$(3.2) \qquad \Delta = \det \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right) ,$$

ongelijk nul is.

Beperken we ons tot transformaties waarbij de functies $f^i$ continue partiele afgeleiden van voldoend hoge orde hebben dan ontstaat een totaliteit van coördinatenstelsels verbonden door transformaties (3.1) welke een groep vormen. Is het mogelijk een ondergroep en een nevengroep te bepalen waarbij resp. $\Delta > 0$ en $\Delta < 0$ is dan heet de ruimte oriënteerbaar. Voorbeelden van niet-oriënteerbare ruimten zijn de Möbiusband en de fles van Klein. We spreken af hier slechts oriënteerbare ruimten te beschouwen.

De coördinaatruimten $x^i$ = constant bepalen in een punt P een stelsel van n kromlijnige coördinaatassen. In de omgeving van P kunnen we de coördinaatassen benaderen door de raaklijnen hieraan in P waardoor in P een locaal rechtlijnig coördinatenstelsel gevormd wordt. In dit coördinatenstelsel kunnen we volgens de in § 1 ontwikkelde regels tensorrekening bedrijven door uit te gaan van de transformatieregel van de locale infinitesimale contravariante vector $(dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$.

Deze regel volgt uit (2.1) door differentiatie als

$$(3.3) \qquad d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \, dx^j \; .$$

De inverse regel is natuurlijk

$$(3.4) \qquad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \, d\bar{x}^j \; .$$

Vergelijking met (1.1) en (1.2) laat zien dat

$$(3.5) \qquad A^i_{\cdot j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \quad , \quad A^{\cdot i}_{j} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \; .$$

De uitbreiding is nu dat de coefficienten A van de coördinaten van P afhankelijk zijn. Zolang we bij P blijven kunnen we met de voor P geldende A-waarden volledig van het in de vorige paragrafen ontwikkelde formalisme gebruik maken.

Er komen nieuwe problemen zodra we de situatie in P vergelijken met die in een ander, bijv. naburig, punt. In het bijzonder geldt dit voor de generalisatie van de begrippen gradient, divergentie en rotatie.

De metriek wordt als in § 2 vastgelegd door een positief definiete kwadraatlengte van de vector $dx^i$ als

(3.6) $$ds^2 = g_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n)\, dx^i\, dx^j \ .$$

Voorbeelden.

1. Cylindercoördinaten in $R_3$ met $x^1 = r$ , $x^2 = \Theta$, $x^3 = z$ .

Men heeft

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Theta^2 + dz^2 \ .$$

2. Bolcoördinaten in $R_3$ met $x^1 = r$, $x^2 = \Theta$, $x^2 = \phi$ ,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2\Theta\, d\phi^2 .$$

3. Bolcoördinaten op het oppervlak van de eenheidsbol met $x^1 = \Theta$, $x^2 = \phi$ ,

$$ds^2 = d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\,\phi^2 \ .$$

In overeenstemming met (2.6) is in de oriënteerbaar veronderstelde ruimte $g = \det(g_{ij})$ een scalardichtheid. Aangezien $\varepsilon_{ijk}$ een covariante tensorcapaciteit is bestaat er in een oriënteerbare ruimte de gewone covariante tensor $\sqrt{g}\ \varepsilon_{ijk}$ en is het mogelijk het uitwendig product van twee contravariante vectoren $a^i$, $b^i$ ondubbelzinnig vast te leggen als

(3.7) $$\sqrt{g}\ \varepsilon_{ijk}\ a^j\, b^k \ .$$

In een niet-oriënteerbare ruimte zou het uitwendig product op tweewaardige wijze, met willekeurig teken, gevormd moeten worden

Het belangrijkste probleem is vooreerst de vertaling in algemene coördinaten van de bij de Castesische tensorrekening beschouwde begrippen : gradient, divergentie en rotatie.

Regel 1. De gradient van een scalarveld is een covariant vectorveld.

Bewijs.

Uit $$s(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) = s(x^1, x^2, \ldots, x^n) ,$$

volgt
$$\frac{\partial s}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial s}{\partial x^j} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}^i} ,$$

ofwel
$$\bar{\partial}_i s = A_i^{\cdot j} \partial_j s ,$$

hetgeen de transformatieregel van een covariante vector is.

Beproeven we de transformatie van $\partial_j v^i$ dan blijkt dit i.h.a. geen tensortransformatie te worden. Immers

$$\frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial}{\partial x^l} \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} v^k \right) \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} = A^i_{\cdot k} A_j^{\cdot l} \frac{\partial v^k}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^l} A_j^{\cdot l} v^k .$$

Wanneer in de gehele ruimte $\dfrac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0$ voor alle indexcombinaties gaat de transformatie wel in die van een tensor over. Dit is zo bij de groep van lineaire transformaties zoals bij de affiene ruimte.

Daarentegen geldt wel

Regel 2. De divergentie van een contravariante vectordichtheid is een scalardichtheid.

Bewijs.

We beperken ons gemakshalve tot drie dimensies. Volgens de bewering moet uit

$$\bar{M}^i = \Delta^{-1} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} M^j ,$$

voor de contravariante vectordichtheid $M^i$ volgen dat

$$\frac{\partial \bar{M}^i}{\partial \bar{x}^i} = \Delta^{-1} \frac{\partial M^i}{\partial x^i} .$$

Aangezien volgens (1.3) ook

$$\bar{M}^i = \left(\text{Cofactor } \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\right) M^j$$

is vinden we na differentiatie

$$\frac{\partial \bar{M}^i}{\partial \bar{x}^i} = \Delta^{-1} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial M^j}{\partial x^k} + M^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \left(\text{Cof. } \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\right) =$$

$$= \Delta^{-1} \frac{\partial M^i}{\partial x^i} + M^j \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \left(\text{Cof. } \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\right) .$$

We moeten dus bewijzen dat de laatste term in het rechterlid identiek nul is. Nemen we bijv. $j = 1$ dan geeft uitschrijven

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^1}\left(\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} - \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}\right) +$$

$$+ \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}^2}\left(\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} - \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}\right) +$$

$$+ \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}^3}\left(\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1}\right)$$

inderdaad het verlangde resultaat.

<u>Regel 3</u>. De rotatie van een covariante vector is voor drie dimensies een contravariante vectordichtheid.

<u>Bewijs.</u>

Is dus $w_i$ een covariant vectorveld dan moet volgens de bewering de vector met componenten $\varepsilon^{ijk}\,\partial_j w_k$,

d.w.z.

$$\left(\frac{\partial w_3}{\partial x^2} - \frac{\partial w_2}{\partial x^3}\,,\ \frac{\partial w_1}{\partial x^3} - \frac{\partial w^3}{\partial x^1}\,,\ \frac{\partial w_2}{\partial x^1} - \frac{\partial w^1}{\partial x^2}\right)$$

zich transformeren als een contravariante vectordichtheid. Het is dus voldoende aan te tonen dat de geantisymmetriseerde $\partial_j w_k - \partial_k w_j$ een covariante tensor is. Inderdaad volgt uit

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial w_k}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\,w_k\,,$$

en

$$\frac{\partial \bar{w}_j}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial w_l}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\,w_k\,,$$

door aftrekking de transformatieregel van een covariante tensor.

Weer dient te worden opgemerkt dat in een niet-oriënteerbare ruimte de rotatie niet eenduidig bepaald kan worden.

Om tot de juiste "vertaling" van de m.b.v. Cartesische coördinaten gevormde grad, div, rot en $\Delta$ te komen dienen we nog gebruik te maken van het feit dat $\sqrt{g}$ een scalardichtheid is.
Het begrip gradient geeft geen probleem.

De vertaling van div $\vec{v}$ gaat als volgt.
We gaan uit van de contravariante vector $v^i$. Hieruit vormen we de vectordichtheid $\sqrt{g}\, v^i$. Volgens regel 2 is $\partial_i(\sqrt{g}\, v^i)$ een scalardichtheid, zodat

(3.8) $$\operatorname{div} \vec{v} \implies \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}\, v^i).$$

De vertaling van rot $\vec{w}$ is analoog voor een covariante vector

(3.9) $$\operatorname{rot} \vec{w} \implies \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} w_k.$$

De Laplaceoperator $\Delta$ = divgrad levert tenslotte op

(3.10) $$\Delta\ S \implies \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial s}{\partial x^j}) .$$

## 4. Covariante differentiatie.

Bij het gebruik van slechts Cartesische coördinaten in een Euclidische ruimte leidt een vectorveld na differentiatie tot een tensorveld o.a. omdat de nabla-operator zich als een vector gedraagt. Bij de algemene tensorrekening zijn de afgeleiden $\partial_j v^i$ van b.v. een contravariant vectorveld in het algemeen niet de componenten van een tensor.
Er bestaan evenwel coefficienten $\Gamma^i_{jk}$ $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ , de zgn. symbolen van Christoffel , zodanig dat

(4.1) $$\nabla_j v^i \stackrel{def}{=} \partial_j v^i + \Gamma^i_{jk} v^k ,$$

wel de componenten van een tensor, de covariante afgeleiden van $v^i$ , zijn .
Analoog wordt ook uit een covariant vectorveld $w_i$ door

(4.2) $$\nabla_k w_j \stackrel{def}{=} \partial_k w_j - \Gamma^i_{jk} w_i ,$$

een tensor, de covariante afgeleide van $w_i$, gevormd.

De Christoffel symbolen kunnen op de volgende wijze ingevoerd worden. Eerst definieren we de symbolen $[i\ j,\ k]$ als

$$(4.3) \qquad [i\ j,\ k] \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}(-\,\partial_k\, g_{ij} + \partial_i\, g_{jk} + \partial_j\, g_{ki})\ .$$

De symbolen van Christoffel worden nu gedefinieerd als

$$(4.4) \qquad \Gamma^{\,k}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} g^{kl}\ [i\ j\ ,\ l]\ .$$

Zowel de drie-index symbolen als de Christoffel symbolen zijn geen tensoren maar we passen er wel de sommatieconventie op toe zoals bij de in (4.4) gegeven definitie.

We merken op dat bij het gebruik van rechtlijnige coördinaten in een Euclidische ruimte de componenten van de fundamentaaltensor overal dezelfde waarden hebben zodat de Christoffel symbolen in elk punt identiek verdwijnen.
Hieruit volgt dat, wanneer men zich beperkt tot lineaire transformaties van rechtlijnige coördinaten, de covariante afgeleiden (4.1) en (4.2) met de gewone afgeleiden overeenstemmen, zodat in dat geval $\partial_j\, v^i$ en $\partial_k\, w_j$ wel de transformatieregel van een tensor volgen.

De transformatieregel van de Christoffelsymbolen kan a.v. afgeleid worden:
Uit

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}\, g_{\alpha\beta}\ ,$$

volgt na partiele differentiatie

$$\bar{\partial}_k\, \bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}\, \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k}\ \partial_\gamma\, g_{\alpha\beta}\ +$$

$$+\ g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i\, \partial \bar{x}^k}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \bar{x}^j\, \partial \bar{x}^k}\, \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\right)\ .$$

Met enig gemanipuleer van indices volgt hieruit

$$\tfrac{1}{2}(-\,\bar{\partial}_k\,\bar{g}_{ij} + \bar{\partial}_i\,\bar{g}_{jk} + \bar{\partial}_j\,\bar{g}_{ki}) = \tfrac{1}{2}(-\,\partial_\gamma\,g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\,g_{\beta\gamma} + \partial_\beta\,g_{\gamma\alpha})\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} +$$

$$+\,g_{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2\,x^\alpha}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\;,$$

ofwel

$$\overline{[i\ \ j\ ,\ k]} = [\alpha\ \ \beta\ ,\ \gamma]\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} + g_{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2\,x^\alpha}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\;. \tag{4.5}$$

Met toepassing van (4.4) kan hieruit zonder moeite de volgende regel afgeleid worden

$$\bar{\Gamma}\,{}^k_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\gamma}\,\Gamma\,{}^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2\,x^\gamma}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\gamma}\;. \tag{4.6}$$

Deze transformatieregel kan gebruikt worden om te bewijzen dat de door (4.1) en (4.2) gedefinieerde covariante afgeleiden zich inderdaad als tensoren transformeren.

De divergentie van een contravariante vector kan ook met behulp van (4.1) gevormd worden als

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \nabla_i\,v^i = \partial_i\,v^i + \Gamma\,{}^i_{ij}\,v^j\;.$$

Voor $\Gamma\,{}^i_{ij}$ vinden we

$$\Gamma\,{}^i_{ij} = g^{il}\,[i\ \ j\ ,\ l] + \tfrac{1}{2}\,g^{il}\,\partial_j\,g_{il} =$$

$$= \frac{1}{2g}\,\frac{\partial g}{\partial g_{il}}\,\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} = \frac{1}{2g}\,\partial_j\,g\;.$$

zodat

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \partial_i\,v^i + \frac{v^i}{2g}\,\partial_i g = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_i\,(v^i\,\sqrt{g})\;,$$

waarmee de in (3.8) gevonden uitdrukking teruggevonden is.

De Christoffel symbolen welke hierboven op vrij kunstmatige wijze uit de lucht zijn komen vallen kunnen op de volgende wijze op meer natuurlijke wijze tevoorschijn gebracht worden.

We stellen de vraag in de gegeven ruimte de zgn. geodeten te bepalen, d.w.z. de lijnen $x^i = x^i(t)$ welke tussen twee punten de kortste verbindingen vormen. Voor deze lijnen geldt dus dat

$$(4.7) \qquad \int_P^Q \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} \, dt = \text{minimum} \quad .$$

Volgens de beginselen van de variatierekening leidt deze eis tot de volgende vergelijkingen van Euler en Lagrange

$$(4.8) \qquad \frac{\partial F}{\partial x^k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} \quad ,$$

waarbij $F = ds/dt$.

Uitwerking van (4.8) geeft na overgang op de prettiger werkende parameter $s$ :

$$\frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \partial_k g_{ij} = 2 \frac{d}{ds} \left( g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \right) \quad .$$

Na enige herleiding volgt hieruit

$$g_{ik} \frac{d^2x^i}{ds^2} + [i \; j \, , k] \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0.$$

of na vermenigvuldiging met $g^{kn}$

$$(4.9) \qquad \frac{dx^2}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \; .$$

Voorbeeld 1.

In een Euclidische $R_n$ zijn alle Christoffel symbolen nul.
Uit (4.9) volgt

$$x^k = \alpha^k s + \beta^k$$

zodat de geodeten rechte lijnen zijn, zoals natuurlijk te verwachten was.

Voorbeeld 2.

Op een boloppervlak

$$x = \sin\Theta\ \cos\phi\ ,\qquad y = \sin\Theta\ \sin\phi\ ,\qquad z = \cos\Theta$$

geldt

$$ds^2 = d\Theta^2 + \sin^2\Theta\ d\phi^2 .$$

De matrix van de fundamentaaltensor is dus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\Theta \end{pmatrix} .$$

Berekening van de drie-index symbolen geeft

$$[1\,1\,,1] = [1\,1\,,2] = [1\,2\,,1] = [2\,2\,,2] = 0\ ,$$

$$[1\,2\,,2] = -\,[2\,2\,,1] = \sin\Theta\cos\Theta\quad .$$

Voor de Christoffel symbolen vinden we

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = 0$$

$$\Gamma^2_{12} = \operatorname{cotg}\Theta\qquad ,\qquad \Gamma^1_{22} = -\sin\Theta\cos\Theta$$

De geodetenvergelijkingen (4.9) zijn daarmede

$$\frac{d^2\Theta}{ds^2} = \sin\Theta\cos\Theta\ \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2\ ,\qquad \frac{d^2\Theta}{ds^2} = -2\ \operatorname{cotg}\Theta\ \frac{d\Theta}{ds}\ \frac{d\Theta}{ds}\ .$$

Eliminatie van de parameter s geeft met behulp van

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{d\Theta}{d\phi}\ \frac{d\phi}{ds}\ ,\qquad \frac{d^2\Theta}{ds^2} = \frac{d^2\Theta}{d\phi^2}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + \frac{d\Theta}{d\phi}\ \frac{d^2\phi}{ds^2}\ ,$$

als resultaat de vergelijking

$$\frac{d^2\Theta}{d\phi^2} - 2\ \operatorname{cotg}\Theta\ \left(\frac{d\Theta}{d\phi}\right)^2 - \sin\Theta\cos\Theta = 0\ ,$$

welke geschreven kan worden als

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\ (\operatorname{cotg}\Theta)\ +\ \operatorname{cotg}\Theta\ =\ 0.$$

Hieruit volgt de algemene oplossing

$$\mathrm{cotg}\Theta = A \cos\phi + B \sin\phi \quad ,$$

ofwel

$$\cos\Theta = A \cos\phi \sin\Theta + B \sin\phi \sin\Theta \; .$$

Dit is dus de grote cirkel als doorsnede van de eenheidsbol en het vlak

$$z = Ax + By .$$

Op een bol zijn de grote cirkels de geodeten, ook weer een bekend feit.